



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ  
PRÓ-REITORIA DE ENSINO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES

**Francisco Wendel Almeida Cavalcante**

**EFEITO DO ERRO PARAMÉTRICO EM ESQUEMAS DE TELEPORTAÇÃO DE  
PORTAS QUÂNTICAS MODELADAS POR DECOMPOSIÇÃO KAK**

**Fortaleza - Ceará  
28 de Outubro de 2016**

**Francisco Wendel Almeida Cavalcante**

**EFEITO DO ERRO PARAMÉTRICO EM ESQUEMAS  
DE TELEPORTAÇÃO DE PORTAS QUÂNTICAS  
MODELADAS POR DECOMPOSIÇÃO KAK**

Dissertação submetida à Coordenação  
Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia de Telecomunicações do  
Instituto Federal do Ceará, como requisito  
parcial para obtenção do grau de Mestre  
em Engenharia de Telecomunicações.

Área de concentração: Informação  
Quântica

Orientador: Prof. Dr. Fábio Alencar  
Mendonça

Fortaleza  
2016

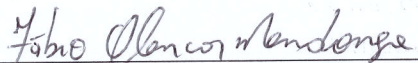
**FRANCISCO WENDEL ALMEIDA CAVALCANTE**

**EFEITO DO ERRO PARAMÉTRICO EM ESQUEMAS DE TELEPORTAÇÃO  
DE PORTAS QUÂNTICAS MODELADAS POR DECOMPOSIÇÃO KAK**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Telecomunicações do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Telecomunicações. Área de Concentração: Informação Quântica

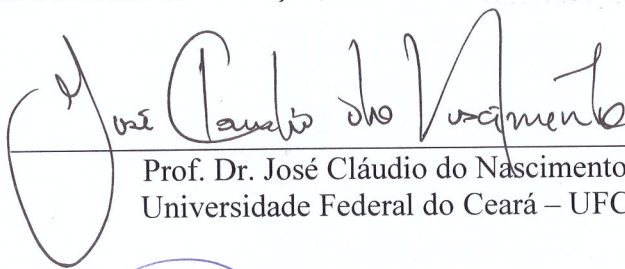
Aprovada em: 28/10/2016

**BANCA EXAMINADORA**

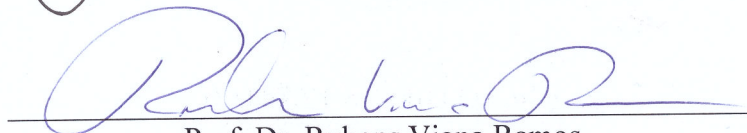


Prof. Dr. Fábio Alencar Mendonça

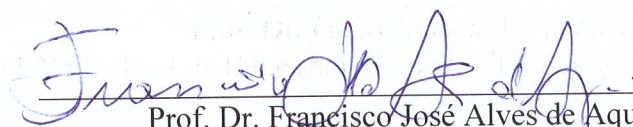
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE



Prof. Dr. José Cláudio do Nascimento  
Universidade Federal do Ceará – UFC



Prof. Dr. Rubens Viana Ramos  
Universidade Federal do Ceará – UFC



Prof. Dr. Francisco José Alves de Aquino  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE

---

# Agradecimentos

---

À minha amada esposa, Gilvana.

À ex-presidente do Tribunal Regional Eleitoral do Ceará, Des. Maria Iracema Martins do Vale, ao atual presidente, Des. Antônio Abelardo Benevides Moraes, e a todos os colegas que contribuíram direta ou indiretamente para que eu pudesse realizar esse sonho.

Ao meu orientador, Fábio Alencar Mendonça, que acreditou no meu trabalho e foi compreensivo nos diversos momentos de dificuldade.

Ao Fernando Vasconcelos Mendes, cujas ideias contribuíram bastante para essa pesquisa.

A todos os colegas e professores do IFCE.

Aos meus amigos.

*"We live to make the impossible possible. That is our focus."*

Claire Farron

---

# Resumo

---

Em geral, esquemas físicos que executam algoritmos quânticos sofrem inevitavelmente interações indesejáveis com o mundo externo que influenciam no resultado final, uma vez que não existem sistemas perfeitamente isolados. Tais interações aparecem como erro nos sistemas de processamento, transmissão e armazenamento quânticos da informação. Assim, é necessária a compreensão e o controle dos processos de erros para que medidas sejam tomadas afim de mitigar seus efeitos. Neste trabalho é estudado a influência do erro aditivo na teleportação de estados e portas quânticas modeladas por decomposição KAK. Para isso, a fidelidade é usada como medida de proximidade entre os estados resultantes nos circuitos ideais e aqueles dos circuitos com erro. Afim de considerar todos os estados de entrada de 1 e 2 qubits, a fidelidade média foi calculada considerando a representação geométrica de estados nas esferas de Bloch e hiperesferas  $S^7$ . Além disso, a relação entre o grau de entrelaçamento dos estados na entrada e a fidelidade média obtida para o circuito de teletransporte de portas com erro é investigada.

---

# Abstract

---

In general, physical schemes that perform quantum algorithms are subjected to undesirable interactions with the external world that influence the final results, since there are no perfectly isolated systems. Such interactions appear as error in the quantum information processing, transmission and storage. Thus, understanding and control of error processes are necessary for action to be taken in order to mitigate its effects. This work examines the influence of additive error in the teleportation of quantum states and gates modeled by KAK decomposition. For this purpose, fidelity is used as a measure of proximity between results of ideal circuits and those from the circuits with error. In order to consider all the input states of 1 and 2 qubits, the average fidelity was calculated using the geometric representation of states in the Bloch sphere and  $S^7$  hyperspheres. Furthermore, the relationship between the entanglement degree of states at the input and the average fidelity obtained for the teleportation circuit containing gates with error is investigated.

---

# Sumário

---

|                                                                  |           |
|------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Lista de Figuras</b>                                          | <b>1</b>  |
| <b>Lista de Tabelas</b>                                          | <b>3</b>  |
| <b>1 Introdução</b>                                              | <b>4</b>  |
| 1.1 Objetivos . . . . .                                          | 6         |
| 1.2 Organização do Trabalho . . . . .                            | 6         |
| <b>2 Teleportação Quântica</b>                                   | <b>7</b>  |
| 2.1 Introdução . . . . .                                         | 7         |
| 2.2 Teleportação de Estados Quânticos . . . . .                  | 7         |
| 2.3 Teleportação de Portas Quânticas . . . . .                   | 9         |
| 2.3.1 Teleportação da CNOT . . . . .                             | 9         |
| 2.3.2 Teleportação da função XOR de bit clássicos . . . . .      | 11        |
| 2.4 Conclusão . . . . .                                          | 13        |
| <b>3 Geometria de Estados e Modelagem de Erro</b>                | <b>14</b> |
| 3.1 Introdução . . . . .                                         | 14        |
| 3.2 Geometria de 1 qubit . . . . .                               | 14        |
| 3.2.1 Projeções Estereográficas . . . . .                        | 16        |
| 3.2.2 Cálculo do valor médio de uma função de 1 qubit . . . . .  | 18        |
| 3.3 Geometria de 2 qubits . . . . .                              | 20        |
| 3.3.1 Cálculo do valor médio de uma função de 2 qubits . . . . . | 22        |

|          |                                                                            |           |
|----------|----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.3.2    | Cálculo do valor médio de uma função de 2 qubits separáveis . . . . .      | 22        |
| 3.4      | Decomposição de Portas Quânticas . . . . .                                 | 23        |
| 3.4.1    | Decomposição ZYZ para Portas de 1 Qubit . . . . .                          | 23        |
| 3.4.2    | Implementação física de uma porta de 1 qubit . . . . .                     | 23        |
| 3.4.3    | Portas quânticas de 1 qubit com erro paramétrico . . . . .                 | 24        |
| 3.4.4    | Decomposição KAK para portas de 2 qubits . . . . .                         | 25        |
| 3.4.5    | Portas quânticas de 2 qubits com erro . . . . .                            | 26        |
| 3.5      | Conclusão . . . . .                                                        | 26        |
| <b>4</b> | <b>Resultados das Simulações</b>                                           | <b>27</b> |
| 4.1      | Fidelidade . . . . .                                                       | 27        |
| 4.2      | Erro paramétrico em uma transformação $SU(2)$ . . . . .                    | 28        |
| 4.3      | Erro no teletransporte de estados de 1 qubit . . . . .                     | 30        |
| 4.3.1    | Influência do erro da primeira rotação da porta Hadamard . . . . .         | 31        |
| 4.4      | Erro no teletransporte de portas quânticas de 2 qubits . . . . .           | 33        |
| 4.4.1    | Erro na transformação não local - Estados Separáveis na Entrada . . . . .  | 34        |
| 4.4.2    | Erro na transformação não local - Caso geral . . . . .                     | 36        |
| 4.4.3    | Comparação entre o caso separável e o caso geral . . . . .                 | 37        |
| 4.5      | Influência do grau de entrelaçamento no teletransporte de portas . . . . . | 38        |
| 4.6      | Conclusão . . . . .                                                        | 41        |
| <b>5</b> | <b>Conclusões</b>                                                          | <b>42</b> |
| 5.1      | Trabalhos futuros . . . . .                                                | 43        |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>                                          | <b>44</b> |
|          | <b>Apêndice A – Conceitos</b>                                              | <b>46</b> |
| A.1      | Informação Quântica . . . . .                                              | 46        |

|                                       |                                                                            |           |
|---------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| A.1.1                                 | Qubits e o Espaço de Hilbert . . . . .                                     | 46        |
| A.1.2                                 | Sistemas quânticos compostos de 2 qubits . . . . .                         | 47        |
| A.2                                   | Evolução do Sistema . . . . .                                              | 48        |
| <b>Apêndice B – Códigos do Matlab</b> |                                                                            | <b>49</b> |
| B.1                                   | Erro paramétrico em uma transformação $SU(2)$ . . . . .                    | 49        |
| B.2                                   | Erro no teletransporte de estados . . . . .                                | 50        |
| B.3                                   | Erro na transformação não local - Estados Separáveis na Entrada . . . . .  | 51        |
| B.4                                   | Erro na transformação não local - Caso geral . . . . .                     | 53        |
| B.5                                   | Influência do grau de entrelaçamento no teletransporte de portas . . . . . | 55        |

---

# Lista de Figuras

---

|     |                                                                                                                                    |    |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1 | Circuito quântico para teleportação de 1 qubit. Fonte: Kaye, Laflamme & Mosca (2006) . . . . .                                     | 8  |
| 2.2 | Operação CNOT entre 2 qubits teleportados. Fonte: Elaborada pelo autor . . .                                                       | 10 |
| 2.3 | Alteração do circuito de teleportação de 2 qubits. Fonte: Elaborada pelo autor .                                                   | 10 |
| 2.4 | Teleportação de portas de 2 qubits. Fonte: Elaborada pelo autor . . . . .                                                          | 10 |
| 2.5 | Teleportação da função XOR entre bits clássicos. Fonte: Elaborada pelo autor .                                                     | 12 |
| 3.1 | Projeção estereográfica de um ponto de uma esfera $S^2$ . Fonte: Adaptado de (APELIAN; SURACE, 2009) . . . . .                     | 17 |
| 3.2 | Projeção estereográfica da fase global para 3 qubits distintos. Fonte: Elaborada pelo autor . . . . .                              | 18 |
| 3.3 | Projeção estereográfica da fase global para 3 qubits distintos. Fonte: Elaborada pelo autor . . . . .                              | 19 |
| 3.4 | Decomposição KAK com erro paramétrico na parte não local. Fonte: Elaborada pelo autor . . . . .                                    | 26 |
| 4.1 | Porta quântica de 1 qubit. Fonte: Elaborada pelo autor . . . . .                                                                   | 28 |
| 4.2 | Transformação $SU(2)$ com erro paramétrico. Fonte: Elaborada pelo autor . . .                                                      | 28 |
| 4.3 | $F_m$ para $SU(2)$ com erro em uma rotação. Fonte: Elaborada pelo autor . . . .                                                    | 29 |
| 4.4 | $F_m$ para $SU(2)$ com erro em duas rotações. Fonte: Elaborada pelo autor . . . .                                                  | 29 |
| 4.5 | Esquema para teleportação de estados com erro na porta Hadamard. Fonte: Elaborada pelo autor . . . . .                             | 30 |
| 4.6 | $F_m$ para a teleportação de estados, com erros nas duas últimas rotações da porta Hadamard. Fonte: Elaborada pelo autor . . . . . | 32 |
| 4.7 | Porta quântica de 2 qubits. Fonte: Elaborada pelo autor . . . . .                                                                  | 33 |

|      |                                                                                                                                  |    |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.8  | Esquema de teleportação da porta $U_e$ . Fonte: Elaborada pelo autor . . . . .                                                   | 35 |
| 4.9  | $F_m$ para a teleportação de portas, com 1 ângulo de erro na transformação não local. Fonte: Elaborada pelo autor . . . . .      | 36 |
| 4.10 | $F_m$ para a teleportação de portas, com 2 ângulos de erro na transformação não local. Fonte: Elaborada pelo autor . . . . .     | 36 |
| 4.11 | $F_m$ para a teleportação de portas com 1 ou 2 ângulos de erro na transformação não local. Fonte: Elaborada pelo autor . . . . . | 37 |
| 4.12 | Diferença entre $F_{separável}$ e $F_{geral}$ . Fonte: Elaborada pelo autor . . . . .                                            | 38 |
| 4.13 | $F_m$ para o caso de estados maximamente entrelaçados, com um ângulo de erro. Fonte: Elaborada pelo autor . . . . .              | 39 |
| 4.14 | Valores de $q$ para os casos separável, geral e com máxima entropia. Fonte: Elaborada pelo autor . . . . .                       | 40 |
| 4.15 | Influência do grau de entrelaçamento sobre o coeficiente $q$ . Fonte: Elaborada pelo autor . . . . .                             | 41 |

---

## Lista de Tabelas

---

|     |                                                                                                                     |    |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1 | Correções para o teletransporte de estados. . . . .                                                                 | 8  |
| 2.2 | Tabela com estados chaves de teleportação a serem usadas no esquema da<br>Figura 2.4 e portas teleportadas. . . . . | 11 |
| 4.1 | Fidelidade média para 1 e 2 ângulos com erro. . . . .                                                               | 38 |
| 4.2 | Fidelidade média para 3 ângulos com erro. . . . .                                                                   | 38 |

# INTRODUÇÃO

---

A pesquisa em computação e informação quântica tem motivações nas dificuldades enfrentadas no processo de miniaturização de componentes e na futura obsolescência da criptografia clássica.

Em 1965, Gordon E. Moore publicou um artigo (MOORE, 2006) no qual fez algumas previsões sobre o futuro dos CIs(circuitos integrados). Tal tecnologia viabilizaria computadores pessoais, além de equipamentos portáteis de comunicação. Devido a sua vasta abundância e baixo custo, o silício permaneceria, por um bom tempo, como o material base para construção desses circuitos. Além disso, nesse artigo, ele introduziu o que é conhecida como *Lei de Moore*. Segundo essa lei, o número de componentes por CI iria dobrar a cada 18 meses, com praticamente o mesmo custo.

Pela *Lei de Moore*, o tamanho dos transistores é inversamente proporcional à quantidade deles em um CI. Na 6ª geração de processadores Intel, são usados transistores de 14nm (FAYNEH *et al.*, 2016), enquanto que na sétima geração serão usados transistores de 10nm. No entanto, há várias dificuldades para que esse tamanho diminua ainda mais, como pode-se conferir em (MARKOV, 2014) . Em (POWELL, 2008), James R. Powell usa o comprimento de onda de Compton para estimar que a *Lei de Moore* alcançaria o limite no ano de 2036. Transistores ainda menores seriam impossibilitados devido aos efeitos quânticos que prevalecem nessa escala. Um computador quântico, por outro lado, poderia se basear nesses efeitos.

Mas os limites da miniaturização não são os únicos problemas que a computação clássica enfrentará. A criptografia clássica, base das transações online no mundo todo, pode ficar obsoleta em pouco tempo com o advento do computador quântico. Como exemplo, o RSA, algoritmo de criptografia assimétrica, se baseia em chaves derivadas de fatores primos muito grandes. Um algoritmo clássico pode levar anos pra descobrir a chave privada dessa criptografia. No entanto, o algoritmo de Shor (SHOR, 1994), baseado na teoria da computação quântica, pode descobrir rapidamente os fatores primos de um número qualquer. Consequentemente, o RSA será facilmente quebrado e se tornará inviável para uma criptografia segura.

