



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
- IFCE *CAMPUS* FORTALEZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA - PPGECM**

ARNALDO DIAS FERREIRA

**A INTERPRETAÇÃO DOS GRÁFICOS DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E
GEOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA: UMA
PROPOSTA DE FORMAÇÃO CONTINUADA**

FORTALEZA

2023

ARNALDO DIAS FERREIRA

**A INTERPRETAÇÃO DOS GRÁFICOS DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E
GEOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA: UMA
PROPOSTA DE FORMAÇÃO CONTINUADA**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – *Campus* Fortaleza, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Coorientadora: Dr^a Maria José Costa dos Santos

FORTALEZA

2023

F383i Ferreira, Arnaldo Dias.
A INTERPRETAÇÃO DOS GRÁFICOS DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA : UMA PROPOSTA DE FORMAÇÃO CONTINUADA / Arnaldo Dias Ferreira. - 2023.
162 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Campus Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.
Coorientação: Profa. Dra. Maria José Costa dos Santos.

1. Engenharia Didática. Teoria das Situações Didáticas. GeoGebra. Progressões.. I. Título.
CDD 510.07

ARNALDO DIAS FERREIRA

**A INTERPRETAÇÃO DOS GRÁFICOS DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E
GEOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA: UMA
PROPOSTA DE FORMAÇÃO CONTINUADA**

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) - *Campus Fortaleza*, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovado (a) em: ____ / ____ / ____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves (Orientador)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – *Campus Fortaleza*

Profa. Dra. Maria José Costa dos Santos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Profa. Dra. Ivoneide Pinheiro de Lima
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira
Universidade Regional do Cariri (URCA)

A Deus, antes de tudo.

À minha mãe, lavradora rural, Terezinha, meu pai analfabeto, José Francisco (*in memoriam*), à minha esposa Camila e aos meus filhos Artur, Maitê e Heitor, como inspiração aos estudos.
Aos mestres com admiração e respeito.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo discernimento.

A minha família, pelo apoio.

Aos meus irmãos Agnaldo e Aldo pelo amor de família, aos meus amigos e compadres/comadres pelo incentivo e fé na vitória, aos colegas de estudo, que me acompanharam durante a vida acadêmica, desde o Ensino Médio até a Graduação, vibrando comigo cada conquista e superação de desafios, me ajudando a vencê-los em cada etapa.

Agradeço em especial os amigos Lindomar e Glebis, no Ensino Médio e a todos os amigos do *Rachamática* na graduação, em especial aos queridos amigos Paulo Tavares, pela paciência, e o Jody Campos. Agradeço ainda a todos amigos do grupo de estudos G-Tercoa, pelo carinho e apoio, em especial aos dois mais brilhantes João Neto e Elaine Giffoni, pela maravilhosa aura altruísta. Aos demais pelo acolhimento, os conselhos, a paciência, as palavras motivadoras e os ensinamentos.

Gostaria de agradecer também aos colegas do PGECM que formaram uma rede colaborativa de aprendizado e me ajudaram a superar o ensino remoto numa época de pandemia e adversidades causadas por causa dela, sem vocês eu não teria conseguido tantas vitórias. Agradeço em especial às minhas colegas de linha de mestrado, a Renata, a Carla, a Narla e a Joelma, saibam que vocês me motivaram cada uma do seu jeito.

Agradeço ainda a pessoa que primeiro acreditou nesse sonho e que me orientou rumo ao caminho do sucesso, uma pessoa que antes de tudo merece todo o meu reconhecimento pois, me proporcionou a abertura de uma porta que me trouxe até aqui, mas, que ainda poderá me levar ao infinito, a você meu amigo Yure Abreu, todo o meu respeito tecnológico.

Aos professores e professoras do programa, que me permitiram caminhar às suas sombras durante o curso e que me mostraram o verdadeiro valor do conhecimento, muito obrigado. Em especial à minha professora coorientadora Dra. Mazzé Santos por sua grande sabedoria, aos professores, Dr. Daniel Brandão que tanto me ajudou com a sua capacidade de foco e objetividade, ao Dr. Wendel Melo por toda a sua presteza e atenção e ao meu grande orientador professor Dr. Régis Alves, que me acolheu com sua luz.