O SSL(*Secure Software Layer*), protocolo amplamente utilizado na Internet, é uma potencial vítima do algoritmo de Shor. Tal protocolo utiliza-se de criptografias assimétricas para compartilhar com segurança chaves privadas de uma criptografia simétrica. Esta, por sua vez, utilizada para codificar os dados da comunicação (TANENBAUM *et al.*, 2003). A Distribuição Quântica de Chaves (DQC) é uma alternativa para substituir a criptografia assimétrica na distribuição segura de chaves privadas (OUELLETTE, 2004). Mas as mensagens transmitidas, embora criptografadas, continuam sujeitas a interceptação, pois trafegam por algum canal físico. A teleportação quântica, proposta em 1993 (BENNETT *et al.*, 1993), permite o envio de bits quânticos sem que eles precisem trafegar por um canal físico, eliminando o problema da interceptação.

O termo *teleportação* é geralmente ligado a obras de ficção científica, tais como a série Star Trek. Ao contrário dessas obras, no entanto, a teleportação quântica transmite apenas estados quânticos, não matéria. No caso da computação quântica, tais estados são os chamados *qubits*. Estes podem ser transmitidos entre dois pontos que compartilhem um par EPR(Einstein-Podolsky-Rosen) (EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935). Em (MA *et al.*, 2012) pode-se conferir um experimento no qual foram teletransportados estados quânticos a uma distância de 143 km. A teleportação quântica, no entanto, apresenta suas próprias dificuldades de implementação, o que dificulta a obtenção de distâncias cada vez maiores. Uma delas é o erro presente em qualquer sistema quântico real, dificultando a implementação de algoritmos quânticos em geral. O estudo do impacto do erro sobre esses algoritmos, portanto, se faz necessário.

O estudo teórico do erro pressupõe uma modelagem desse e a escolha de alguma medida para comparar o resultado obtido e o resultado esperado. Em (OH; LEE; LEE, 2002), por exemplo, a teleportação através de canais quânticos ruidosos é estudada pela solução analítica e numérica da equação do operador densidade na forma de Lindblad (LINDBLAD, 1976). Nesta dissertação foi usada uma abordagem diferente. Foram consideradas portas quânticas ruidosas nos circuitos de teleportação, dividindo-as em componentes de uma decomposição ZYZ, para portas de 1 qubit, ou uma decomposição KAK, para portas de 2 qubits, e a seguir introduzindo um erro paramétrico em componentes individuais ou combinados dessas decomposições. A partir dessa modelagem, foram usadas hipersferas como representações geométricas de estados. A integração da função fidelidade na superfície dessas hipersferas foi usada para a obtenção da fidelidade média, a partir da qual pode-se estimar a influência do erro no circuito.

## 1.1 Objetivos

Essa dissertação tem os seguintes objetivos:

- Descrever a geometria utilizada para representação de estados de 1 e 2 qubits;
- Descrever a modelagem de erro utilizada;
- Calcular fidelidades médias baseadas na integração das geometrias de estados;
- Analisar numericamente a influência do grau de entrelaçamento nas fidelidades médias.

## 1.2 Organização do Trabalho

No Capítulo 2 é feita uma breve revisão da teoria do teletransporte de estados e de portas quânticas. No Capítulo 3 são abordadas as geometrias de estados de 1 e 2 qubits e o seu uso para a obtenção dos valores médios da função fidelidade. No Capítulo 4 são mostrados os resultados das simulações simbólicas e numéricas da influência do erro paramétrico em esquemas de teletransporte. No Capítulo 5 são apresentadas as conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

No Apêndice A são apresentados os conceitos básicos de Informação Quântica. Por fim, o Apêndice B contém os códigos de *Matlab* utilizados.

# TELEPORTAÇÃO QUÂNTICA

## 2.1 Introdução

A teleportação de estados quânticos foi proposta em 1993 (BENNETT *et al.*, 1993) e teve como base a existência de correlação de longo alcance entre pares de partículas EPR (EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935). Além de ser usada para teleportar estados, demonstrou-se também ser possível a teleportação de portas quânticas (GOTTESMAN; CHUANG, 1999).

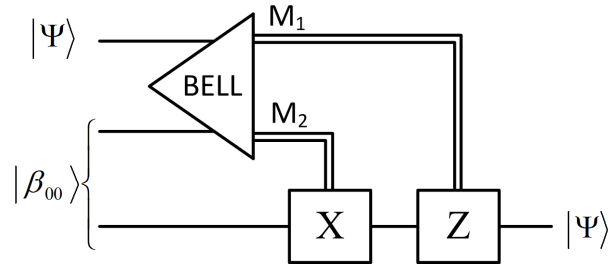
A teleportação quântica consiste em um protocolo que permite transferir um estado quântico qualquer entre locais não necessariamente próximos enviando informação clássica, sendo necessário um estado entrelaçado previamente compartilhado. A teleportação já foi realizada experimentalmente usando polarização de fótons, estados comprimidos da luz e ressonância magnética nuclear. Com relação às aplicações, as principais são em protocolos de comunicação e computação quânticas.

## 2.2 Teleportação de Estados Quânticos

Considere um estado quântico definido por  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  em que uma entidade denominada Alice quer enviar este estado de um qubit para uma outra entidade denominada Bob. Suponha que Alice tem um canal clássico ligando-a a Bob. Para tal propósito citado primeiramente, Alice deveria ou enviar o qubit fisicamente, ou informar as duas amplitudes complexas com infinita precisão. Suponha que Alice e Bob compartilham o estado de Bell:

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.1)$$

Para que o estado de posse de Alice seja teleportado para Bob, eles devem usar o esquema já bastante conhecido da Figura 2.1.



**Figura 2.1:** Circuito quântico para teleportação de 1 qubit.  
Fonte: Kaye, Laflamme & Mosca (2006)

O estado de 3 qubits é inicialmente

$$|\psi\rangle|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{2}|\beta_{00}\rangle|\psi\rangle + \frac{1}{2}|\beta_{01}\rangle(X|\psi\rangle) + \frac{1}{2}|\beta_{10}\rangle(Z|\psi\rangle) + \frac{1}{2}|\beta_{11}\rangle(XZ|\psi\rangle) \quad (2.2)$$

Alice faz a medição dos dois primeiros qubits na base de Bell. Com probabilidade 1/4 cada, o estado conjunto entre Alice e Bob depois dessa medição é um dos seguintes:  $|\beta_{00}\rangle|\psi\rangle$ ,  $|\beta_{01}\rangle(X|\psi\rangle)$ ,  $|\beta_{10}\rangle(Z|\psi\rangle)$  e  $|\beta_{11}\rangle(XZ|\psi\rangle)$ . Os bits clássicos  $M_1$  e  $M_2$  resultados da medição de Alice indicam qual dos 4 estados é obtido. Quando Alice envia esses 2 bits para Bob, ele descobre que se o seu qubit ficou no estado  $|\psi\rangle$ ,  $X|\psi\rangle$ ,  $Z|\psi\rangle$  ou  $XZ|\psi\rangle$ . Dependendo de qual estado ele tenha (ou dependendo dos valores de  $M_1$  e  $M_2$ ), Bob realiza uma das operações da Tabela 2.1 para transformar seu estado em  $|\psi\rangle$ .

| $M_1$ | $M_2$ | Operação realizada por Bob |
|-------|-------|----------------------------|
| 0     | 0     | I                          |
| 0     | 1     | X                          |
| 1     | 0     | Z                          |
| 1     | 1     | $Z * X$                    |

**Tabela 2.1:** Correções para o teletransporte de estados.

Depois dessas transformações condicionadas aos valores de  $M_1$  e  $M_2$  enviados por Alice, Bob tem certeza que tem o estado  $|\psi\rangle$ , e que o estado foi teleportado com sucesso entre eles. Nota-se ainda que não há transmissão de informação acima da velocidade da luz, pois a teleportação só é concluída quando os bits clássicos resultantes da medição são enviados, estando estes limitados a velocidade da luz. Além disso, o princípio da clonagem é mantido, pois o estado usado por Alice é consumido para ser então recriado por Bob.

## 2.3 Teleportação de Portas Quânticas

A teleportação quântica tem uma interessante e notável aplicação em circuitos quânticos. Sabe-se que para implementar circuitos quânticos em geral, é necessário um conjunto universal de portas quânticas e tal conjunto sempre inclui pelo menos uma porta que atua em dois q-bits, sendo a CNOT uma possibilidade. Isso foi proposto inicialmente em 1999 por Gottesman e Chuang (GOTTESMAN; CHUANG, 1999). No entanto, é difícil tecnologicamente implementar portas que atuam em mais de um qubit, já que o controle de sistemas quânticos acoplados é um desafio bem interessante. Portanto, se uma CNOT falhar durante a computação de alguma tarefa, os estados de qubits em que ela atuava serão corrompidos. Uma solução seria criar cópias dos estados e, quando necessário, realizar novamente as operações. No entanto, a não clonagem de estados quânticos impossibilita isso.

A questão principal então é como executar uma operação CNOT de forma não-destrutiva de modo que, se ela falhar, o estados quânticos de qubits relevantes não sejam corrompidos, e possamos então simplesmente tentar a CNOT novamente? A teleportação quântica nos dá uma maneira de fazer isso, desde que tenhamos a capacidade de preparar um estado de Bell, fazer rotações em um qubit e medir o estado de Bell diretamente. Ou seja, deixamos de ter o desafio tecnológico de implementar a porta CNOT e passamos a ter apenas um novo que é criar estados entrelaçados.

### 2.3.1 Teleportação da CNOT

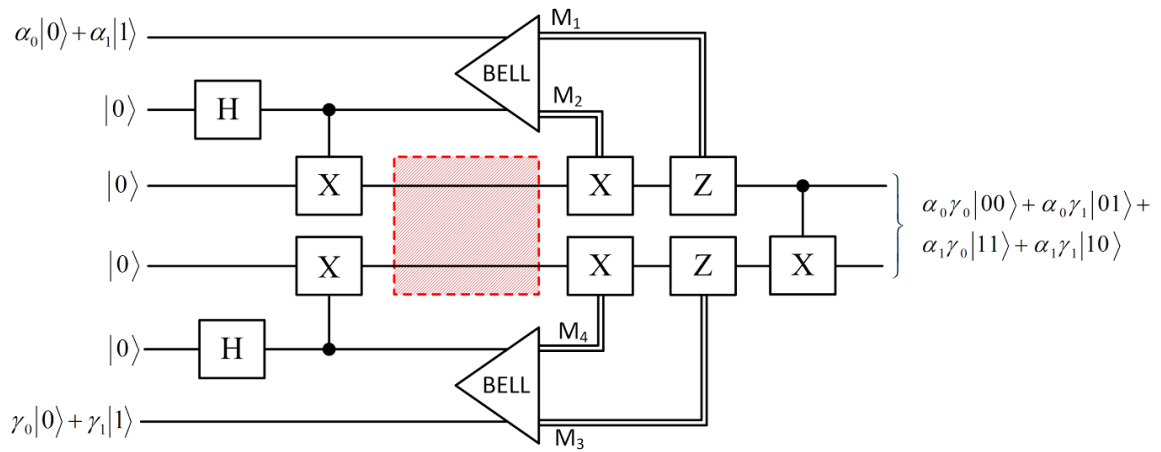
Considere que se deseja executar a teleportação da porta CNOT entre um qubit de controle no estado  $\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$  e um qubit alvo no estado  $\gamma_0|0\rangle + \gamma_1|1\rangle$ . O esquema da Figura 2.2 representa a teleportação dos dois estados e no final a operação CNOT entre eles.

Um par de CNOT pode ser adicionada no quadrado tracejado indicado no esquema da Figura 2.2 sem modificar o comportamento geral do circuito, uma vez que o efeito combinado de duas portas CNOT é a identidade. O circuito fica então conforme a Figura 2.3.

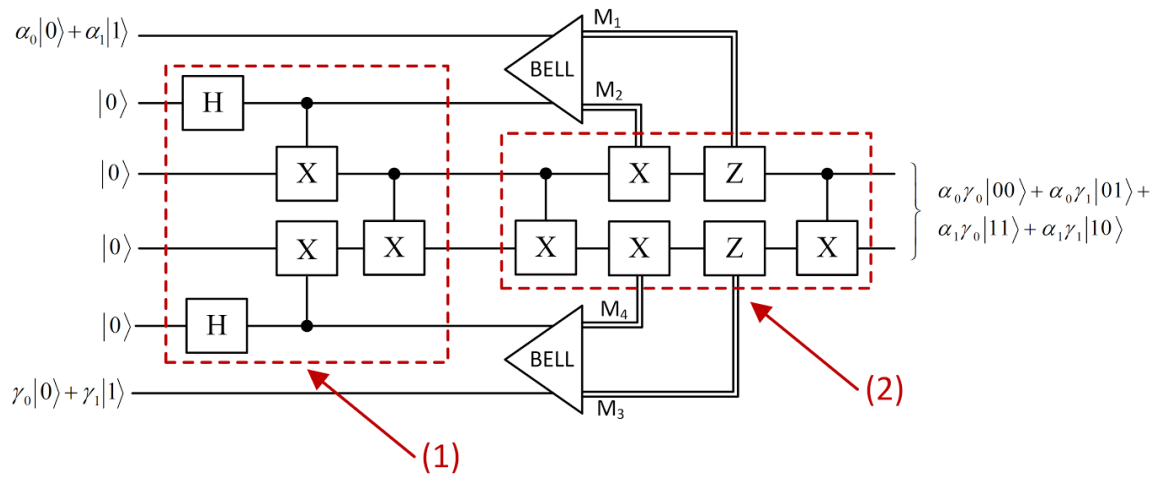
No esquema da Figura 2.3, o quadrado tracejado da esquerda(indicado por (1)) do circuito gera o estado entrelaçado de 4 qubits:

$$\frac{|0000\rangle + |0011\rangle + |1110\rangle + |1101\rangle}{2} \quad (2.3)$$

Já o quadrado tracejado da direita(indicado por (2)), para qualquer combinação de  $(M_1, M_2, M_3, M_4)$ , o resultado desejado pode ser obtido controlando individualmente as portas X

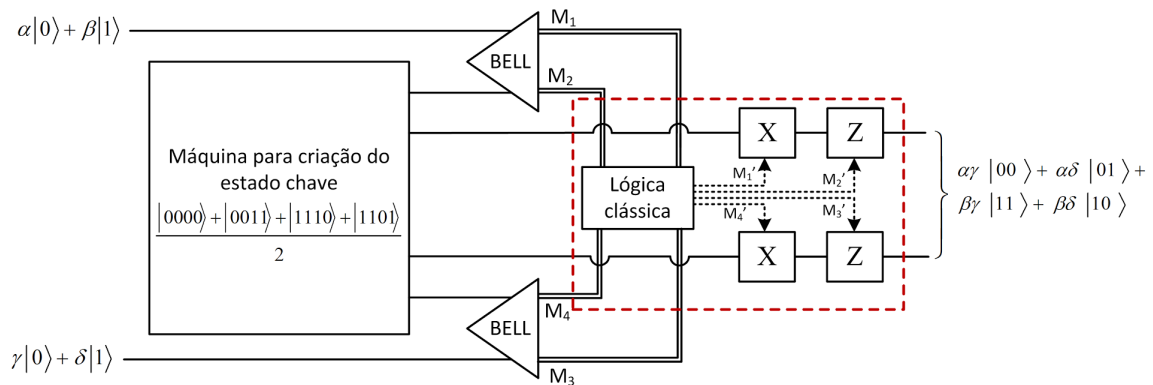
**Figura 2.2:** Operação CNOT entre 2 qubits teleportados.

Fonte: Elaborada pelo autor

**Figura 2.3:** Alteração do circuito de teleportação de 2 qubits.

Fonte: Elaborada pelo autor

e Z que atuam nos dois qubits. Portanto, pode-se remover as duas portas CNOT e, considerando um controle lógico clássico apropriado, o esquema de teleportação da CNOT está na Figura 2.4.

**Figura 2.4:** Teleportação de portas de 2 qubits.

Fonte: Elaborada pelo autor

No esquema da Figura 2.4, o primeiro passo é a criação do estado entrelaçado de 4 qubits. Depois é realizada a medição na base de Bell nos dois primeiros e nos dois últimos qubits, tendo como resultado as medições  $(M_1, M_2, M_3, M_4)$ . O circuito lógico clássico é usado para fazer o mapeamento  $(M'_1, M'_2, M'_3, M'_4)$  que será usado para definir de que forma as portas X e Z deveram ser controladas para atuar nos dois qubits restantes e gerar na saída o resultado da operação CNOT entre os estados da entrada.

O circuito da Figura 2.4, apesar de ser usado para a teleportação da CNOT, também pode ser usado para teleportação de outras portas de 2 qubits (MENDES, 2015). Para isso, basta que sejam gerados outros estados chaves que sirvam como recurso para teleportação conforme Tabela 2.2.

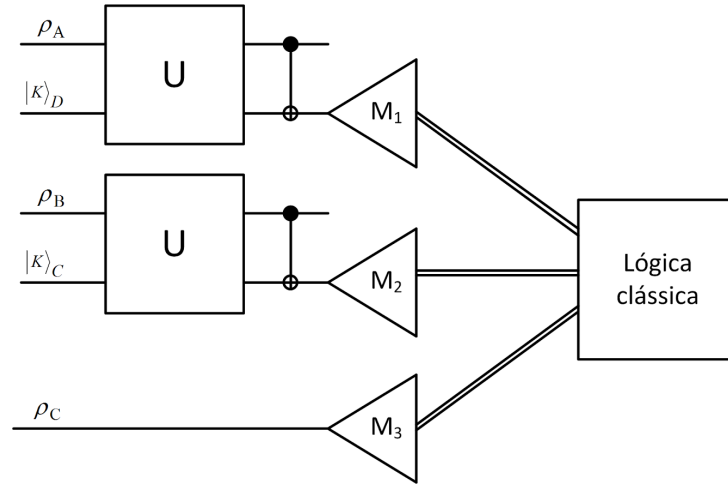
| <i>Estado Chave</i>                                         | <i>Porta</i>                                              |
|-------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| $ 0000\rangle +  0011\rangle +  1101\rangle +  1110\rangle$ | $C_N$                                                     |
| $ 0000\rangle +  0111\rangle +  1010\rangle +  1101\rangle$ | $S_W C_N$                                                 |
| $ 0000\rangle +  0111\rangle +  1011\rangle +  1100\rangle$ | $C_N^\perp$                                               |
| $ 0001\rangle +  0010\rangle +  1100\rangle +  1111\rangle$ | $(X \otimes I) C_N (X \otimes I)$                         |
| $ 0001\rangle +  1010\rangle +  0100\rangle +  1111\rangle$ | $S_W (I \otimes X) C_N^\perp (I \otimes X)$               |
| $ 0001\rangle +  0110\rangle +  1010\rangle +  1101\rangle$ | $(X \otimes X) (I \otimes X) C_N^\perp (I \otimes X)$     |
| $ 0001\rangle +  0110\rangle +  1011\rangle +  1100\rangle$ | $(X \otimes X) (I \otimes X) C_N^\perp (I \otimes X)$     |
| $ 0001\rangle +  1011\rangle +  0110\rangle +  1100\rangle$ | $(X \otimes X) S_W (I \otimes X) C_N^\perp (I \otimes X)$ |
| $ 0011\rangle +  0100\rangle +  1000\rangle +  1111\rangle$ | $(I \otimes X) C_N^\perp (I \otimes X)$                   |
| $ 0011\rangle +  0100\rangle +  1001\rangle +  1110\rangle$ | $(X \otimes X) S_W C_N$                                   |
| $ 0011\rangle +  0100\rangle +  1110\rangle +  1001\rangle$ | $(X \otimes X) S_W C_N$                                   |
| $ 0011\rangle +  0110\rangle +  1000\rangle +  1101\rangle$ | $(X \otimes X) S_W (I \otimes X) C_N^\perp (I \otimes X)$ |
| $ 0011\rangle +  1101\rangle +  0110\rangle +  1000\rangle$ | $(X \otimes X) S_W (I \otimes X) C_N^\perp (I \otimes X)$ |
| $ 0111\rangle +  1001\rangle +  0010\rangle +  1100\rangle$ | $(X \otimes X) S_W C_N^\perp$                             |
| $ 0111\rangle +  1001\rangle +  1010\rangle +  0100\rangle$ | $(X \otimes X) C_N$                                       |

**Tabela 2.2:** Tabela com estados chaves de teleportação a serem usadas no esquema da Figura 2.4 e portas teleportadas.

### 2.3.2 Teleportação da função XOR de bit clássicos

O esquema da Figura 2.5 tira proveito do entrelaçamento de sistemas quânticos e executa a teleportação da função XOR entre bits clássicos, tendo potencial aplicação em protocolos de distribuição quântica de chaves, correção de erro, controle de acesso a canal, assinatura de contratos, dentre outros (SOUSA; SILVA; RAMOS, 2006).

No esquema, três entidades compartilham o estado maximamente entrelaçado de 3 qubits



**Figura 2.5:** Teleportação da função XOR entre bits clássicos.  
Fonte: Elaborada pelo autor

dado por

$$|\psi\rangle = \frac{|000\rangle_{ABC} + |011\rangle_{ABC} + |110\rangle_{ABC} + |101\rangle_{ABC}}{2} \quad (2.4)$$

em que  $\rho_{A,B,C}$  são as partes individuais do estado total  $|\psi\rangle$ .  $K$  e  $R$  são os bits clássicos pertencentes à Alice e Bob, respectivamente, cuja função XOR entre eles será teleportada. A transformação  $U$  no circuito é tal que

$$U|0K\rangle = \frac{(|0K\rangle + |1\bar{K}\rangle)}{\sqrt{2}} \quad (2.5)$$

$$U|1K\rangle = \frac{(|0\bar{K}\rangle - |1K\rangle)}{\sqrt{2}} \quad (2.6)$$

em que gera o seguinte estado na saída do circuito antes da medição ( $M_1, M_2, M_3$ ):

$$|\psi_{out}\rangle = \frac{1}{2}(|++\rangle_{AB}|KR\rangle_{DE}|0\rangle_C + |+-\rangle_{AB}|K\bar{R}\rangle_{DE}|1\rangle_C) + \frac{1}{2}(|--\rangle_{AB}|\bar{K}\bar{R}\rangle_{DE}|0\rangle_C + |-+\rangle_{AB}|\bar{K}R\rangle_{DE}|1\rangle_C) \quad (2.7)$$

Após realizar a medição nos qubits  $DEC$ , o resultado 110, 101, 000 ou 011 é obtido se  $K = R$ . Se o resultado 100, 111, 010 ou 001 é obtido, então  $K \neq R$ . Portanto, para que a função XOR de 2 bits de Alice e Bob seja teleportada para Charlie, cada um envia o resultado de sua medição para Charlie. Após Charlie realizar sua medição e de posse dos outros dois bits enviados, ele saberá se os bits são iguais ou diferentes.

## 2.4 Conclusão

Neste capítulo foi realizada uma breve revisão sobre teleportação de estados quânticos e de que como esse princípio pode ser estendido para teleportação de portas quânticas de 2 qubits e teleportação da função XOR de bits clássicos. O circuito de teleportação da CNOT pode ser usada para teleportar outras portas, sendo necessário a preparação de outros estados chaves para tal fim.

# GEOMETRIA DE ESTADOS E MODELAGEM DE ERRO

## 3.1 Introdução

Neste capítulo são abordadas as geometrias utilizadas para representar estados e são deduzidas as expressões para obtenção dos valores médios de funções de 1 e 2 qubits. Em seguida, é descrita a modelagem de erro que foi utilizada como base das simulações do capítulo 4.

## 3.2 Geometria de 1 qubit

Geralmente usa-se a esfera de Bloch como representação geométrica para estados de um qubit. Segundo essa geometria, um qubit pode ser definido pela seguinte expressão (NIELSEN; CHUANG, 2010):

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i(\varphi)}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle \quad (3.1)$$

com  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Esses intervalos de  $\theta$  e  $\varphi$  e o fator de divisão 2 para  $\theta$  na Equação (3.1) determinam uma correspondência única entre um qubit e um ponto na esfera de Bloch.

O vetor de Bloch, que representa um ponto na referida esfera, tem as seguintes coordenadas:

$$\vec{r} = (x, y, z) \quad (3.2)$$

$$x = \sin\theta \cos\varphi \quad (3.3)$$

$$y = \sin\theta \sin\varphi \quad (3.4)$$

$$z = \cos\theta. \quad (3.5)$$

Essas 3 coordenadas reais definem uma esfera  $S^2$  unitária, conforme a seguinte relação:

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}. \quad (3.6)$$

A matriz densidade do estado  $\psi$  pode ser escrita em função do vetor de Bloch (OZOLS, 2007):

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) \quad (3.7)$$

em que  $\vec{\sigma}$  é um vetor com as três matrizes de Pauli:

$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z). \quad (3.8)$$

O estado  $|\psi\rangle$ , sem desconsiderar o fator de fase global, é definido por:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (3.9)$$

$$\alpha = e^{i(\varphi_1)} \cos(\theta) \quad (3.10)$$

$$\beta = e^{i(\varphi_2)} \sin(\theta) \quad (3.11)$$

em que  $\alpha$  e  $\beta$  são números complexos, cuja soma dos quadrados dos módulos é 1. Mas, segundo (BENGTTSSON; ZYCZKOWSKI, 2007), um espaço vetorial  $C^2$  é também um espaço vetorial em  $R^4$ , do qual podemos introduzir as coordenadas complexas *embutidas*, tal como na expressão abaixo:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + ix_2 \\ x_3 + ix_4 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Devido à condição de normalização,  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ , temos:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \quad (3.13)$$

A expressão 3.13 representa a equação da hiperesfera  $S^3$  (CONNELLAN, 2014). Logo, temos duas definições equivalentes para  $S^3$ :

$$S^3 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\} \quad (3.14)$$

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\} \quad (3.15)$$

As coordenadas  $x_n$ , de um ponto qualquer na hiperesfera  $S^3$ , podem ser escritas como

funções de 3 ângulos reais:  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$ . Assim, temos:

$$\begin{aligned}x_1 &= \cos \theta_1 \\x_2 &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\x_3 &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\x_4 &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Substituindo 3.16 em 3.12, as amplitudes de probabilidade podem reescritas da seguinte forma:

$$\alpha = x_1 + ix_2 = \cos \theta_1 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 \tag{3.17}$$

$$\beta = x_3 + ix_4 = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + i \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3. \tag{3.18}$$

Vamos verificar se essa parametrização respeita a restrição de normalização do estado  $|\psi\rangle$ .

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 \\ x_3 + ix_4 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \begin{pmatrix} x_1 - ix_2 & x_3 - ix_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 \\ x_3 + ix_4 \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2. \tag{3.21}$$

Como  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$  são as coordenadas da hipersfera  $S^3$  unitária, o lado direito da Equação (3.21) é igual à unidade. Logo:

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \tag{3.22}$$

O que confirma a condição de normalização de  $\psi$ . Essa parametrização de 1 qubit, considerando o fator de fase global, foi feita para fins didáticos e será usada como base para a geometria e parametrização do caso de 2 qubits.

### 3.2.1 Projeções Estereográficas

Consideremos a seguinte parametrização para um vetor de estado de 1 qubit:

$$|\psi\rangle = e^{i\varphi_1} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i(-\varphi_1)} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle. \tag{3.23}$$

Dois vetores de estado que estão relacionados por um fator de fase global são equivalentes.

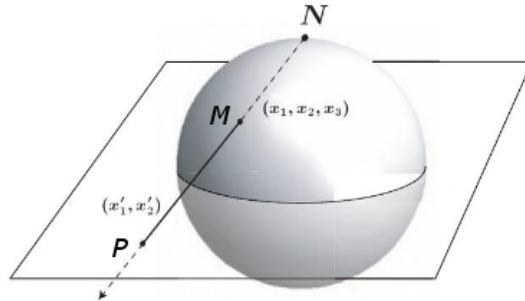
Logo  $|\psi\rangle$ , da Equação (3.23), é equivalente a  $e^{i\varphi_2}|\psi\rangle$ . Reescrevendo o vetor de estado:

$$|\psi\rangle = e^{i(\varphi_2+\varphi_1)}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i(\varphi_2-\varphi_1)}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle. \quad (3.24)$$

A expressão 3.24 é uma forma de parametrizar um estado de 1 qubit, considerando como geometria uma hiperesfera  $S^3$ . A visualização dessa hiperesfera, no entanto, não é tão simples como no caso da esfera de Bloch. Por outro lado, um vetor na esfera de Bloch representa o estado  $|\psi\rangle$  a menos de uma fase global. Essas limitações de visualização podem ser contornadas a partir do uso de projeções estereográficas, cuja definição pode ser vista a seguir (APELIAN; SURACE, 2009):

**Definição 1.** *Seja  $S^2$  a esfera unitária  $\mathbb{R}^3$ ,  $x_1, x_2$  e  $x_3$  as coordenadas cartesianas nesse espaço, com origem no centro da esfera. Seja também  $N = (0,0,1)$  o "polo norte" da esfera e  $\Pi$  o plano que intercepta  $S^2$  ao longo do equador. Dado um ponto  $M \in S^2$ , diferente de  $N$ , sua projeção estereográfica  $P$  é obtida traçando uma reta que passa pelos pontos  $N, M$  e intercepta o plano  $\Pi$  no ponto  $P$ .*

Na Figura 3.1, o ponto  $(x'_1, x'_2)$  representa a projeção estereográfica de um ponto  $(x_1, x_2, x_3)$ .



**Figura 3.1:** Projeção estereográfica de um ponto de uma esfera  $S^2$ .

Fonte: Adaptado de (APELIAN; SURACE, 2009)

As coordenadas  $x'_1$  e  $x'_2$  podem ser calculadas trivialmente usando-se congruência de triângulos:

$$\frac{x'_1}{x_1} = \frac{1}{1-x_3} \Rightarrow x'_1 = \frac{x_1}{1-x_3} \quad (3.25)$$

$$\frac{x'_2}{x_2} = \frac{1}{1-x_3} \Rightarrow x'_2 = \frac{x_2}{1-x_3}. \quad (3.26)$$

O cálculo dessas coordenadas podem ser generalizados para uma hiperesfera  $S^n$ , considerando o ponto  $N = (0,0,0,0,\dots,1)$  como "polo norte":

$$P = (x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}) = \left( \frac{x_1}{1-x_n}, \frac{x_2}{1-x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{1-x_n} \right) \quad (3.27)$$

No caso específico de  $S^3$ :

$$P = (x'_1, x'_2, x'_3) = \left( \frac{x_1}{1-x_4}, \frac{x_2}{1-x_4}, \frac{x_3}{1-x_4} \right). \quad (3.28)$$

Conforme a Equação (3.12), essas coordenadas se relacionam com as amplitudes de probabilidade assim:

$$\alpha = x_1 + ix_2 \quad (3.29)$$

$$\beta = x_3 + ix_4. \quad (3.30)$$

Ou, equivalentemente:

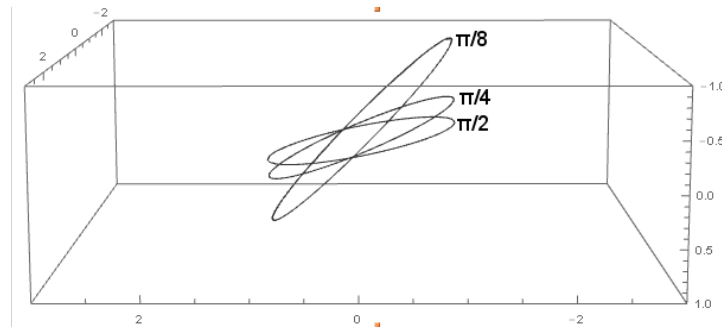
$$x_1 = \text{Re}(\alpha) \quad (3.31)$$

$$x_2 = \text{Im}(\alpha) \quad (3.32)$$

$$x_3 = \text{Re}(\beta) \quad (3.33)$$

$$x_4 = \text{Im}(\beta). \quad (3.34)$$

Tomando as amplitudes de probabilidade da Equação (3.24), e fixando os ângulos  $\theta$  e  $\varphi_1$ , pode-se visualizar a projeção estereográfica de um estado qualquer de um qubit, considerando sua fase global. Como exemplo, na Figura 3.2 o ângulo  $\varphi_1$  foi fixado em  $\pi/4$ , enquanto foram considerados 3 valores para  $\theta$ :  $\pi/2$ ,  $\pi/4$  e  $\pi/8$ .



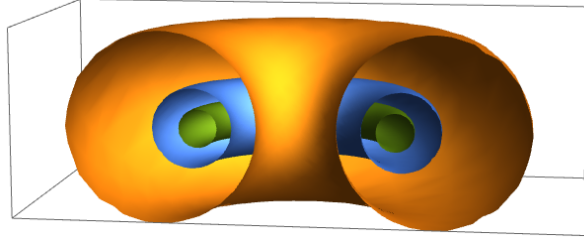
**Figura 3.2:** Projeção estereográfica da fase global para 3 qubits distintos.

Fonte: Elaborada pelo autor

Para os mesmos valores de  $\varphi_1$  utilizados na Figura 3.2, mas variando  $\theta$  de 0 a  $2\pi$ , obtém-se 3 *tori*, que podem ser conferidos na Figura 3.3.

### 3.2.2 Cálculo do valor médio de uma função de 1 qubit

Afim de calcular o valor médio de uma função aplicada a um estado quântico, pode-se aplicar essa função a vários estados  $|\psi\rangle$  e dividir o resultado pela quantidade de estados



**Figura 3.3:** Projeção estereográfica da fase global para 3 qubits distintos.

Fonte: Elaborada pelo autor

considerados. Se formos considerar todos os estados  $|\psi\rangle$  possíveis, podemos integrar essa função em toda a Figura geométrica considerada para o qubit e, a seguir, dividir o resultado pela área da Figura geométrica.