Desde minha infância lembro-me, sendo filho de professor, de ter a data lembrada pelos meus pais. Depois, quando aluno, o diretor da escola falava algo sobre a data e sobre a importância do professor na sociedade, aplaudíamos e íamos para as aulas como em qualquer outro dia... O tempo foi passando e a data tomou um caráter de festividade e ao mesmo tempo de convite para uma reflexão sobre nossa condição profissional e para reivindicações. Com mais de 60 anos de carreira, sempre me considero feliz por ter me tornado professor. Se recomeçasse a vida, faria a mesma opção. O que não exclui minha reflexão, muitas vezes entristecedora, sobre o estado atual da nossa profissão e sobre o risco de desencanto de muitos colegas. Recordo minha história de vida. Comecei a dar aulas com 16 anos. Eram classes informais, de preparação de alunos para concurso público. Os alunos sempre se lembravam de ser dia do professor e levavam algo para comemorar. Mas eu não percebia, ainda, que eu não estava sendo um professor no verdadeiro sentido da palavra, isto é, um educador. Eu estava treinando indivíduos, adultos e já educados para irem bem nos concursos. Eles geralmente se saíam bem e eu me sentia realizado. Somente alguns anos depois, quando acabei de completar vinte anos, assumi aulas em classes regulares, do curso ginásial e do colegial, nas quais alguns alunos tinham quase a minha idade. Percebi então que minha missão ia muito além de treinar alunos para passar numa prova. O importante é educar para a vida, para ser um participante ativo na sociedade e estimular a criatividade. Assim superei agir como um professor/treinador e entendi que minha responsabilidade maior era ser um educador. Estamos passando por uma fase difícil na profissão. Há uma grande incompreensão sobre nossa missão. Somos vistos pelas autoridades, pelos pais, pelos alunos e mesmo por alguns colegas como treinadores de jovens para passar em exames. Nessa visão distorcida de missão do professor, quando os resultados são ruins a culpa é dos professores. Sabemos que a causa do baixo rendimento é a própria conceituação de exames e testes padronizados como instrumentos de avaliação da educação. A situação é particularmente grave na disciplina matemática. Não desanimem com essa incompreensão. Não posso nesta mensagem analisar essa injustiça com o trabalho dedicado e competente da classe docente, mas posso convidar os colegas a entenderem o mundo dos jovens. Deem a eles a oportunidade de serem criativos e procurem acompanhá-los. Façam com que a parafernália de que os alunos dispõem seja sua parceira na busca do novo, no desenvolvimento de projetos. A matemática será uma das disciplinas mais afetadas por transformações que resultam de toda a tecnologia disponível. Procurem acompanhar as novas direções que a matemática está tomando. Estejam alertas às publicações e aos eventos. A grande parceira dos educadores matemáticos é a Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Aproveitem a riqueza das publicações dos eventos organizados pela SBEM e as suas várias possibilidades de acesso e links oferecidos pelo seu site. A tecnologia amplamente disponível trará a valorização do professor. Abraços solidários nesse nosso dia. (Professor Ubiratan D`Ambrósio)

RESUMO

Alguns conteúdos matemáticos do Ensino Médio, como as progressões aritméticas e geométricas, têm sido motivo de discussão devido aos baixos índices de proficiência apresentados nas Avaliações de Larga Escala. Visando a melhoria na aprendizagem destes conteúdos em particular, buscam-se novas estratégias que proporcionem um ensino dinâmico destes objetos do conhecimento. Dados os obstáculos epistemológicos presentes nos processos de ensino relativos a estes componentes curriculares, objetiva-se analisar as contribuições da Teoria das Situações Didáticas e Engenharia Didática no ensino da interpretação geométrica dos gráficos das Progressões Aritméticas e Geométricas de ordem superior, subsidiadas pelo *software* GeoGebra, na formação docente do professor de matemática. Reforça-se nessa pesquisa a aplicação em nível experimental da Teoria das Situações Didáticas (TSD), enquanto teoria de ensino, associada à Engenharia Didática (ED) como metodologia de pesquisa. Esta pesquisa tem uma abordagem qualitativa, pois enfatiza os aspectos subjetivos dos sujeitos. Quanto aos objetivos, ela é exploratório-descritiva, pois almeja gerar novos conhecimentos para o avanço do tema. Na análise preliminar realizou-se um levantamento bibliográfico, com a finalidade de verificar como ocorre a abordagem do tema nos livros didáticos, construindo um referencial teórico e documental. Em seguida, na análise a priori, propõe-se a elaboração de um modelo formativo direcionado a professores atuantes no Ensino Médio de uma Escola Pública estadual do município de Fortaleza-CE. Utilizou-se como recurso tecnológico na transformação do saber a ser ensinado o *software* GeoGebra. Na experimentação, momento de formação com os sujeitos, observaram-se os critérios de inclusão e exclusão dos participantes da pesquisa como foram estabelecidos, bem como foram desenvolvidas as situações didáticas elaboradas na análise a priori. Para uma análise a posteriori, buscou-se uma interpretação da relação intrínseca entre os conceitos matemáticos e a metodologia de ensino que fundamentou esta pesquisa. Assim, foi realizado o devido confronto acerca das previsões dos comportamentos dos sujeitos na fase de análise a priori com a etapa de experimentação de fato. Neste estudo, considerou-se como hipótese que a TSD aliada a um recurso tecnológico como o GeoGebra pode contribuir para a transposição didática das Progressões Aritméticas e Geométricas, mobilizando o raciocínio e diferentes visões acerca do tema pelos professores. Com efeito, tem-se em vista a melhora dos índices de proficiência dos alunos, a partir da formação de professores atuantes no Ensino Médio. Espera-se, com essa formação, ampliar o campo de ação docente sobre esse conteúdo curricular, viabilizando assim a fluidez no processo de ensino e aprendizagem, além de instigar pesquisas futuras, almejando a inovação educacional com base nos resultados apresentados.

Palavras-chave: Engenharia Didática. Teoria das Situações Didáticas. GeoGebra. Progressões.

ABSTRACT

Some mathematical content in high school, such as arithmetic and geometric progressions, have been the subject of discussion due to the low levels of proficiency shown in large-scale assessments. Aiming at improving the learning of these contents, new teaching strategies are sought that provide quality teaching of these objects of knowledge. Given the epistemological obstacles present in the teaching processes related to these curricular components, the objective is to analyze the contributions of the Theory of Didactic Situations and Didactic Engineering for the teaching of geometric interpretation of graphs of Arithmetic and Geometric Progressions of higher order, subsidized by the GeoGebra software, in the teaching training of mathematics teachers who work in high school. This research reinforces the application at an experimental level of the Theory of Didactic Situations (TSD), as a teaching methodology, based on Didactic Engineering (DE) as a research methodology, in its four phases. The research is of a basic nature with a qualitative approach, because it emphasizes the subjective aspects of the subjects. As for the objectives, it is exploratory-descriptive, as it aims to generate new knowledge for the advancement of science. As for the procedures, it is characterized as a participatory research, as it aims to build knowledge, in order to propose changes and subsequent awareness of the individuals involved in the process of building their learning to improve teaching. As methodological procedures, a bibliographical survey was carried out, with the purpose of verifying the approach of the contents in the didactic books, and a documental theoretical reference on the subject. Then, it is proposed the elaboration of a formative moment with teachers who work in high school of a state public school in the city of Fortaleza-CE. The GeoGebra software was used as a technological artifact in the transformation of knowledge to be taught. In training with the subjects, the criteria for inclusion and exclusion of research participants were observed as they were established. For the a posteriori analysis, it was up to interpret the intrinsic relationship that involved the mathematical concepts with the teaching methodology that supported the experimentation, making the due confrontation about the predictions of the subjects' impressions in the a priori analysis phase. In this study, our hypothesis is that the TSD, as a methodological proposal combined with a technological artifact, such as GeoGebra, contributes to the didactic transposition of knowledge objects, arithmetic and geometric progressions, mobilizing intuitive categories of reasoning to improve students' proficiency rates, based on the training of teachers who work in secondary education. This training is expected to validate our hypothesis and expand the teaching field of action on this curricular content, thus enabling improvement in their proficiency rates, contemplating those involved in the teaching and learning processes, in addition to instigating future research from the perspective of educational innovation based on the presented results.

Keywords: Didactic Engineering. Theory of Didactic Situations. GeoGebra. Progressions.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 — Gráfico da Evolução das Proficiências Médias	18
Figura 2 — Mapa conceitual do desenho da pesquisa	26
Figura 3 — O Triângulo Didático de Brousseau	36
Figura 4 — sugestão de uso de tecnologia, calculadora, para o ensino de Progressões.....	48
Figura 5 — Suporte da Situação 1.....	55
Figura 6 — sequência para o valor de $n=10$	56
Figura 7 — Verificação do resultado obtido na parte 1 do problema.....	57
Figura 8 — Exemplo de resposta errada da parte 1.....	57
Figura 9 — As três partes da situação 1.....	58
Figura 10 — Verificação da aplicação da fórmula na situação 1	59
Figura 11 — Código QR de acesso a situação 1	60
Figura 12 — Protocolo de construção da situação 1.....	60
Figura 13 — Modelagem da situação 2 no GeoGebra.....	62
Figura 14 — Representação do terceiro número triangular no GeoGebra	63
Figura 15 — representação do número triangular quando $n=4$	63
Figura 16 — números triangulares menores do que 100	64
Figura 17 — Representação do oitavo número triangular no GeoGebra.....	65
Figura 18 — Janela de visualização 2D e 3D do número triangular.....	66
Figura 19 — Visualização da SD a partir de um <i>smartphone</i>	67
Figura 20 — Visualização gráfica da situação 3 no GeoGebra.....	69
Figura 21 — Visualização gráfica da situação 3 com valor de $r = -2$	70
Figura 22 — A visualização tem importante papel na coleta dos dados da situação.....	71
Figura 23 — Variação de “r” ao movimentar o controle deslizante	72
Figura 24 — Ponto A de interseção das duas funções quando $n=5$	73
Figura 25 — Aba GeoGebra Notas na versão online do software	74
Figura 26 — Código QR de acesso a construção	75
Figura 27 — Transposição Didática do problema no GeoGebra.....	76
Figura 28 — Aplicação do operador diferença Δ^1 em S.....	77
Figura 29 — Sequência S_2 na Janela de Visualização do GeoGebra.....	78
Figura 30 — Os 20 primeiros termos da PGA^2	79
Figura 31 — Demonstração da PGA^2 com a utilização do GeoGebra.....	80