Consideremos a esfera de Bloch como geometria. Cada ponto da esfera de Bloch pode ser representado por um vetor cujas coordenadas são definidas nas equações (3.3), (3.4) e (3.5). Como cada ponto da esfera corresponde a um qubit, a função  $F$  pode ser escrita em função de  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Portanto, na Equação (3.35),  $F_T$  é o resultado da integral de uma função  $F$ , de um qubit, sobre todos os pontos da superfície da esfera.

$$F_T = \int F(x,y,z) dx dy dz. \quad (3.35)$$

Como estamos trabalhando com coordenadas esféricas, é interessante fazermos uma mudança de variáveis. Para esse fim, usaremos o conceito de *matriz jacobiana* (KAPLAN, 2002). No caso de querermos integrar em  $r$ ,  $\theta$  e  $\varphi$ , em vez de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , essa matriz assume a seguinte forma:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Para mudarmos as variáveis na integral 3.35, calculamos o determinante de  $J$ :

$$D_J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta. \quad (3.37)$$

Substituindo as variáveis:

$$dxdydz = D_J dr d\theta d\varphi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (3.38)$$

Mas a esfera de Bloch é unitária e o cálculo é feito sobre a superfície, logo  $r = 1$ . Substituindo 3.38 em 3.35:

$$F_T = \int F(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (3.39)$$

A área da esfera unitária  $S^2$ , por sua vez, é igual a  $4\pi$ . Logo, o valor médio da função  $F$ , para todos os estados de 1 qubit possíveis, é dado por:

$$F_m = \frac{F_T}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \int F(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (3.40)$$

Por outro lado, se considerarmos como geometria uma hiperesfera  $S^3$ , definida em 3.14, e as coordenadas hipersféricas definidas em 3.16, o determinante jacobiano será dado por:

$$D_J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial x_4}{\partial r} & \frac{\partial x_4}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_4}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_4}{\partial \theta_3} \end{vmatrix} = r^3 \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2. \quad (3.41)$$

Essa hiperesfera  $S^3$  também é unitária e sua área é dada por  $2\pi^2$  (KAPLAN, 2002). Logo, a expressão do valor médio, para essa geometria, é dada por:

$$F_m = \frac{1}{2\pi^2} \int F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3. \quad (3.42)$$

### 3.3 Geometria de 2 qubits

No caso de um estado  $|\psi\rangle$  de 2 qubits, entrelaçados ou não, ele é escrito na forma:

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle \quad (3.43)$$

com  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$ .

Consideremos a equação generalizada de uma hiperesfera (CONNELLAN, 2014):

$$S^{2n+1} = \{\vec{z} \in C^{n+1} : ||\vec{z}|| = 1\} \quad (3.44)$$

em que  $n$  é inteiro positivo. Como temos 4 amplitudes complexas, o valor de  $n$  é definido por:

$$n + 1 = 4 \rightarrow n = 3 \rightarrow 2n + 1 = 7. \quad (3.45)$$

Temos, portanto, uma hiperesfera  $S^7$ . As coordenadas hiperesféricas são definidas, então, por 7 ângulos( $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$  e  $\theta_7$ ) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \theta_1 \\ x_2 &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ x_3 &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ x_4 &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_4 \\ x_5 &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \cos \theta_5 \\ x_6 &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \sin \theta_5 \cos \theta_6 \\ x_7 &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \sin \theta_5 \sin \theta_6 \cos \theta_7 \\ x_8 &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \sin \theta_5 \sin \theta_6 \sin \theta_7 \end{aligned} \quad (3.46)$$

em que  $\theta_k \in [0, \pi]$ , para  $k$  variando de 1 a 6,  $\theta_7 \in [0, 2\pi]$ .

Usando o mesmo raciocínio da seção 3.2, vamos escrever  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  em função das coordenadas hiperesféricas:

$$\begin{aligned} \alpha &= x_1 + ix_2 \\ \beta &= x_3 + ix_4 \\ \gamma &= x_5 + ix_6 \\ \delta &= x_7 + ix_8. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Verificando a condição de normalização:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 \\ x_3 + ix_4 \\ x_5 + ix_6 \\ x_7 + ix_8 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \begin{pmatrix} x_1 - ix_2 & x_3 - ix_4 & x_5 - ix_6 & x_7 - ix_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 \\ x_3 + ix_4 \\ x_5 + ix_6 \\ x_7 + ix_8 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 = 1 \quad (3.50)$$

### 3.3.1 Cálculo do valor médio de uma função de 2 qubits

Assim como fizemos na seção 3.2.2, vamos calcular o determinante jacobiano para as coordenadas hipersféricas:

$$D_J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_4} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_5} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_6} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_7} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_4} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_5} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_6} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_7} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_4} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_5} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_6} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_7} \\ \frac{\partial x_4}{\partial r} & \frac{\partial x_4}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_4}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_4}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_4}{\partial \theta_4} & \frac{\partial x_4}{\partial \theta_5} & \frac{\partial x_4}{\partial \theta_6} & \frac{\partial x_4}{\partial \theta_7} \\ \frac{\partial x_5}{\partial r} & \frac{\partial x_5}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_5}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_5}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_5}{\partial \theta_4} & \frac{\partial x_5}{\partial \theta_5} & \frac{\partial x_5}{\partial \theta_6} & \frac{\partial x_5}{\partial \theta_7} \\ \frac{\partial x_6}{\partial r} & \frac{\partial x_6}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_6}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_6}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_6}{\partial \theta_4} & \frac{\partial x_6}{\partial \theta_5} & \frac{\partial x_6}{\partial \theta_6} & \frac{\partial x_6}{\partial \theta_7} \\ \frac{\partial x_7}{\partial r} & \frac{\partial x_7}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_7}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_7}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_7}{\partial \theta_4} & \frac{\partial x_7}{\partial \theta_5} & \frac{\partial x_7}{\partial \theta_6} & \frac{\partial x_7}{\partial \theta_7} \\ \frac{\partial x_8}{\partial r} & \frac{\partial x_8}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_8}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_8}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_8}{\partial \theta_4} & \frac{\partial x_8}{\partial \theta_5} & \frac{\partial x_8}{\partial \theta_6} & \frac{\partial x_8}{\partial \theta_7} \end{vmatrix} \quad (3.51)$$

$$D_J = r^7 \sin^6 \theta_1 \sin^5 \theta_2 \sin^4 \theta_3 \sin^3 \theta_4 \sin^2 \theta_5 \sin \theta_6. \quad (3.52)$$

A expressão 3.53 representa a integral de uma função de 2 qubits sobre a área de uma hipersfera unitária  $S^7$ .

$$F_T = \int F(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7) D_J d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 d\theta_5 d\theta_6 d\theta_7. \quad (3.53)$$

Para calcular o valor médio de  $F(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7)$ , dividimos a expressão 3.53 pela área da hipersfera  $S^7$ , que é dada por  $\pi^4/3$ . Logo, temos:

$$F_m = \frac{3}{\pi^4} F_T = \frac{3}{\pi^4} \int F(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7) D_J d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 d\theta_5 d\theta_6 d\theta_7 \quad (3.54)$$

### 3.3.2 Cálculo do valor médio de uma função de 2 qubits separáveis

O valor médio de uma função de 2 qubits separáveis pode ser calculado considerando como geometria duas esferas de Bloch:

$$F_m = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2) \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) d\theta_1 d\varphi_1 d\theta_2 d\varphi_2 \quad (3.55)$$

### 3.4 Decomposição de Portas Quânticas

#### 3.4.1 Decomposição ZYZ para Portas de 1 Qubit

Segundo (NIELSEN; CHUANG, 2010), os *operadores de rotação* são definidos em função das matrizes de Pauli da seguinte forma:

$$R_x(\theta) = e^{-i\theta X/2} = \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} X = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

$$R_y(\theta) = e^{-i\theta Y/2} = \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} Y = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2} = \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} Z = \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Pelo teorema da decomposição ZYZ (NIELSEN; CHUANG, 2010), qualquer porta unitária de 1 qubit pode ser decomposta em rotações  $R_z$  e  $R_y$ , da seguinte forma:

$$U = e^{i\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta) \quad (3.59)$$

em que  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  são reais. Como a fase global é irrelevante nas transformações, podemos dizer então que cada  $U \in SU(2)$  pode ser definido com apenas 3 parâmetros reais. Substituindo as equações das rotações em 3.59, obtemos:

$$U = \begin{bmatrix} e^{i(\alpha-\beta/2-\delta/2)} \cos \frac{\gamma}{2} & -e^{i(\alpha-\beta/2+\delta/2)} \sin \frac{\gamma}{2} \\ e^{i(\alpha+\beta/2-\delta/2)} \sin \frac{\gamma}{2} & e^{i(\alpha+\beta/2+\delta/2)} \cos \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

#### 3.4.2 Implementação física de uma porta de 1 qubit

Baseado na decomposição ZYZ, em (DJORDJEVIC, 2012) podemos conferir uma implementação física para uma porta de 1 qubit usando 2 tipos de dispositivos ópticos: *phase shifters* e *beam splitters*. Um *phase shifter* causa um deslocamento de fase, executando uma operação conforme a seguinte equação:

$$|\psi_{out}\rangle = \begin{bmatrix} e^{j\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} |\psi_{in}\rangle \quad (3.61)$$

Já um *beam splitter* possui duas entradas e duas saídas, aplicando uma transformação de

acordo com a seguinte equação:

$$|\psi_{out}\rangle = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} |\psi_{in}\rangle \quad (3.62)$$

Consideremos agora 2 *phase shifters* e um *beam splitter* com os seguintes ângulos:

- *Phase Shifter 1*:  $\phi = -\beta$
- *Beam splitter*:  $\theta = \gamma/2$
- *Phase Shifter 2*:  $\phi = \alpha - \delta/2 - (\alpha + \delta/2)$

Concatenando esses 3 componentes, obtemos a seguinte transformação:

$$U = \begin{bmatrix} e^{-j\beta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\gamma/2) & -\sin(\gamma/2) \\ \sin(\gamma/2) & \cos(\gamma/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j[\alpha - \delta/2 - (\alpha + \delta/2)]} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$U = e^{-j(\alpha + \beta/2 + \delta/2)} \begin{bmatrix} e^{j(\alpha - \beta/2 - \delta/2)} \cos(\gamma/2) & -e^{j(\alpha - \beta/2 + \delta/2)} \sin(\gamma/2) \\ e^{j(\alpha + \beta/2 - \delta/2)} \sin(\gamma/2) & e^{j(\alpha + \beta/2 + \delta/2)} \cos(\gamma/2) \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Mas a matriz da expressão acima corresponde à da decomposição ZYZ, conforme podemos ver em 3.60. Logo:

$$U = e^{-j(\alpha + \beta/2 + \delta/2)} e^{j\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta) \quad (3.65)$$

A menos de uma fase global, a Equação (3.65) corresponde à decomposição ZYZ. Portanto, qualquer porta de 1 qubit pode ser implementada fisicamente usando 2 *phase shifters* e 1 *beam splitter*.

### 3.4.3 Portas quânticas de 1 qubit com erro paramétrico

Visto que é bem difícil isolar um sistema quântico completamente, a implementação física das portas quânticas está sujeita aos mais diversos erros decorrentes de ruídos presentes do ambiente ou falhas no processo de fabricação das portas quânticas. Tais erros podem ser interpretados como desvios nos ângulos de rotação das portas quânticas.

Consideremos, como exemplo, a implementação física descrita em 3.4.2. Um *phase shifter* usado nela provoca um desvio de fase  $\phi$  tal que:

$$\phi = \frac{(n - n_0)L}{c} \quad (3.66)$$

em que  $c$  é a velocidade da luz no vácuo,  $n$  é a refração da fibra óptica,  $n_0$  é a refração do vácuo e  $L$  o comprimento da fibra. Um simples aumento da temperatura, por exemplo, pode provocar a dilatação da fibra e/ou a alteração da sua refração. Tais alterações físicas alteram o ângulo  $\phi$  conforme a Equação (3.66). Portanto, as rotações  $R_z$  e  $R_y$  serão afetadas.

A equação da decomposição ZYZ, considerando variações nos ângulos de rotações, pode então ser escrita como:

$$U_e = e^{j\alpha} R_z(\beta + a\epsilon_{Z1}) R_y(\gamma + b\epsilon_Y) R_z(\delta + c\epsilon_{Z2}) \quad (3.67)$$

$$a, b, c \in \{0, 1\} \quad (3.68)$$

em que os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  indicam se há presença de erro na respectiva rotação.

### 3.4.4 Decomposição KAK para portas de 2 qubits

A decomposição KAK para portas  $U \in SU(4)$  é definida como (TUCCI, 2005):

$$U = (U_1 \otimes U_2) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{\Sigma})} (U_3 \otimes U_4) \quad (3.69)$$

em que  $U_1, U_2, U_3, U_4 \in SU(2)$  e  $\vec{k} \in R^3$ . Já o vetor  $\vec{\Sigma}$  é definido como:

$$\vec{\Sigma} = (\sigma_{XX}, \sigma_{YY}, \sigma_{ZZ}) \quad (3.70)$$

$$\sigma_{XX} = \sigma_X \otimes \sigma_X \quad (3.71)$$

$$\sigma_{YY} = \sigma_Y \otimes \sigma_Y \quad (3.72)$$

$$\sigma_{ZZ} = \sigma_Z \otimes \sigma_Z \quad (3.73)$$

O fator  $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{\Sigma})}$  é a parte não local de  $U$ . Chamando esse fator de  $U_{NL}$  e definindo  $\vec{k} = (\theta_X, \theta_Y, \theta_Z)$ , temos:

$$U_{NL} = e^{\vec{k} \cdot \vec{\Sigma}} = e^{(\theta_X, \theta_Y, \theta_Z) \cdot (\sigma_{XX}, \sigma_{YY}, \sigma_{ZZ})} \quad (3.74)$$

$$U_{NL} = e^{i(\theta_X \sigma_{XX} + \theta_Y \sigma_{YY} + \theta_Z \sigma_{ZZ})} \quad (3.75)$$

A parte não local de  $U$  possui, portanto, 3 parâmetros reais. Por outro lado, vimos na seção 3.4.1 que cada transformação  $U \in SU(2)$  precisa de também de 3 parâmetros reais. Logo, qualquer transformação  $U \in SU(4)$  precisa no total de 15 parâmetros reais, sendo 12 das transformações locais e 3 da parte não local. Essa é uma vantagem da decomposição KAK, pois reduz 16 parâmetros complexos de uma matriz 4x4 para apenas 15 parâmetros reais.

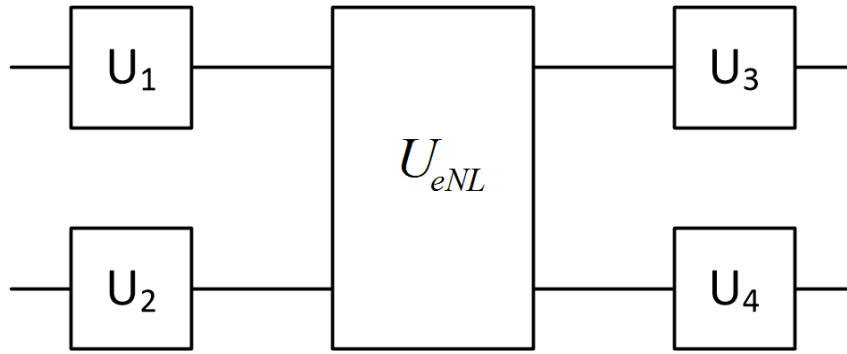
### 3.4.5 Portas quânticas de 2 qubits com erro

Assim como em 3.4.3 definimos 3 ângulos de erro para portas SU(2), nessa seção definiremos a modelagem do erro considerada nesse trabalho. Para o caso de SU(4), foi considerado apenas o erro na parte não local da transformação ( $U_{eNL}$  na Figura 3.4). Assim, analogamente à Equação (4.11), definiremos a parte não local da transformação SU(4) com erro da seguinte forma:

$$U_{eNL} = e^{i((\theta_X + a\varepsilon_X)\sigma_{XX} + (\theta_Y + b\varepsilon_Y)\sigma_{YY} + (\theta_Z + c\varepsilon_Z)\sigma_{ZZ})} \quad (3.76)$$

$$a, b, c \in \{0, 1\} \quad (3.77)$$

em que os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  indicam se há presença de erro na respectiva rotação.



**Figura 3.4:** Decomposição KAK com erro paramétrico na parte não local.

Fonte: Elaborada pelo autor

## 3.5 Conclusão

Neste capítulo foi apresentado como uma hipersfera  $S^7$  pode ser usada como geometria para representação de estados de 2 qubits. Essa geometria foi usada como base para a obtenção de uma expressão para obtenção do valor médio de uma função qualquer de 2 qubits. Foi apresentado também o modelagem de erro usada para obtenção dos resultados do capítulo 4. Essa modelagem se baseou nas decomposições ZYZ(para estados de qubit) e KAK(para estados de 2 qubits).

## RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES

### 4.1 Fidelidade

Medidas de distância ou de proximidade são usadas para estimar o quanto os resultados obtidos em um circuito sujeito a erros diferem daqueles que seriam obtidos em um circuito ideal, sem erros. Nesse trabalho foi adotada a *fidelidade* como medida de proximidade entre estados para estudar a influência de um erro paramétrico sobre transformações quânticas simples ou no teletransporte de estados e portas quânticas. A seguir temos a definição de fidelidade, que pode ser verificada em (WILDE, 2013):

**Definição 1.** *Dados dois estados,  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$ , a fidelidade entre eles é calculada por*

$$F(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = |\langle\psi|\phi\rangle|^2 \quad (4.1)$$

em que

$$0 \leq F(|\psi\rangle, |\phi\rangle) \leq 1. \quad (4.2)$$

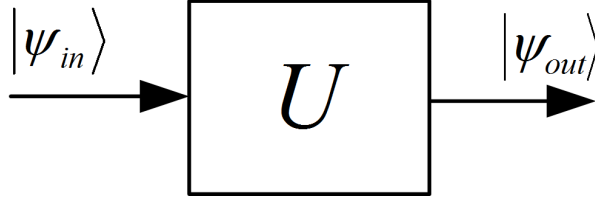
Com o auxílio do software Matlab, foi calculada a fidelidade média entre o estado de saída do circuito ideal, sem erro, e o estado de saída do circuito com erro. O cálculo da fidelidade média foi feito usando a Equação (3.40), para estados de 1 qubit, a Equação (3.55), para estados de 2 qubits separáveis, e a Equação (3.54), para o caso geral de 2 qubits.

Já nas análises numéricas, a fidelidade média foi calculada como a média simples entre as fidelidades correspondentes para cada estado de entrada gerado aleatoriamente pela biblioteca *Quantinf*(CUBITT, 2016):

$$F_m = \frac{\sum_{i=0}^n F(|\psi_i\rangle, |\phi_i\rangle)}{n+1}. \quad (4.3)$$

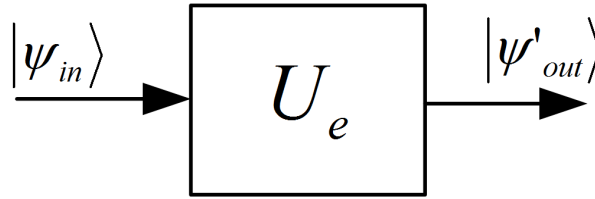
## 4.2 Erro paramétrico em uma transformação $SU(2)$

Na Figura 4.1 temos uma porta  $U \in SU(2)$  aplicada sobre um estado  $|\psi_{in}\rangle$ , de 1 qubit, tendo como resultado um estado  $|\psi_{out}\rangle = U|\psi_{in}\rangle$ .



**Figura 4.1:** Porta quântica de 1 qubit.  
Fonte: Elaborada pelo autor

Definiremos  $U_e$  como sendo a porta  $U$  com erro paramétrico(conforme visto na seção 3.4.3) e  $|\psi'_{out}\rangle = U_e|\psi_{in}\rangle$ (Figura 4.2).



**Figura 4.2:** Transformação  $SU(2)$  com erro paramétrico.  
Fonte: Elaborada pelo autor

Afim de verificar a influência do erro paramétrico sobre a porta  $U$ , calculamos a fidelidade,  $F$ , entre  $|\psi_{out}\rangle$  e  $|\psi'_{out}\rangle$  conforme a seguinte expressão:

$$F = \langle \psi_{out} | \psi'_{out} \rangle \langle \psi'_{out} | \psi_{out} \rangle. \quad (4.4)$$

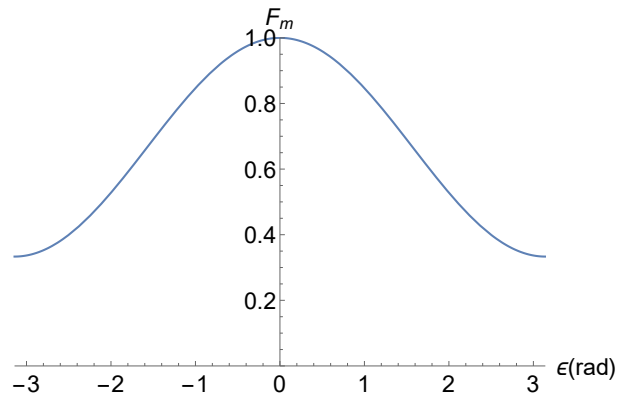
Considerando a decomposição ZYZ de  $U$ , inicialmente foram considerados erros em cada rotação separada e feita a análise simbólica para a fidelidade média em cada caso. A Equação (4.11) foi usada para modelar o erro na porta  $U$ , com:

$$(a,b,c) \in \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}. \quad (4.5)$$

Para as 3 combinações possíveis de  $(a,b,c)$ , o resultado obtido para a fidelidade média foi o mesmo:

$$F_m = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos(\varepsilon) \quad (4.6)$$

em que  $\varepsilon$  é o ângulo de erro considerado. A Figura 4.3 mostra o gráfico de  $F_m$  para qualquer rotação com erro  $\varepsilon$ .



**Figura 4.3:**  $F_m$  para  $SU(2)$  com erro em uma rotação.  
Fonte: Elaborada pelo autor

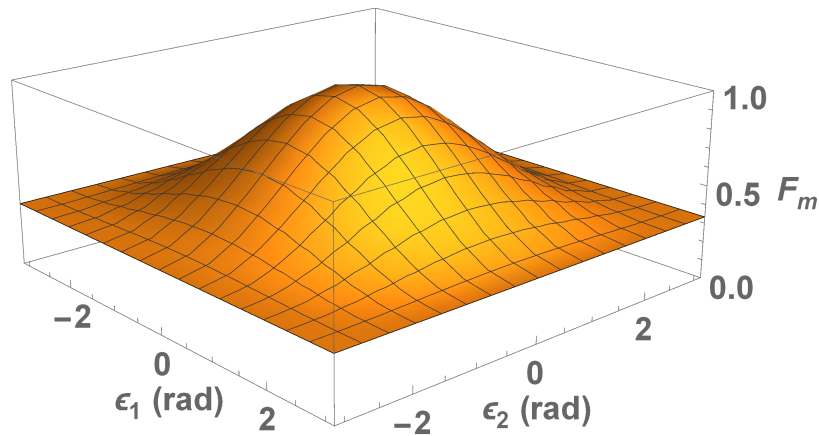
A seguir foram consideradas duas rotações com erro, considerando as 3 possibilidades de combinações entre elas:

$$(a,b,c) \in \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}. \quad (4.7)$$

Para as 3 combinações possíveis de  $(a,b,c)$ , o resultado obtido foi o mesmo:

$$F_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos(\epsilon_1) + \frac{1}{6} \cos(\epsilon_2) + \frac{1}{6} \cos(\epsilon_1) \cos(\epsilon_2) \quad (4.8)$$

em que  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  são os dois erros considerados. O gráfico a seguir mostra  $F_m$  para 2 rotações com erro:



**Figura 4.4:**  $F_m$  para  $SU(2)$  com erro em duas rotações.  
Fonte: Elaborada pelo autor

Finalmente foram considerados erros nas 3 rotações ao mesmo tempo. Fazendo  $(a,b,c) =$

(1,1,1), o resultado obtido foi:

$$F_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos(\varepsilon_{Z1}) \cos(\varepsilon_Y) + \frac{1}{6} \cos(\varepsilon_Y) \cos(\varepsilon_{Z2}) + \frac{1}{6} \cos(\varepsilon_{Z1}) \cos(\varepsilon_{Z2}) - \frac{1}{12} \sin(\varepsilon_{Z1}) \sin(\varepsilon_Y) \sin(\varepsilon_{Z2}) \quad (4.9)$$

### 4.3 Erro no teletransporte de estados de 1 qubit

Considere a decomposição ZYZ da porta Hadamard:

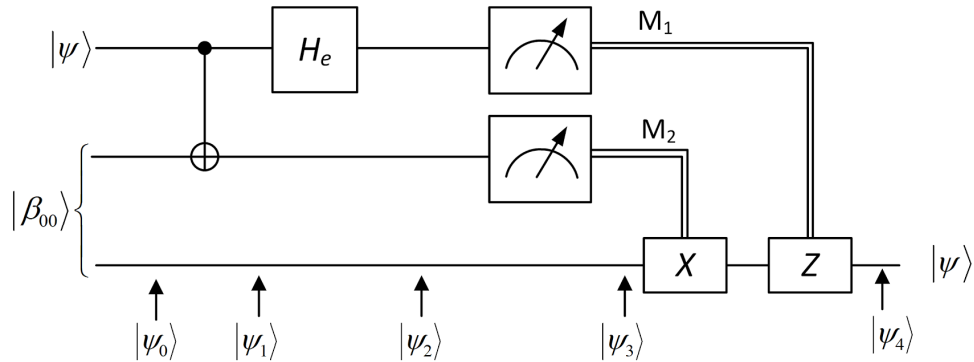
$$H = e^{i\pi/2} R_z(0) R_y(\pi/2) R_z(\pi). \quad (4.10)$$

Seja  $H_e$  a porta Hadamard com erro paramétrico. Segundo a Equação (4.11),  $H_e$  pode ser escrita como:

$$H_e = e^{i\pi/2} R_z(a\varepsilon_{Z1}) R_y(\pi/2 + b\varepsilon_Y) R_z(\pi + c\varepsilon_{Z2}). \quad (4.11)$$

Para o circuito de teletransporte de estados foram feitas análises considerando erros na porta Hadamard, conforme a Figura 4.5. Nesse caso a função fidelidade  $F$  foi definida comparando o estado original de entrada,  $|\psi\rangle$ , e o estado teleportado pelo circuito com erro,  $|\psi'\rangle$ :

$$F = \langle \psi | \psi' \rangle \langle \psi' | \psi \rangle. \quad (4.12)$$



**Figura 4.5:** Esquema para teletransportação de estados com erro na porta Hadamard.

Fonte: Elaborada pelo autor

A fidelidade média foi calculada via simulação simbólica para os seguintes casos:

- erro  $\varepsilon_{Z1}$ , na primeira rotação Z da porta Hadamard:

$$H_e = e^{i\pi/2} R_z(\varepsilon_{Z1}) R_y(\pi/2) R_z(\pi) \quad (4.13)$$

$$F_m = 1 \quad (4.14)$$

- erro  $\varepsilon_Y$ , na rotação Y da porta Hadamard:

$$H_e = e^{i\pi/2} R_z(0) R_y(\pi/2 + \varepsilon_Y) R_z(\pi) \quad (4.15)$$

$$F_m = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos(\varepsilon_Y) \quad (4.16)$$

- erro  $\varepsilon_{Z2}$ , na segunda rotação Z da porta Hadamard:

$$H_e = e^{i\pi/2} R_z(0) R_y(\pi/2) R_z(\pi + \varepsilon_{Z2}) \quad (4.17)$$

$$F_m = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos(\varepsilon_{Z2}) \quad (4.18)$$

Observa-se que, para erros na segunda e terceira rotação, as expressões da fidelidade média obtidas são idênticas àquelas descritas na seção 4.2 e, portanto, o gráfico da Figura 4.3 também vale pra esse caso. No entanto, um erro na primeira rotação não exerce nenhuma influência no teletransporte de estados.

Como foi observado que um erro na primeira rotação não influencia no teletransporte, foi necessário apenas uma simulação considerando erros em mais de uma rotação:

- erro na rotação Y e na segunda rotação Z da porta Hadamard:

$$H_e = e^{i\pi/2} R_z(0) R_y(\pi/2 + \varepsilon_Y) R_z(\pi + \varepsilon_{Z2}) \quad (4.19)$$

$$F_m = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos(\varepsilon_Y) \cos(\varepsilon_{Z2}) \quad (4.20)$$

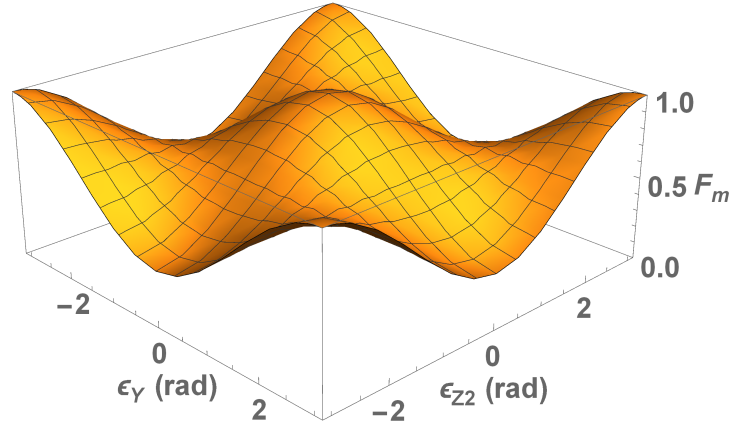
A Figura 4.6 mostra o gráfico para a Equação (4.20):

### 4.3.1 Influência do erro da primeira rotação da porta Hadamard

Na seção anterior, vimos que um erro na primeira rotação Z da porta Hadamard não altera a fidelidade média do estado teletransportado. O objetivo dessa seção é demonstrar não a fidelidade média, mas a "imunidade", em relação a essa rotação, do circuito para o teletransporte de um estado qualquer.

A porta Hadamard com erro  $\varepsilon$  na primeira rotação tem sua decomposição ZYZ conforme a Equação (4.21):

$$H_e = e^{i\pi/2} R_z(\varepsilon) R_y(\pi/2) R_z(\pi) = R_z(\varepsilon) e^{i\pi/2} R_y(\pi/2) R_z(\pi). \quad (4.21)$$



**Figura 4.6:**  $F_m$  para a teleportação de estados, com erros nas duas últimas rotações da porta Hadamard.  
Fonte: Elaborada pelo autor

Como a porta Hadamard sem erro possui ângulo zero na primeira rotação Z, podemos reescrevê-la:

$$H = e^{i\pi/2} R_y(\pi/2) R_z(\pi). \quad (4.22)$$

Substituindo 4.22 em 4.21:

$$H_e = R_z(\varepsilon) H. \quad (4.23)$$

No esquema de teleportação de estados, com a porta  $H$  substituída por  $H_e$ , tem-se a seguinte expressão para  $|\psi_2\rangle$ :

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha H_e |0\rangle (|00\rangle + |11\rangle) + \beta H_e (|1\rangle (|10\rangle + |01\rangle))] \quad (4.24)$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2} [\alpha R_z(|0\rangle + |1\rangle) (|00\rangle + |11\rangle) + \beta R_z(|0\rangle - |1\rangle) (|10\rangle + |01\rangle)] \quad (4.25)$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2} \left[ \alpha (e^{-i\varepsilon/2} |0\rangle + e^{i\varepsilon/2} |1\rangle) (|00\rangle + |11\rangle) + \beta (e^{-i\varepsilon/2} |0\rangle - e^{i\varepsilon/2} |1\rangle) (|10\rangle + |01\rangle) \right]. \quad (4.26)$$

Reorganizando os termos:

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle = & \frac{1}{2} \left[ |00\rangle (e^{-i\varepsilon/2} \alpha |0\rangle + e^{-i\varepsilon/2} \beta |1\rangle) \right. \\ & + \frac{1}{2} \left[ |01\rangle (e^{-i\varepsilon/2} \alpha |1\rangle + e^{-i\varepsilon/2} \beta |0\rangle) \right. \\ & + \frac{1}{2} \left[ |10\rangle (e^{i\varepsilon/2} \alpha |0\rangle - e^{i\varepsilon/2} \beta |1\rangle) \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \left[ |11\rangle (e^{i\varepsilon/2} \alpha |1\rangle - e^{i\varepsilon/2} \beta |0\rangle) \right] \right] \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned}
|\psi_2\rangle = & \frac{1}{2} \left[ |00\rangle e^{-i\varepsilon/2} (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \right] \\
& + \frac{1}{2} \left[ |01\rangle e^{-i\varepsilon/2} (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) \right] \\
& + \frac{1}{2} \left[ |10\rangle e^{i\varepsilon/2} (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) \right] \\
& + \frac{1}{2} \left[ |11\rangle e^{i\varepsilon/2} (\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) \right].
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Dependendo do resultado das medições dos 2 primeiros qubits, as transformações  $X$  ou  $Z$  são aplicadas para corrigir o estado teleportado.

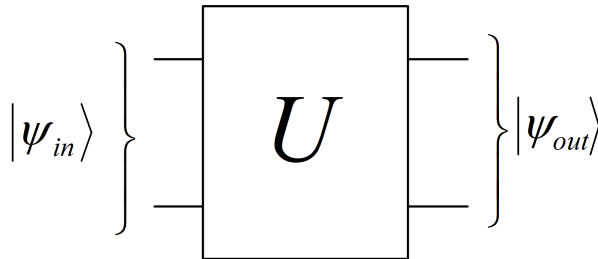
$$\begin{aligned}
00 & \mapsto |\psi_{out}\rangle = e^{-i\varepsilon/2} (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \equiv \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \psi \\
01 & \mapsto |\psi_{out}\rangle = X(e^{-i\varepsilon/2} (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)) = e^{-i\varepsilon/2} (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \equiv \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \psi \\
10 & \mapsto |\psi_{out}\rangle = Z(e^{i\varepsilon/2} (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)) = e^{i\varepsilon/2} (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \equiv \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \psi \\
11 & \mapsto |\psi_{out}\rangle = ZX(e^{i\varepsilon/2} (\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)) = e^{i\varepsilon/2} (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \equiv \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \psi.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Das expressões 4.29 vê-se que o estado é teleportado acrescido de uma fase global. Mas  $|\psi\rangle \equiv e^{i\varepsilon/2} |\psi\rangle \equiv e^{-i\varepsilon/2} |\psi\rangle$ , logo pode-se concluir que um erro na primeira rotação da porta Hadamard não afeta a teleportação de estados. Em outras palavras, a porta  $H$ , no esquema de teleportação, pode ser substituída pela transformação  $H_\beta$  da Equação (4.30), para qualquer valor real de  $\beta$ .

$$H_\beta = R_z(\beta)R_y(\pi/2)R_z(\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-i\beta/2} & e^{-i\beta/2} \\ e^{i\beta/2} & -e^{i\beta/2} \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

## 4.4 Erro no teletransporte de portas quânticas de 2 qubits

Na Figura 4.7 temos uma porta  $U \in SU(4)$  aplicada sobre um estado  $|\psi_{in}\rangle$ , de 2 qubits, tendo como resultado um estado  $|\psi_{out}\rangle = U|\psi_{in}\rangle$ .



**Figura 4.7:** Porta quântica de 2 qubits.

Fonte: Elaborada pelo autor

A decomposição KAK de uma porta  $U$  de 2 qubits é dada por:

$$U = (U_1 \otimes U_2)U_{NL}(U_3 \otimes U_4) \quad (4.31)$$

em que  $U_1, U_2, U_3, U_4 \in SU(2)$  e  $U_{NL}$  é a parte não local de  $U$ .

Fazendo  $U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = I$  e o ângulo das componentes não locais como sendo  $\pi/4$ , temos:

$$U = (I \otimes I)U_{NL}(I \otimes I) \quad (4.32)$$

$$U = U_{NL} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}\sigma_{XX} + \frac{\pi}{4}\sigma_{YY} + \frac{\pi}{4}\sigma_{ZZ}\right)} \quad (4.33)$$

Chamaremos de  $U_e$  essa porta  $U$  com erro paramétrico. A partir da Equação(3.76), temos:

$$U_e = e^{i\left(\left(\frac{\pi}{4} + a\epsilon_X\right)\sigma_{XX} + \left(\frac{\pi}{4} + b\epsilon_Y\right)\sigma_{YY} + \left(\frac{\pi}{4} + c\epsilon_Z\right)\sigma_{ZZ}\right)} \quad (4.34)$$

em que  $a, b, c \in \{0, 1\}$ , indicando se há erro ou não na respectiva componente. A teleportação de  $U_e$  pode ser conferida na Figura 4.8. Nessa figura,  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são dados por:

$$\rho_1 = Tr_2(\rho) \quad (4.35)$$

$$\rho_2 = Tr_1(\rho) \quad (4.36)$$

em que  $\rho = |\psi_{in}\rangle\langle\psi_{in}|$ . Nessa seção, a fidelidade foi calculada entre o estado de saída  $\rho_{out}$  do circuito de teletransporte da porta  $U_e$  e o resultado da operação  $U$  diretamente sobre o estado  $|\psi_{in}\rangle$ (Figura 4.7). Logo, a fidelidade  $F$  é dada por:

$$F = \langle\psi_{in}|U^\dagger\rho_{out}U|\psi_{in}\rangle \quad (4.37)$$

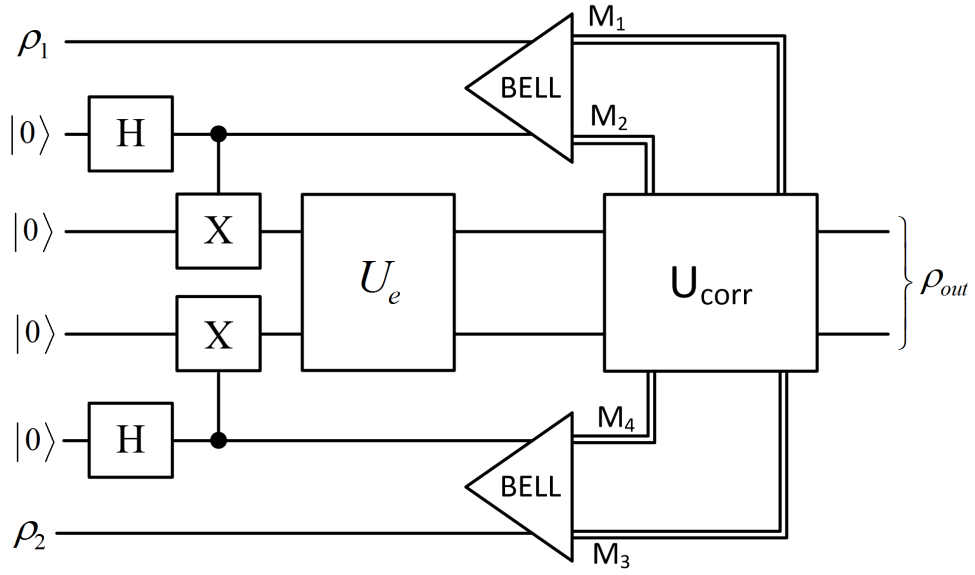
Para o cálculo da fidelidade média, foram consideradas duas possibilidades:

- caso separável:  $|\psi_{in}\rangle$  é um produto tensorial de dois estados de 1 qubit.
- caso geral:  $|\psi_{in}\rangle$  é um estado geral de 2 qubits, entrelaçados ou não.

#### 4.4.1 Erro na transformação não local - Estados Separáveis na Entrada

Nesse caso, o estado de entrada pode ser escrito como um produto tensorial de dois estados,  $|\psi_A\rangle$  e  $|\psi_B\rangle$

$$|\psi_{AB}\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle. \quad (4.38)$$

**Figura 4.8:** Esquema de teleportação da porta  $U_e$ .

Fonte: Elaborada pelo autor

Considerando esferas de Bloch para cada estado do produto acima e  $F$  como a função fidelidade, foi usada a Equação (3.55) para calcular a fidelidade média. Inicialmente foram considerados erros em cada componente separado da decomposição KAK da transformação não local. Usando a Equação (3.76) pra modelar o erro, temos então:

$$(a,b,c) \in \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}. \quad (4.39)$$

Para apenas um ângulo qualquer com erro, foi obtido o seguinte resultado para a fidelidade média:

$$F_m = 1 - \frac{8}{9} \sin^2(\epsilon) \quad (4.40)$$

A Figura 4.9 mostra o gráfico da fidelidade média em função do erro em uma das componentes da decomposição KAK.

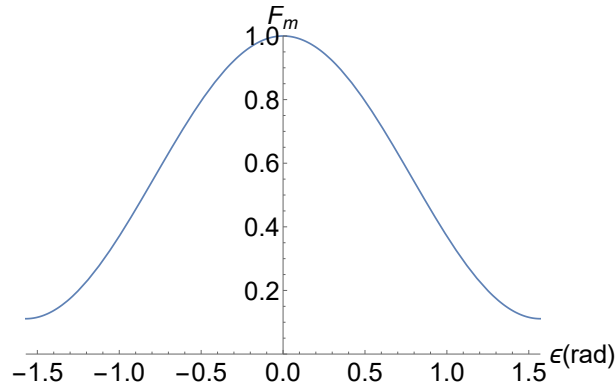
A seguir foram considerados erros em duas componentes da decomposição KAK:

$$(a,b,c) \in \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}. \quad (4.41)$$

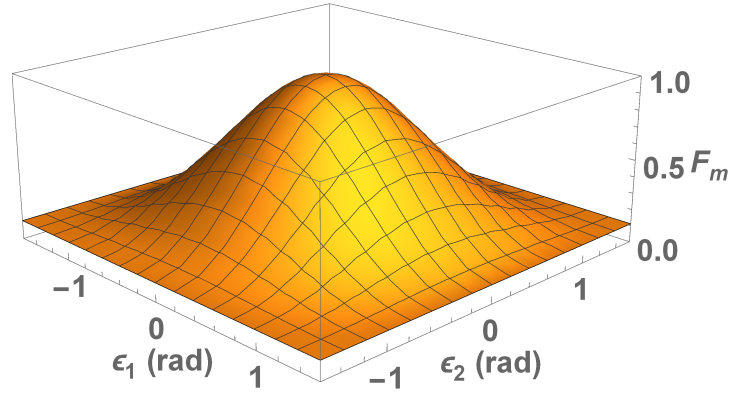
Os resultado obtido para a fidelidade média foi idêntico para as 3 combinações de  $(a,b,c)$ :

$$F_m = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} \cos^2(\epsilon_1) \cos^2(\epsilon_2). \quad (4.42)$$

O gráfico da fidelidade média em função de erro em duas componentes da decomposição KAK pode ser conferido na Figura 4.10.



**Figura 4.9:**  $F_m$  para a teleportação de portas, com 1 ângulo de erro na transformação não local.  
Fonte: Elaborada pelo autor



**Figura 4.10:**  $F_m$  para a teleportação de portas, com 2 ângulos de erro na transformação não local.  
Fonte: Elaborada pelo autor

Por último foi considerado que todos os ângulos apresentavam erro:

$$(a,b,c) = (1,1,1) \quad (4.43)$$

A expressão obtida para a fidelidade média foi:

$$F_m = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \cos(2\epsilon_X) \cos(2\epsilon_Y) + \frac{2}{9} \cos(2\epsilon_X) \cos(2\epsilon_Z) + \frac{2}{9} \cos(2\epsilon_Y) \cos(2\epsilon_Z). \quad (4.44)$$

#### 4.4.2 Erro na transformação não local - Caso geral

Nesse caso o estado de entrada não pode ser escrito como um produto tensorial. Já a geometria, conforme visto na seção 3.3, é uma hiperesfera  $S^7$ .

O resultado das simulações simbólicas para a fidelidade média, no caso de erro em apenas

uma componente da decomposição KAK, foi:

$$F_m = 1 - \frac{4}{5} \sin^2(\epsilon) \quad (4.45)$$

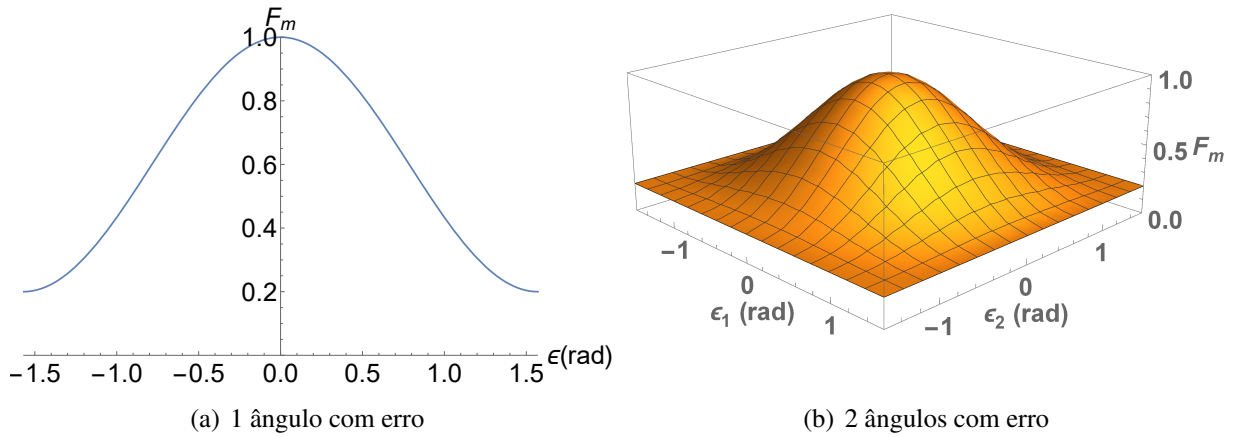
Para dois ângulos com erro, o resultado obtido foi:

$$F_m = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cos^2(\epsilon_1) \cos^2(\epsilon_2) \quad (4.46)$$

Finalmente, para erros nos 3 ângulos, a expressão obtida para a fidelidade média foi:

$$F_m = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cos(2\epsilon_X) \cos(2\epsilon_Y) + \frac{1}{5} \cos(2\epsilon_X) \cos(2\epsilon_Z) + \frac{1}{5} \cos(2\epsilon_Y) \cos(2\epsilon_Z). \quad (4.47)$$

As figuras 4.11(a) e 4.11(b) mostram os gráficos para as expressões da fidelidade média mostradas nessa seção, considerando 1 e 2 ângulos com erro.



**Figura 4.11:**  $F_m$  para a teleportação de portas com 1 ou 2 ângulos de erro na transformação não local.

Fonte: Elaborada pelo autor

### 4.4.3 Comparação entre o caso separável e o caso geral

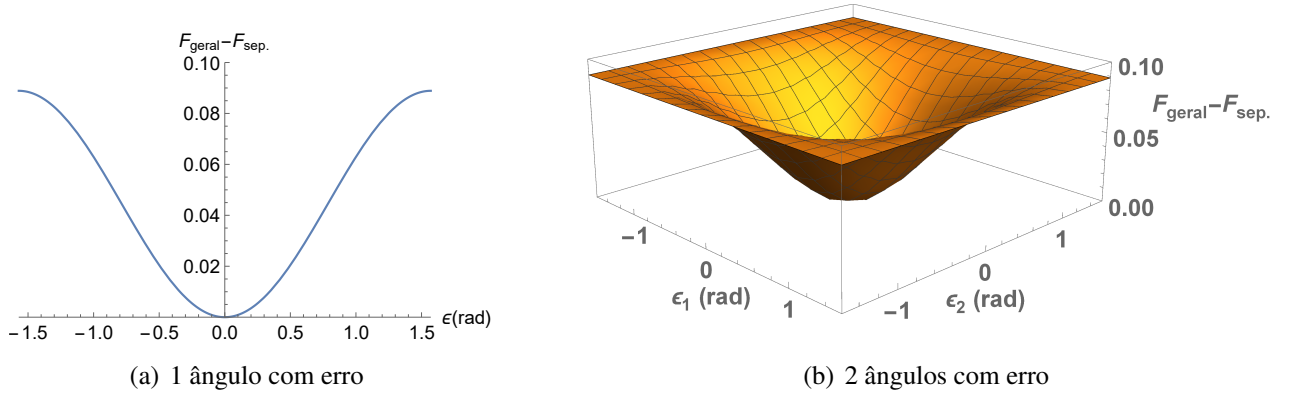
As tabelas 4.1 e 4.2 resumem as expressões obtidas nas seções 4.4.1 e 4.4.2. A partir dela conclui-se que, dependendo dos estados de entrada estarem entrelaçados ou não, o erro na transformação não local influencia de maneira diferente o resultado da teleportação.

Definindo a fidelidade média para o caso geral como  $F_{geral}$  e para o caso separável como  $F_{separável}$ , as figuras 4.12(a) e 4.12(b) mostram os gráficos de  $F_{separável} - F_{geral}$ , para um e dois ângulos com erro. A partir desses gráficos, conclui-se que o caso separável apresenta fidelidade menor ou igual que o caso geral. Além disso, quanto maiores os ângulos de erro, maior é a diferença entre os casos.

| Caso      | Ângulos com erro                            |                                                                               |
|-----------|---------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
|           | 1                                           | 2                                                                             |
| Separável | $F_m = 1 - \frac{8}{9} \sin^2(\varepsilon)$ | $F_m = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} \cos^2(\varepsilon_1) \cos^2(\varepsilon_2)$ |
| Geral     | $F_m = 1 - \frac{4}{5} \sin^2(\varepsilon)$ | $F_m = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cos^2(\varepsilon_1) \cos^2(\varepsilon_2)$ |

**Tabela 4.1:** Fidelidade média para 1 e 2 ângulos com erro.

| Caso      | 3 ângulos com erro                                                                                                                                                                          |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Separável | $F_m = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \cos(2\varepsilon_X) \cos(2\varepsilon_Y) + \frac{2}{9} \cos(2\varepsilon_X) \cos(2\varepsilon_Z) + \frac{2}{9} \cos(2\varepsilon_Y) \cos(2\varepsilon_Z)$ |
| Geral     | $F_m = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cos(2\varepsilon_X) \cos(2\varepsilon_Y) + \frac{1}{5} \cos(2\varepsilon_X) \cos(2\varepsilon_Z) + \frac{1}{5} \cos(2\varepsilon_Y) \cos(2\varepsilon_Z)$ |

**Tabela 4.2:** Fidelidade média para 3 ângulos com erro.**Figura 4.12:** Diferença entre  $F_{separável}$  e  $F_{geral}$ .