Figura 32 — Situação inicial com as funções separadas no GeoGebra.....	82
Figura 33 — $f(x) = x \cdot 2^{1-x}$ como o produto entre $g(x)$ e $h(x)$	83
Figura 34 — Janela CAS do cálculo da soma dos termos da PAG.....	84
Figura 35 — Institucionalização do saber nas três janelas do GeoGebra.....	85
Figura 36 — Formulação da Situação 1.....	94
Figura 37 — Situação 1 resolvida pelos participantes na fase de validação.....	96
Figura 38 — Registro do erro de configuração do controle deslizante.....	96
Figura 39 — Configuração do controle deslizante.....	97
Figura 40 — Constatação do erro pelo participante S_2	100
Figura 41 — Registro do erro do participante S_5	101
Figura 42 — Registro da tentativa de resposta do Participante S_5	103
Figura 43 — Constatação dos participantes do 13º número triangular	104
Figura 44 — Resposta do participante S_5	104
Figura 45 — Resposta do participante S_3	105
Figura 46 — Resposta do participante S_1	105
Figura 47 — Resposta do participante S_4	106
Figura 48 — Institucionalização da situação 2 no GeoGebra.....	108
Figura 49 — Resolução pela Janela CAS, baseando-se na Janela de Visualização.....	110
Figura 50 — formulação da situação 3	111
Figura 51 — Tentativa inicial do sujeito S_2	112
Figura 52 — Institucionalização pela Janela CAS.....	113
Figura 53 — Institucionalização pela aba Planilha e Janela de Visualização.....	114
Figura 54 — Registro da interação com o controle deslizante do sujeito S_5	115
Figura 55 — resposta do item a da situação 4 de um dos sujeitos	117
Figura 56 — Fase de validação da situação 4	118
Figura 57 — Desenvolvimento da fase de validação da situação 4	119
Figura 58 — Validação do sujeito S_2 da situação 4	119
Figura 59 — Validação do sujeito S_5 da situação 4	120
Figura 60 — Institucionalização da situação 4 mostrando o conceito de PGA	121
Figura 61 — Tela do sujeito S_1 interagindo com o problema na fase de ação.....	123
Figura 62 — fase de formulação com a participação do professor pesquisador.....	124
Figura 63 — resultado da primeira parte do problema concluído.....	124
Figura 64 — Tentativa de solução (validação) do sujeito S_1	126

Figura 65 — Validação do sujeito S_1 na Janela CAS.....	126
Figura 66 — Validação do sujeito S_2 da segunda parte da situação 5	127
Figura 67 — Janela CAS da validação do sujeito S_2	128
Figura 68 — Validação do sujeito S_3	129
Figura 69 — Institucionalização da situação 5	130
Figura 70 — Institucionalização da soma dos termos da PAG	131

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 — Perguntas do formulário de escolha dos participantes da pesquisa	32
Quadro 2 — Fases dialéticas da TSD	36
Quadro 3 — Coleções de livros didáticos analisados	43
Quadro 4 — Divisão da obra, Novo Olhar: Matemática em unidades e capítulos	45
Quadro 5 — Divisão da obra, Matemática 1 em unidades e capítulos	46
Quadro 6 — Divisão da obra, Matemática: Contexto & Aplicação em unidades e capítulos	47
Quadro 7 — Planejamento das atividades executadas	87
Quadro 8 — Caracterização dos sujeitos Participantes	91

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PISA	Programa Internacional de Avaliação Estudantil
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
TSD	Teoria das Situações Didáticas
ED	Engenharia Didática
PA	Progressão Aritmética
PG	Progressão Geométrica
DM	Didática da Matemática
SEFOR 3	Superintendência das Escolas Estaduais de Fortaleza, Região 3
EEEP	Escola Estadual de Educação Profissional
IFCE	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
PAG	Progressão Aritmético-Geométrica
PGA	Progressão Geométrico-Aritmética
PGA ²	Progressão Geométrico-Aritmética de Segunda Ordem
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PNLEM	Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
SEDUC – CE	Secretaria de Educação do Estado do Ceará
CEP	Comitê de Ética em Pesquisa
CAS	Janela de Cálculo Simbólico

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	17
2	A ENGENHARIA DIDÁTICA (ED) COMO PROPOSTA DE METODOLOGIA DE PESQUISA	25
2.1	Análises preliminares.....	27
2.2	Concepção e Análise a priori.....	27
2.3	Experimentação.....	28
2.4	Análise a posteriori e Validação.....	28
2.5	Tipo de pesquisa.....	29
2.6	Lócus da Pesquisa.....	30
2.7	Sujeitos	31
3	ANÁLISE PRELIMINAR: AS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS NOS LIVROS DIDÁTICOS	34
3.1	A Teoria das Situações Didáticas	34
3.1.1	Progressão Aritmética (PA)	37
3.1.2	Progressão Geométrica (PG)	39
3.2	Os Livros Didáticos de Matemática do Ensino Médio	41
3.2.1	Categoria de análise 1: distribuição do conteúdo	44
3.2.2	Categoria de análise 2: mídias sugeridas para o estudo de Progressões	48
3.2.3	Categoria de análise 3: forma de abordagem do assunto.....	50
3.3	A formação continuada como estratégia de melhoria.....	51
4	CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS...	54
4.1	Os números quadrados e a PA de segunda ordem na Situação 1	55
4.2	Os números triangulares na Situação 2	61
4.3	O problema da PAPG na Situação 3	68
4.4	A PGA^2 na perspectiva da visualização gráfica na Situação 4	75
4.5	A PAG sob o viés da visualização gráfica na Situação 5	81
5	EXPERIMENTAÇÃO: A VISUALIZAÇÃO GRÁFICA DAS PROGRESSÕES À LUZ DA TSD	86
5.1	O perfil do lócus e dos Sujeitos	89
6	ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO	92
6.1	Análise da Experimentação da Situação 1	92