Fonte: Elaborada pelo autor

## 4.5 Influência do grau de entrelaçamento no teletransporte de portas

A medida de entrelaçamento escolhida para este trabalho foi a entropia de Von Neumann, cuja definição pode-se ver a seguir (NIELSEN; CHUANG, 2010):

**Definição 2.** Sejam  $\rho^{AB}$  a matriz densidade de um estado geral de 2 qubits,  $\rho^A = \text{tr}_B(\rho^{AB})$  e  $\rho^B = \text{tr}_A(\rho^{AB})$ . A entropia de Von Neumann, para os estados  $\rho^A$  e  $\rho^B$ , é definida como:

$$S(\rho^A) = S(\rho^B) = -\text{tr}(\rho^A \log_2 \rho^A) = -\text{tr}(\rho^B \log_2 \rho^B) \quad (4.48)$$

Considerando os auto-valores  $\lambda_x$  de um estado  $\rho$  qualquer, a Equação(4.48) pode ser reescrita:

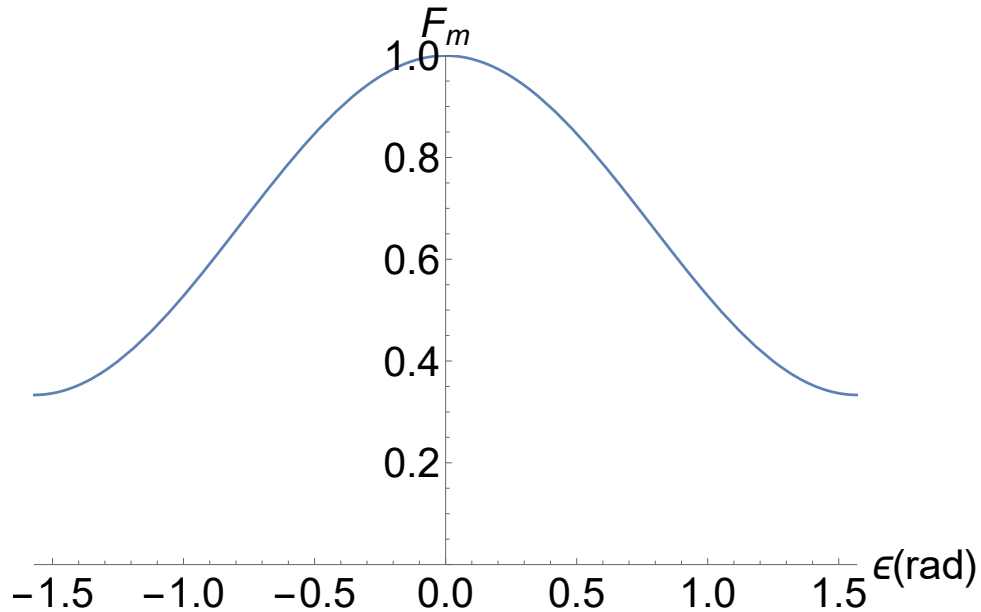
$$S(\rho) = -\sum_x \lambda_x \log_2 x \quad (4.49)$$

Para estados puros desentrelaçados, a expressão 4.48 assume valor zero, enquanto para estados maximamente entrelaçados a entropia assume valor 1.

Na seção 4.4 foi investigada a influência do erro no teletransporte de portas de 2 qubits, para o caso onde os 2 qubits a serem teletransportados eram separáveis e para o caso geral. Usando a entropia de von Neumann como medida de entrelaçamento, o caso separável corresponde à entropia zero, enquanto que o caso geral corresponde à todas as entropias possíveis, ou seja, entre 0 e 1.

Afim de investigar o caso onde os estados a serem teletransportados fossem maximamente entrelaçados, foi feita uma simulação com cem mil estados de 2 qubits aleatórios com entropia entre 0.99 e 1. Considerando apenas um ângulo de erro, foi estimada a fidelidade média como sendo a expressão 4.50, cujo gráfico pode ser conferido na Figura 4.13.

$$F_m = 1 - \frac{6}{9} \sin^2(\epsilon) \quad (4.50)$$



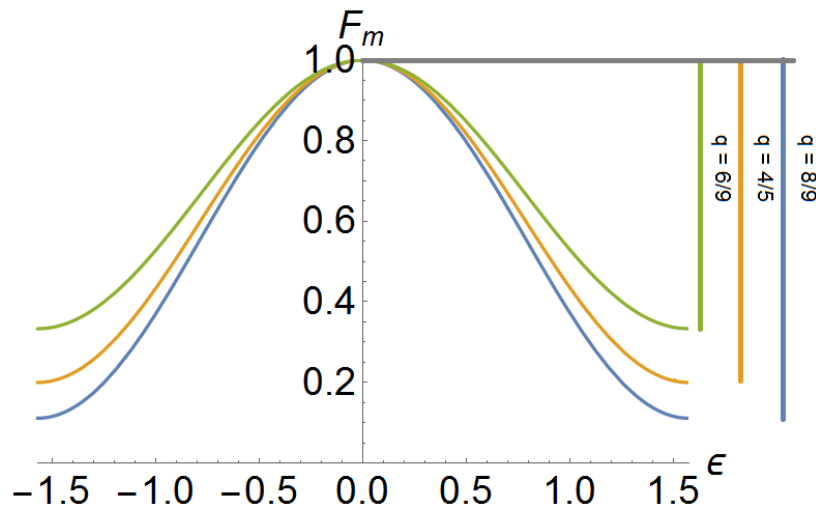
**Figura 4.13:**  $F_m$  para o caso de estados maximamente entrelaçados, com um ângulo de erro.

Fonte: Elaborada pelo autor

Comparando a expressão 4.50 com as expressões da tabela 4.1, pode-se ver que, para um ângulo de erro, a expressão para a fidelidade média assume a forma geral da Equação (4.51).

$$F_m = 1 - q \sin^2(\epsilon) \quad (4.51)$$

em que  $q$  é um coeficiente que depende do grau de entrelaçamento dos estados de entrada. Para o caso dos estados separáveis, tem-se  $q = 8/9$ . Para o caso geral, considerando todos os graus de entrelaçamento, tem-se  $q = 4/5$ . Finalmente, para o caso em que os estados de entrada são maximamente entrelaçados, estimou-se  $q = 6/9$ . No gráfico da Figura 4.14 pode-se ver como esses diferentes valores de  $q$  influenciam na fidelidade média.



**Figura 4.14:** Valores de  $q$  para os casos separável, geral e com máxima entropia.

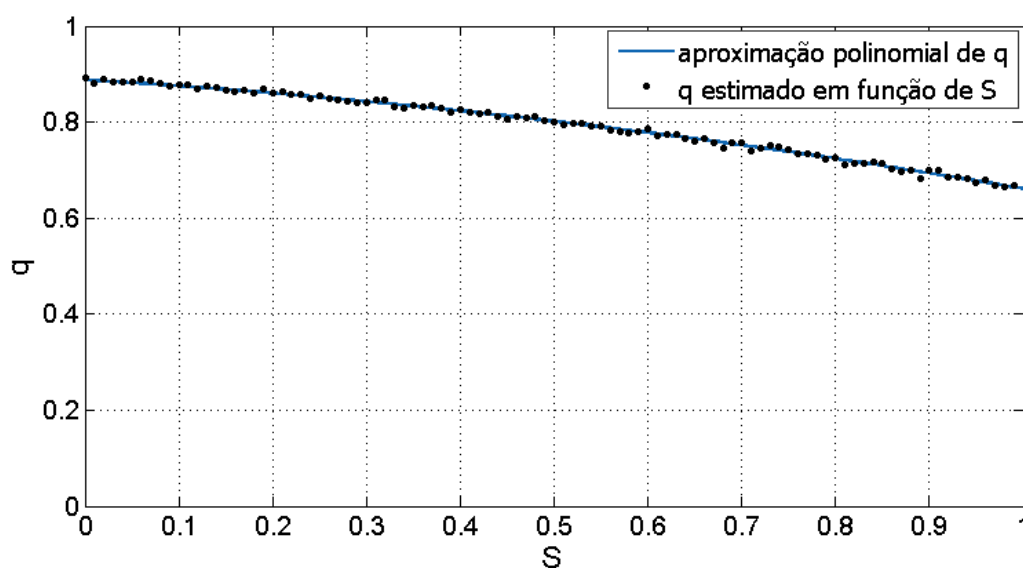
Fonte: Elaborada pelo autor

Foi realizada também uma simulação para estimar o coeficiente  $q$  em função do grau de entrelaçamento. Com essa finalidade, foram considerados 100 intervalos entre 0 e 1 para a entropia de Von Neumann:  $[0.00, 0.01), [0.01, 0.02), [0.02, 0.03), \dots, [0.98, 0.99), [0.99, 1.00]$ . Para cada intervalo foram gerados dez mil estados aleatórios com a respectiva entropia  $e$ , a seguir, foram estimados os valores de  $q$ . Obteve-se então o gráfico da Figura 4.15, com  $q$  em função de  $S$  (entropia de Von Neumann).

Usando a ferramenta *Curve Fitting* do MATLAB (MATLAB, 2010), considerando uma aproximação polinomial para  $q$ , obteve-se a seguinte expressão:

$$q = \frac{8}{9} - 0,1189S - 0,1082S^2 \quad (4.52)$$

em que  $S$  é a *entropia de Von Neumann*.



**Figura 4.15:** Influência do grau de entrelaçamento sobre o coeficiente  $q$ .

Fonte: Elaborada pelo autor

## 4.6 Conclusão

Neste capítulo, as expressões obtidas no capítulo 3 para cálculo de valores médios de funções de 1 e 2 qubits foram usadas para a obtenção das fidelidades médias nas diversas simulações. Na teleportação de portas quânticas verificou-se que o caso separável, que tem como entrada um produto tensorial de 2 qubits, apresentou uma fidelidade média diferente do caso geral. Diante de tal observação, foi feito um estudo numérico para verificar a fidelidade média em função do grau de entrelaçamento dos estados de entrada do esquema de teleportação de portas quânticas.

## CONCLUSÕES

---

Esta dissertação teve como principal objetivo o estudo da influência do erro paramétrico em esquemas de teleportação de portas quânticas modelados por decomposição KAK. Como contribuições do trabalho realizado podemos citar:

- Foram determinadas as expressões gerais para a fidelidade média entre estados quânticos de 1 qubit e de 2 qubits (separáveis ou não) usando tanto a representação geométrica de estados quânticos na esfera de Bloch ( $S^2$ ), como a representação em hiperesfera ( $S^7$ ).
- No caso do esquema de teletransporte de estados, considerando a representação da Hadamard por decomposição ZYZ, observou-se que um erro na primeira rotação Z não influencia no resultado do teletransporte do estado, resultando numa fidelidade unitária. Por outro lado, a fidelidade passou a variar quando o erro aparecia nas outras duas rotações.
- Foram determinadas as expressões analíticas para a fidelidade média em função do erro atuante na transformação não local para esquemas de teleportação de portas quântica modelados por decomposição KAK. Os resultados mostraram que a fidelidade média resultante depende do grau de entrelaçamento dos estados na entrada do esquema, uma vez que estados de 2 qubits separáveis na entrada resultaram numa fidelidade menor que a que foi encontrada considerando todos os estados de 2 qubits possíveis (separáveis ou entrelaçados). Baseado nisso, foi determinada numericamente uma expressão geral para a fidelidade média em função do erro e de um parâmetro  $q$  que dependia do grau de entrelaçamento dos estados na entrada. Complementarmente, o resultado da análise numérica mostrou que a fidelidade média considerando estados maximamente entrelaçados é sempre maior que a fidelidade média para os casos citados anteriormente.

## 5.1 Trabalhos futuros

Como trabalhos futuros, podemos citar:

- Estudar estratégias para mitigação dos efeitos do erro em esquemas de teleportação de portas quânticas.
- Determinar numericamente e analiticamente um sub-conjunto de pontos de uma hiperesfera  $S^7$  que correspondem a estados de 2 qubits separáveis.
- Determinar as fidelidades mínimas para os circuitos ruidosos considerados neste trabalho.
- Estudar a influência de outros tipos de erros em esquemas de teleportação de portas quânticas, tais como: canais de inversão (bit e fase), canal de despolarização, atenuação (amplitude e fase).
- Estudar a evolução temporal de esquemas de teleportação de portas quânticas através de equações mestras na forma de Lindblad.

---

## Referências Bibliográficas

---

APELIAN, Christopher; SURACE, Steve. **Real and complex analysis**. [S.l.]: CRC Press, 2009.

BENGTSSON, Ingemar; ZYCZKOWSKI, Karol. **Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007.

BENNETT, Charles H; BRASSARD, Gilles; CRÉPEAU, Claude; JOZSA, Richard; PERES, Asher; WOOTTERS, William K. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. **Physical review letters**, APS, v. 70, n. 13, p. 1895, 1993.

CONNELLAN, Lloyd. Final Year Project, **Spheres, Hyperspheres and Quaternions**. 2014.

CUBITT, Toby. **Quantum Information Package**. 2016. Disponível em: <<http://www.dr-qubit.org/>>.

DJORDJEVIC, Ivan. **Quantum information processing and quantum error correction: an engineering approach**. [S.l.]: Academic press, 2012.

EINSTEIN, Albert; PODOLSKY, Boris; ROSEN, Nathan. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? **Physical review**, APS, v. 47, n. 10, p. 777, 1935.

FAYNEH, Eyal; YUFFE, Marcelo; KNOLL, Ernest; ZELIKSON, Michael; ABOZAED, Muhammad; TALKER, Yair; SHMUELY, Ziv; RAHME, Saher Abu. 4.1 14nm 6th-generation core processor soc with low power consumption and improved performance. In: IEEE. **2016 IEEE International Solid-State Circuits Conference (ISSCC)**. [S.l.], 2016. p. 72–73.

GOTTESMAN, Daniel; CHUANG, Isaac L. Quantum teleportation is a universal computational primitive. **arXiv preprint quant-ph/9908010**, 1999.

KAPLAN, Wilfred. **Advanced calculus**. Addison Wesley, 2002.

KAYE, Phillip; LAFLAMME, Raymond; MOSCA, Michele. **An introduction to quantum computing**. [S.l.]: Oxford, 2006.

LINDBLAD, Goran. On the generators of quantum dynamical semigroups. **Communications in Mathematical Physics**, Springer, v. 48, n. 2, p. 119–130, 1976.

MA, Xiao-Song; HERBST, Thomas; SCHEIDL, Thomas; WANG, Daqing; KROPATSCHEK, Sebastian; NAYLOR, William; WITTMANN, Bernhard; MECH, Alexandra; KOFLER, Johannes; ANISIMOVA, Elena *et al.* Quantum teleportation over 143 kilometres using active feed-forward. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 489, n. 7415, p. 269–273, 2012.

MARKOV, Igor L. Limits on fundamental limits to computation. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 512, n. 7513, p. 147–154, 2014.

MATLAB. **version 7.10.0 (R2010a)**. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2010.

MENDES, Fernando Vasconcelos. **Teleportação de Portas Quânticas, Entrelaçadores Universais e Conexões com a Teoria dos Números**. [S.l.]: Universidade Federal do Ceará, 2015.

MOORE, Gordon E. Cramming more components onto integrated circuits, reprinted from electronics, volume 38, number 8, april 19, 1965, pp. 114 ff. **IEEE Solid-State Circuits Newsletter**, v. 3, n. 20, p. 33–35, 2006.

NIELSEN, Michael A; CHUANG, Isaac L. **Quantum computation and quantum information**. [S.l.]: Cambridge university press, 2010.

OH, Sangchul; LEE, Soonchil; LEE, Hai-woong. Fidelity of quantum teleportation through noisy channels. **Physical Review A**, APS, v. 66, n. 2, p. 022316, 2002.

OUELLETTE, Jennifer. Quantum key distribution. **Industrial Physicist**, v. 10, n. 6, p. 22–25, 2004.

OZOLS, Maris. Geometry of a qubit. 2007.

POWELL, James R. The quantum limit to moore's law. **Proceedings of the IEEE**, IEEE, v. 96, n. 8, p. 1247–1248, 2008.

SHOR, Peter W. Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring. In: IEEE. **Foundations of Computer Science, 1994 Proceedings., 35th Annual Symposium on**. [S.l.], 1994. p. 124–134.

SOUSA, PB Melo de; SILVA, JB Rosa; RAMOS, RV. Implementing a non-local xor function with quantum communication. **Journal of Modern Optics**, Taylor & Francis, v. 53, n. 12, p. 1765–1775, 2006.

TANENBAUM, Andrew S *et al.* **Computer networks, 4-th edition**. [S.l.]: ed: Prentice Hall, 2003.

TUCCI, Robert R. An introduction to cartan's kak decomposition for qc programmers. **arXiv preprint quant-ph/0507171**, 2005.

WILDE, Mark M. **Quantum information theory**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013.

## APÊNDICE A – Conceitos

### A.1 Informação Quântica

#### A.1.1 Qubits e o Espaço de Hilbert

Ao contrário dos bits clássicos, que apresentam estados bem definidos, o estado de um qubit é definido como uma superposição dos estados possíveis:  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ . Usando a notação de Dirac, um estado  $|\psi\rangle$  pode ser escrito da seguinte maneira:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (\text{A.1})$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (\text{A.2})$$

em que os números complexos  $\alpha$  e  $\beta$  são as *amplitudes de probabilidade*. O quadrado de cada uma delas representa a probabilidade de se obter o estado  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$  quando realizamos uma medição no sistema. Após a medição, dizemos que o sistema *colapsa* para um dos estados possíveis.

Pode-se representar o estado  $\psi$  usando a notação de vetores coluna, em que cada elemento do vetor é uma das amplitudes de probabilidade:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Esse vetor tem duas dimensões e, portanto, pertence a um espaço vetorial de dimensão finita. Tal espaço complexo de dimensão finita é conhecido como *espaço de Hilbert* e vamos representá-lo pela letra H.

Para os estados bem definidos  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , temos a seguinte representação em vetores em H:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Como  $\alpha$  e  $\beta$  são números complexos, eles podem ser escritos da seguinte forma:

$$\alpha = e^{i\varphi_1}|\alpha|, \quad \beta = e^{i\varphi_2}|\beta| \quad (\text{A.5})$$

em que  $\varphi_x$  são conhecidos como *fases*. Se parametrizarmos  $|\alpha|$  e  $|\beta|$  em função de um ângulo  $\theta/2$ , e levando em consideração que a soma dos quadrados de seus módulos é 1, podemos reescrever  $\psi$  assim:

$$\psi = e^{i\varphi_1} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\varphi_2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle \quad (\text{A.6})$$

$$\psi = e^{i\varphi_1} \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle \right). \quad (\text{A.7})$$

O fator  $e^{i\varphi_1}$ , na expressão acima, é definido como um *fator de fase global*. Ao realizarmos uma *medição* no sistema, o resultado obtido independe desse fator e, portanto, ele pode ser ignorado. Colocando  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  temos, então:

$$\psi = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i(\varphi)} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle. \quad (\text{A.8})$$

Escrevendo como um vetor coluna:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

O conjugado de  $|\psi\rangle$ , denotado por  $\langle\psi|$ , pode ser representado em uma matriz linha:

$$\langle\psi| = \left( \cos \frac{\theta}{2} \quad e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \right). \quad (\text{A.10})$$

### A.1.2 Sistemas quânticos compostos de 2 qubits

Um sistema quântico composto de 2 qubits tem seu estado escrito como a superposição de quatro estados:

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle \quad (\text{A.11})$$

em que  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  são as amplitudes de probabilidade. Analogamente ao caso de um qubit, a soma dos quadrados dos módulos dessas amplitudes é um:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1. \quad (\text{A.12})$$

## A.2 Evolução do Sistema

A evolução do estado de um sistema quântico fechado,  $|\psi_1\rangle$ , para outro estado,  $|\psi_2\rangle$ , pode ser descrita por um operador unitário  $U$ :

$$|\psi_2\rangle = U|\psi_1\rangle. \quad (\text{A.13})$$

Se não forem realizadas medições no sistema, essa evolução é dita *reversível*. Isso é válido por que um operador unitário sempre possui um inverso,  $U^\dagger$ . Essa propriedade se traduz na seguinte relação:

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I. \quad (\text{A.14})$$

Os operadores podem ser descritos como matrizes. Entre elas, destacam-se as matrizes de Pauli:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

Também merece destaque a transformação Hadamard, que muda um sistema da base computacional para a base de Hadamard:

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= |+\rangle \\ H|1\rangle &= |-\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Abaixo temos a representação matricial da transformação Hadamard na base computacional:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

## ***APÊNDICE B – Códigos do Matlab***

### **B.1 Erro paramétrico em uma transformação SU(2)**

```
%Código para calcular a fidelidade média no caso de transformações SU2 com
%erro.
%Geometria utilizada: esfera de Bloch
%autor: Wendel
clear;
syms teta1 fi11 fi12 e1 e2 e3 t0 t1 t2 t3 real
psi = [cos(teta1/2)*exp(i*fi12/2); sin(teta1/2)*exp(-i*fi12/2)]
% rho de entrada
p_in = psi*psi'
p_in = simplify(p_in)
Y = [0 -i;i 0]
Z = [1 0;0 -1]
U = exp(i*t0)*expm(-i*t1*Z/2)*expm(-i*t2*Y/2)*expm(-i*t3*Z/2)
t1 = t1 + e1
eU = exp(i*t0)*expm(-i*t1*Z/2)*expm(-i*t2*Y/2)*expm(-i*t3*Z/2)
%rho de saída
p_out = eU*p_in*eU'
%fidelidade
F = psi'*U'*p_out*U*psi
Fm1 = int(F*sin(teta1),fi12,0,2*pi)
Fm2 = int(Fm1,teta1,0,pi)
Fm3 = Fm2/pi/4
```

## B.2 Erro no teletransporte de estados

```
%Código para calcular a fidelidade média para o teletransporte de estados
%com erro na porta Hadamard.
%
%Geometria utilizada: esfera de Bloch
%autor: Wendel
clear
syms teta1 fi1 e1 e2 e3 real
%estado psi geral
psi = [cos(teta1/2)*exp(i*fi1/2); sin(teta1/2)*exp(-i*fi1/2)]
Cn = [1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 0 1;0 0 1 0];
I = [1 0;0 1];
X = [0 1;1 0];
Y = [0 -i;i 0];
Z = [1 0;0 -1];
%controlled X
cX = [1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 0 1;0 0 1 0];
%controlled Z
cZ = [1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 -1];
%switch
Sw = [1 0 0 0;0 0 1 0;0 1 0 0;0 0 0 1];
%ângulos da porta Hadamard na decomposição ZYZ
t0 = pi/2
t1 = 0
t2 = pi/2
t3 = pi
%porta Hadamard na decomposição ZYZ
H = exp(i*t0)*expm(-i*t1*Z/2)*expm(-i*t2*Y/2)*expm(-i*t3*Z/2)
%acrescenta um erro no ângulo da primeira rotação Z
%t1 = t1 + e1
t2 = t2 + e2
%t3 = t3 + e3
%porta Hadamard com erro
eH = exp(i*t0)*expm(-i*t1*Z/2)*expm(-i*t2*Y/2)*expm(-i*t3*Z/2)
%estado Beta00
```

```

b00 = (1/sqrt(2))*[1;0;0;1];
psi_in = kron(psi,b00);
p_in = psi*psi'

%cria a matriz do teletransporte de estados, considerando a porta Hadamard
%com erro
C = kron(Cn,I);
C = kron(kron(eH,I),I)*C;
C = kron(I,cX)*C;
C = kron(Sw,I)*C;
C = kron(I,cZ)*C;
psi_out = C*psi_in;
p_out_total = psi_out*psi_out'
%p_out = matriz densidade do qubit teleportado
p_out = traco_parcial3_sym(p_out_total,2,3);
%fidelidade entre o qubit teleportado, p_out, e o qubit original, psi
F = psi'*p_out*psi
Fm1 = int(F*sin(teta1),fi1,0,2*pi)
Fm2 = int(Fm1,teta1,0,pi)
Fm3 = vpa(Fm2/pi/4)

```

## B.3 Erro na transformação não local - Estados Separáveis na Entrada

```

%Código para calcular a fidelidade média no caso
%de estados separáveis na entrada.
%
%Geometria utilizada: duas esferas de bloch
clear
syms teta1 teta2 fi1 fi2 tetax tetay tetaz real

X = [0 1;1 0]
XX = kron(X,X)

Y = [0 -i;i 0]

```

```

YY = kron(Y,Y)

Z = [1 0;0 -1]
ZZ = kron(Z,Z)

I = [1 0;0 1];
%hadamard
H = (1/sqrt(2))*[1 1; 1 -1];
%cnot
Cn = [1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 0 1;0 0 1 0];

%U sem erro
U = expm(i*(pi/4)*XX + i*(pi/4)*YY + i*(pi/4)*ZZ);
%U com erro tetax e/ou tetay e/ou tetaz
eU = expm(i*(tetax + pi/4)*XX + i*(pi/4)*YY + i*(pi/4)*ZZ);

%estados de entrada
psi_1 = [cos(teta1/2)*exp(i*fi1/2); sin(teta1/2)*exp(-i*fi1/2)]
psi_2 = [cos(teta2/2)*exp(i*fi2/2); sin(teta2/2)*exp(-i*fi2/2)]
psi_12 = kron(psi_1,psi_2);

s0 = [1;0];
%recurso de teleportação
res = kron2(s0,s0,s0,s0);
%entrada total do circuito
psi_in = kron2(psi_1,res,psi_2);
%saída total do circuito, de 6 qubits
psi_out_total = gateTelpCircuit(eU,psi_in);
%matriz densidade da saída do circuito
p_out_total = psi_out_total*psi_out_total';
%recupera a matriz densidade dos estados teletransportados
p_out = traco_parcial3_sym(p_out_total,4,3);
%cálculo da fidelidade
F = psi_12'*U'*p_out*U*psi_12;

```

```
%integral para as duas esferas de bloch
Fm1 = int(F*sin(teta1)*sin(teta2),fi2,0,2*pi)
Fm2 = int(Fm1,teta2,0,pi)
Fm3 = int(Fm2,fi1,0,2*pi)
Fm4 = int(Fm3,teta1,0,pi)
Fm4 = Fm4/pi/pi/16
resultado = simplify(Fm4)
```

## B.4 Erro na transformação não local - Caso geral

```
%Código para calcular a fidelidade média para todos
%os estados de 2 qubits possíveis, entrelacados ou não
%
%Geometria utilizada: uma hiperesfera s7, representando os 2 estados
%autor: Wendel

clear;

syms teta1 teta2 tetax tetay tetaz t1 t2 t3 t4 t5 t6 t7 fi1 fi2 real

X = [0 1;1 0]
XX = kron(X,X)
Y = [0 -i;i 0];
YY = kron(Y,Y)
Z = [1 0;0 -1];
ZZ = kron(Z,Z)
I = [1 0;0 1];
%hadamard
H = (1/sqrt(2))*[1 1; 1 -1];
%cnot
Cn = [1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 0 1;0 0 1 0];
%swap
Sw = [1 0 0 0;0 0 1 0;0 1 0 0;0 0 0 1];

%Ux sem erro
%Ux = expm(i*(pi/4)*XX);
Ux = expm(i*(pi/4)*XX + i*(pi/4)*YY + i*(pi/4)*ZZ);
```

```

%Ux com erro tetax e/ou tetay e/ou tetaz
eUx = expm(i*(tetax + pi/4)*XX + i*(pi/4)*YY + i*(pi/4)*ZZ);

%coordenadas hiper-esféricas
x1 = cos(t1);
x2 = sin(t1)*cos(t2);
x3 = sin(t1)*sin(t2)*cos(t3);
x4 = sin(t1)*sin(t2)*sin(t3)*cos(t4);
x5 = sin(t1)*sin(t2)*sin(t3)*sin(t4)*cos(t5);
x6 = sin(t1)*sin(t2)*sin(t3)*sin(t4)*sin(t5)*cos(t6);
x7 = sin(t1)*sin(t2)*sin(t3)*sin(t4)*sin(t5)*sin(t6)*cos(t7);
x8 = sin(t1)*sin(t2)*sin(t3)*sin(t4)*sin(t5)*sin(t6)*sin(t7);

%mapeamento das coordenadas hiperesféricas para as amplitudes de
%probabilidade
psi_12 = [x1+i*x2;x3+i*x4;x5+i*x6;x7+i*x8];
%Matriz de troca para "separar" os qubits de entrada.
%Os qubits de entrada, embora "separados" no circuito, continuam
%entrelaçados
troca = kron2(I,I,I,I,Sw) * ...
kron2(I,I,I,Sw,I) * ...
kron2(I,I,Sw,I,I) * ...
kron2(I,Sw,I,I,I);
s0 = [1;0];
%recurso de teleportação da porta Cnot
res = kron2(s0,s0,s0,s0);
%estado total de entrada
psi_in = kron2(psi_12,res);
%desloca os qubits para q o "psi1" fique em cima e o psi2 embaixo
psi_in = troca*psi_in;
%estado de saída total do circuito
psi_out_total = gateTelpCircuit(eUx,psi_in);
%matriz densidade da saída do circuito
p_out_total = psi_out_total*psi_out_total';
%recupera a matriz densidade dos estados teletransportados

```

```

p_out = traco_parcial3_sym(p_out_total,4,3);
%cálculo da fidelidade
F = psi_12'*Ux'*p_out*Ux*psi_12;

%jacobiana para uma hiperesfera S7
jacob = sin(t1)^6 * sin(t2)^5 * sin(t3)^4 * sin(t4)^3 * sin(t5)^2 * sin(t6)

%sF = simplify(F)

%integral para a hiperesfera que corresponde aos estados, entrelaçados ou
%não
Fm1 = int(F*jacob,t7,0,2*pi)
Fm2 = int(Fm1,t6,0,pi)
Fm3 = int(Fm2,t5,0,pi)
Fm4 = int(Fm3,t4,0,pi)
Fm5 = int(Fm4,t3,0,pi)
Fm6 = int(Fm5,t2,0,pi)
%Obs: 3/pi^4 corresponde ao inverso da área da hiperesfera s7, de raio 1
Fm7 = int(Fm6,t1,0,pi)
sFm7 = 3*Fm7/pi/pi/pi/pi
resultado = simplify(sFm7)

```

## B.5 Influência do grau de entrelaçamento no teletransporte de portas

```

%Código para estimar q em função da entropia
%
%Geometria utilizada: uma hiperesfera s7, representando os 2 estados
%autor: Wendel
clear;
syms tetax real
tempo = cputime;
max = 100000;
ultimo = 0;
step = .01;

```

```

Z = [1 0;0 -1];
ZZ = kron(Z,Z)
Y = [0 -i;i 0]
YY = kron(Y,Y)
X = [0 1;1 0]
XX = kron(X,X)
I = [1 0;0 1];

s0 = [1;0];
%recurso de teleportação da porta Cnot
res = kron2(s0,s0,s0,s0);
%hadamard
H = (1/sqrt(2))*[1 1; 1 -1];
%cnot
Cn = [1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 0 1;0 0 1 0];
%swap
Sw = [1 0 0 0;0 0 1 0;0 1 0 0;0 0 0 1];

%Matriz de troca para "separar" os qubits de entrada.
%Os qubits de entrada, embora "separados" no circuito, continuam
%entrelaçados
troca = kron2(I,I,I,I,Sw) * ...
kron2(I,I,I,Sw,I) * ...
kron2(I,I,Sw,I,I) * ...
kron2(I,Sw,I,I,I);

ni = 0;

for si = 0.00:0.01:0.99
n = 1;
ni = ni + 1;
while n <= max
psi1 = randPsi(4);
p = psi1*psi1';

```

```

s = entropy_von_neumann(p);
if (s >= si) && (s < (si + 0.01))
psi(:,n) = psi1;
n = n + 1;
end
n
end

%U sem erro
U = expm(i*(pi/4)*XX + i*(pi/4)*YY + i*(pi/4)*ZZ);

vF = zeros(1,629);
vS = zeros(1,629);
vX = zeros(1,629);
k = 0;
for tetax = 0:step:6.28
k = k + 1;
vX(k) = tetax;
%U com erro tetax ou tetay ou tetaz
eU = expm(i*(tetax + pi/4)*XX + i*(pi/4)*YY + i*(pi/4)*ZZ);
for n = 1:max
%estado total de entrada
psi_in = kron2(psi(:,n),res);
%desloca os qubits para q o "psi1" fique em cima e o "psi2" embaixo
psi_in = troca*psi_in;
%estado de saída total do circuito com erro
psi_out_total = gateTelpCircuit(eU,psi_in);
%matriz densidade da saída do circuito
p_out_total = psi_out_total*psi_out_total';
%recupera a matriz densidade dos estados teletransportados
p_out = traco_parcial3(p_out_total,4,3);

%fidelidade
F = psi(:,n)'*U'*p_out*U*psi(:,n);
vF(k) = vF(k)+real(F);

```

```
end
vF(k) = vF(k)/max;
end
f = fit( vX(:), vF(:), 'a+b*cos(x)^2');
vB(ni) = f.b
ultimo = vB(ni)
end
```