6.2	Análise da Experimentação da Situação 2	99
6.3	Análise da Experimentação da Situação 3	109
6.4	Análise da Experimentação da Situação 4	114
6.5	Análise da Experimentação da Situação 5	122
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	135
	REFERÊNCIAS	140
	APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	143
	APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO DE INICIAL DOS SUJEITOS PARTICIPANTES DA PESQUISA	148
	APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO FINAL	152
	ANEXO A – PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP	154
	ANEXO B – Livro Matemática Completa	157
	ANEXO C – Livro Matemática Ensino Médio	158
	ANEXO D – Novo Olhar Matemática	159
	ANEXO E – Livro Contato Matemática	160
	ANEXO F – Livro Matemática 1	161
	ANEXO G – Matemática Contexto & Aplicações	162

1. INTRODUÇÃO

O Ensino de Matemática no nível médio, em relação aos livros didáticos, carrega uma grande responsabilidade social, política e filosófica, do ponto de vista da aprendizagem e da abordagem dos seus conteúdos. Conforme Queiroz (2020, p. 25) “o ensino de matemática é pautado pelos conteúdos inseridos nos livros e, raramente, apresenta-se uma matemática fora dos padrões estabelecidos pelos livros”.

Em relação ao ensino de sequências, cerne deste trabalho, Lima (2019, p. 47) afirma que “esse conteúdo geralmente é introduzido no Ensino Fundamental através de atividades sobre padrões numéricos e geométricos.” O autor ressalta que é possível observar a sua existência e seus padrões de forma natural em diversas situações do cotidiano. Com isso, estabelece-se um modelo de ensino acerca daquilo que deve ser ensinado e como estes conteúdos são abordados pelos docentes, seguindo a lógica de explanação, conforme os livros apresentam.

Nessa lógica, apresenta-se que a abordagem do conteúdo de Progressões, apesar de ser um assunto indispensável, apresenta lacunas em seu estudo, especialmente nos livros didáticos do nível médio. Conforme Lima (2019, p. 48) “de maneira mais formal, os livros didáticos começam a abordar as Sequências Numéricas no 1º ano do Ensino Médio, se restringindo na maioria das vezes aos casos particulares de Progressão Aritmética e Progressão Geométrica”, o que revela a necessidade de um estudo mais aprofundado acerca dessa abordagem conteudista.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a escola, face às exigências da Educação Básica, precisa ser reinventada, priorizando processos capazes de gerar sujeitos criativos, participativos, cooperativos, autônomos e preparados para a sociedade (BRASIL, 2018). Contudo, a escola tem enfrentado dificuldades para tornar os conteúdos escolares interessantes, devido à falta de significado em sua apresentação durante o processo de ensino e de aprendizagem.

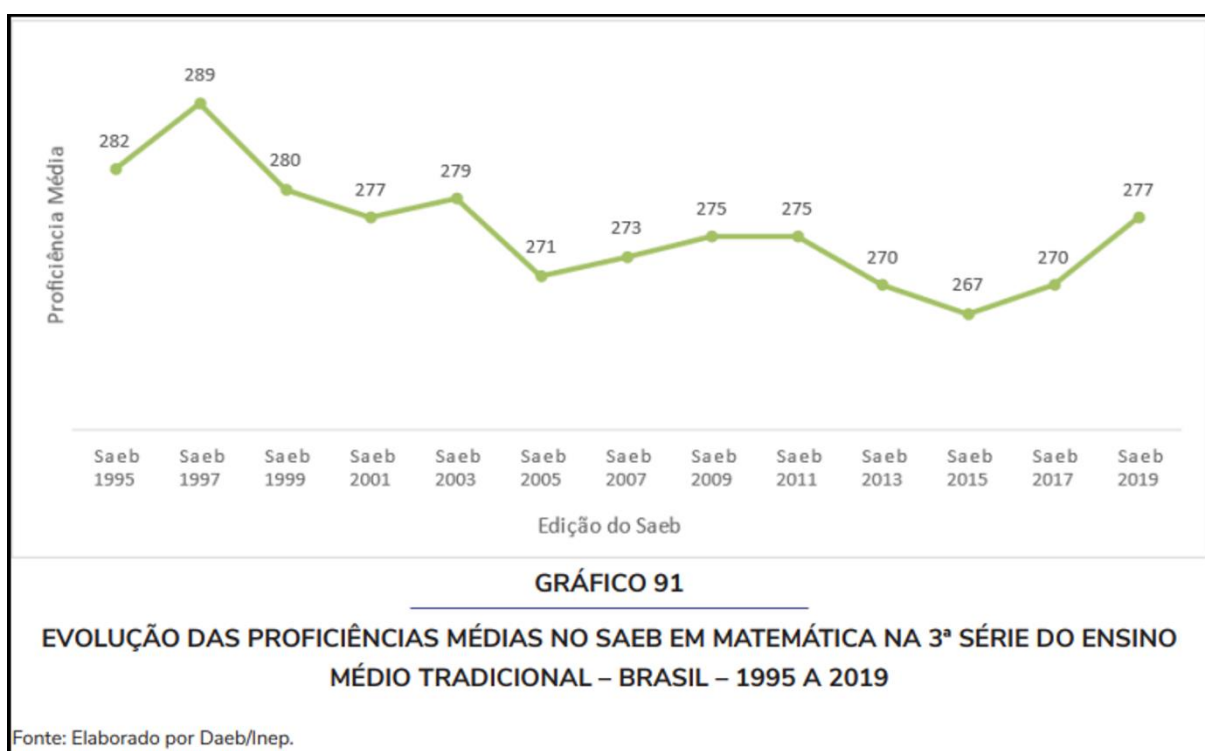
Na contemporaneidade, ensinar Matemática é um dos obstáculos enfrentados pelos docentes, visto que as competências do século XXI, necessárias para o exercício da cidadania, trazem em seu bojo uma demanda pela percepção das diversas aplicações cotidianas que, quase sempre, estão relacionadas ao conhecimento tecnológico e imbricadas de um crescente grau de complexidade.

Os baixos índices de proficiência apresentados pela última edição do Programa Internacional de Avaliação Estudantil (PISA) no Brasil, divulgados pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) em dezembro de 2019, colocam o Brasil no 53º lugar entre os 65 países avaliados. Isto tem sido motivo de constante preocupação

no meio educacional, uma vez que estão aquém do mínimo exigido para pleno exercício da cidadania, pois nesse ano apenas 18,5% estavam no nível adequado (BRASIL, 2019).

Outra avaliação importante, o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), que é uma avaliação em larga escala e que oferece subsídios para a elaboração, o monitoramento e o aprimoramento de políticas educacionais (BRASIL, 2021), fornece dados que aliados às taxas de abandono, reprovação e aprovação compõem o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), (BRASIL, 2021). Segundo o INEP, (BRASIL, 2021), os resultados do SAEB são apresentados em relatórios que refletem os níveis de aprendizagem demonstrados pelo conjunto de estudantes. Esses níveis são descritos em escalas de proficiência para cada uma das áreas e etapas avaliada. Assim, verificam-se os níveis de aprendizagem, avaliando-se a qualidade do ensino em cada etapa. Neste caso apresentamos na Figura 1 os resultados no nível médio, referente ao ensino de matemática na terceira séries:

Figura 1: Gráfico da Evolução das Proficiências Médias¹



Fonte: Brasil (2021).

¹Disponível em:

https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2019/resultados/relatorio_de_resultados_do_saeb_2019_volume_1.pdf

Os dados revelam que em mais de dez anos não houve mudanças significativas no crescimento dos estudantes, apesar dos avanços tecnológicos voltados para o ensino de matemática e as novas metodologias que priorizam estes processos de ensino.

A busca por novas formas de ensinar matemática tem sido objeto de pesquisa em Instituições de Ensino Superior (IES) de todo o país. Barbosa e Alves (2018, p. 88) ratificam essa necessidade quando afirmam que “trabalhar Matemática com métodos inovadores sempre foi e será tema de discussões, fazendo com que os professores se atualizem e aperfeiçoem suas aulas”.

Nessa perspectiva de melhoria e inovação educacional, as tecnologias digitais surgem como aliadas nos ambientes virtuais de ensino. No entanto, nos estudos de Oliveira (2019, p. 15) “a inserção de tecnologias digitais na sala de aula exigirá que o professor busque por novas metodologias de ensino e de aprendizagem que possibilitem a utilização destes recursos no ensino de maneira adequada”.

Com o uso de tecnologias digitais é possível desenvolver metodologias que visem a melhoria dos processos e preencham possíveis lacunas em relação aos conteúdos de difícil abordagem e compreensão, como as Progressões de Segunda Ordem, pouco exploradas nos livros didáticos.

As Progressões fazem parte da História da Matemática desde o surgimento dos números naturais e do processo de contagem, uma vez que elas representam por si só uma sequência. Nesse processo de evolução, podemos citar aqui as sequências dos Números Figurados que, segundo Roque (2012), podem ter sido as primeiras manifestações de Progressões Aritméticas de segunda ordem.

De acordo com Nobre (2018), os Números Figurados são números que podem ser representados por uma construção geométrica de pontos equidistantes. Se essa representação forma um polígono regular, esses números chamam-se Números Poligonais, dentre os quais destacamos os números triangulares, quadrados, pentagonais, hexagonais.

É importante salientar que, de forma geral, não é comum encontrar nos livros didáticos de Matemática da Educação Básica o tema “Progressões Aritméticas de ordem superior”, (NOBRE; ROCHA, 2018). No entanto, muitos problemas abordam este conteúdo, pois este está intimamente associado ao desenvolvimento dos processos de contagem e do desenvolvimento do raciocínio algébrico na Matemática.

Verifica-se ainda que não é comum encontrar uma abordagem que desenvolva o raciocínio geométrico, pela interpretação de gráficos, e sim um raciocínio mais voltado ao pensamento algébrico, pelo uso de fórmulas que geralmente trabalham na perspectiva da

repetição de passos a serem seguidos. Conforme Lima (2019, p. 49) “o estudo das Progressões Aritméticas e Geométricas no Ensino Médio se restringe a cálculos, fórmulas e resolução de atividades, muitas vezes sem sentido para o aluno, que se limita à resolução de problemas através de um ‘passo-a-passo’ dado pelo professor.”

Ocorre que a abordagem deste assunto em sala de aula tem sido um obstáculo, muitas vezes sendo um tema de difícil transposição, principalmente quando ocorre por meio de metodologias de ensino convencionais, uma vez que o acesso ao objeto de conhecimento, de acordo com a BNCC depende de uma forma mais elaborada.

Como possibilidade de tentar resolver essa carência metodológica apresenta-se nesse cenário a inserção da Teoria das Situações Didáticas (TSD) (Brousseau, 1998), que consiste em uma teoria de ensino capaz de melhorar a interação entre o professor, o aluno e o saber. De acordo com Alves (2021, p. 121), afirma que a TSD:

De modo prosaico, busca constituir um campo epistêmico e teórico, consubstanciado nas interações do trinômio clássico estudante (de Matemática)-professor (de Matemática)-conhecimento matemático. Dessa forma, a TSD proporciona a modelização de situação de ensino por intermédio da simplificação e da conceptualização de modelos e de categorias explicativas, gestadas e originadas da esfera de práticas do professor de Matemática e dos estudantes. (ALVES, 2021, p. 121).

Assim, baseados na premissa de que há uma carência conteudista e metodológica nos livros didáticos, justifica-se esse trabalho a partir da busca de uma nova abordagem metodológica subsidiada pelo GeoGebra e que contribua para a melhoria nos processos de ensino e aprendizagem dos conteúdos de PA e PG.

Nesse estudo gera-se a hipótese de que a TSD, como proposta metodológica, aliada a um artefato tecnológico, no caso o GeoGebra, pode contribuir na transposição didática das Progressões Aritméticas e Geométricas, mobilizando diferentes modelos de raciocínio para a melhora dos índices de proficiência dos alunos, a partir da formação de professores de Matemática no Ensino Médio.

Emerge, desse modo, a seguinte questão: **quais as contribuições da interpretação gráfica na perspectiva da TSD e da Engenharia Didática (ED), com o auxílio do GeoGebra, para o ensino de Progressões Aritméticas e Geométricas de segunda ordem?**

Com o intuito de colocar o professor na condição de aprendente ativo e possibilitar a inserção de recursos tecnológicos em sala de aula, aliados às novas propostas de ensino, este trabalho será conduzido a partir de teorias francesas da Didática da Matemática, que são a

Teoria das Situações Didáticas (TSD), de Guy Brousseau e a Engenharia Didática (ED), difundida por Michèle Artigue (1988).

Na tentativa de buscar respostas à questão norteadora elencamos os objetivos geral e específicos. O objetivo geral dessa pesquisa consiste em **analisar as contribuições da Teoria das Situações Didáticas e da Engenharia Didática para a interpretação dos gráficos das Progressões Aritméticas e Geométricas de ordem superior, subsidiadas pelo software GeoGebra**. Para alcançar o objetivo geral foram estruturados os seguintes objetivos específicos:

- (i) Identificar os recursos metodológicos e didáticos usados para o desenvolvimento do ensino de PA e PG nos livros de matemática do Ensino Médio;
- (ii) Apresentar uma sequência didática formativa para o ensino de progressões, fundamentada na TSD e ED e subsidiada pelo GeoGebra;
- (iii) Analisar as contribuições da TSD e ED associadas ao uso do GeoGebra para o ensino da PA e PG por meio de uma sequência didática formativa.

Nessa perspectiva investigativa propomos a resolução de cinco questões que envolvem o conteúdo de Progressões de ordem superior, demandando do sujeito o emprego de estratégias, raciocínios e argumentos matemáticos diferentes do ensino tradicional. Cabe salientar a necessidade de ampliação do acesso a este objeto de conhecimento com a utilização do *software* GeoGebra, para a realização da interpretação geométrica dos gráficos gerados pelos termos dessas sequências.

A escolha pelo *software* se deu devido a sua ampla utilização em pesquisas desse tipo, envolvendo conteúdos matemáticos. O GeoGebra é um *software* e disponível em diversas plataformas, o que facilita a sua utilização, tanto por parte dos pesquisadores quanto dos sujeitos da pesquisa.

Sousa, Alves e Fontenele (2020) afirmam que o GeoGebra é um *software* livre, gratuito, com um grande leque de utilização em diversas mídias disponíveis, além de possuir uma grande comunidade engajada em uma espécie de rede de troca de informações, com a finalidade de difundir conhecimentos visando melhorias do ensino. Nessa rede são disponibilizados trabalhos diversos de forma gratuita para *downloads*, facilitando o trabalho de professores interessados em replicar as construções em suas escolas (SOUZA; ALVES; FONTENELE, 2020).

Já para o autor Andrade (2017) o uso do referido *software* satisfaz os anseios tanto do ensino quanto da aprendizagem de matemática, e ainda reforça que ele oferece vantagens, por integrar na mesma interface conceitos matemáticos de álgebra e geometria, permitindo a sua utilização nos mais variados níveis de ensino.

Para dar prosseguimento a esse processo investigativo foi realizado um estudo conceitual sobre as Progressões Aritméticas e Geométricas, nos seus aspectos teóricos e metodológicos. Além disso, apresentaram-se os aspectos da TSD e a sua importância para este estudo, como teoria de ensino, assim como a ED como metodologia de pesquisa.

A ED é uma metodologia oriunda dos estudos em Didática da Matemática na França que, segundo Alves (2017, p. 87), “permite, dentre outros aspectos, a obtenção de dados científicos visando o aperfeiçoamento do ensino e da aprendizagem de determinado conteúdo ou objeto matemático” e norteou o desenvolvimento deste trabalho a partir de suas quatro fases - Análises Preliminares, Análise à *Priori*, Experimentação e Análise à *Posteriori* e validação.

Cada fase da ED apresenta características próprias e compõem o escopo da metodologia, conforme se verifica no trabalho de Lima (2019), que discorre sobre cada uma delas de forma sintetizada. Apresentamos uma breve apresentação nos parágrafos subsequentes.

Na fase das Análises Preliminares ocorre o levantamento dos dados sobre os obstáculos encontrados durante a pesquisa, assim como são traçados os questionamentos e levantamentos de hipóteses referentes aos aspectos metodológicos (LIMA, 2019).

A fase seguinte é a Análise à *Priori*, que objetiva responder ou validar as hipóteses que foram levantadas na fase anterior. Segundo a autora “o professor deve criar situações-problema, controláveis por ele, onde possa gerar desequilíbrios, de forma que os discentes atinjam o objetivo, que é o aprendizado” (LIMA, 2019, p. 35). Assim, esta fase se configura como sendo a parte onde se realiza o planejamento da próxima fase, que será efetivamente o campo da prática.

Já na Experimentação realiza-se o experimento planejado, buscando atingir os objetivos e analisando as condições nas quais a pesquisa será realizada. Para isso, estabelece-se a configuração de um contrato didático entre o professor e os sujeitos, ocorrido antes de se realizar a aplicação da sequência didática planejada. Em seguida, dá-se início ao experimento que deve ser devidamente registrado para fins de coleta dos dados, que servirão de base para a realização da próxima fase.

A última fase da ED é a Análise a *Posteriori* e Validação, na qual ocorre o tratamento e análise dos dados obtidos na experimentação através dos registros da pesquisa. Lima (2019, p. 36) afirma que nessa fase “a partir da comparação dos dados obtidos na análise a priori e na análise a posteriori, as hipóteses propostas durante a investigação são analisadas para que seja identificado se elas são verificadas. Concluída essa etapa, os dados são validados ou refutados”.

Este trabalho está dividido em sete seções, sendo a primeira esta introdução, onde são apresentados os primeiros levantamentos sobre a pesquisa e a sua justificativa, bem como seus

objetivos geral e específicos. Na segunda seção temos a metodologia de pesquisa Engenharia Didática, que consta de quatro fases e que a trazemos em outras subseções.

A seção dois está dividida nos seguintes subtópicos: 2.1 análises preliminares; 2.2 concepção e análise a priori; 2.3 experimentação; 2.4 análise a posteriori e validação; 2.5 tipo de pesquisa; 2.6 locus da pesquisa e 2.7 sujeitos. Na fase de Análises Preliminares foram abordados os conceitos referentes às progressões aritméticas e geométricas, bem como uma análise dos Livros didáticos de matemática utilizados por professores do ensino médio, levando-se em conta o modelo de abordagem destas sequências numéricas, seguindo-se critérios de análise que permitem identificar aspectos metodológicos, cognitivos e didáticos.

Assim, na terceira seção deste trabalho apresenta-se o referencial teórico que serviu de base para a investigação deste tema. Para isso, desenvolvemos algumas definições sobre as progressões e, além disso, uma análise sobre os aspectos metodológicos presentes nos livros didáticos do ensino médio. Partimos de três categorias levantadas, segundo a análise de conteúdo de Bardin (1977): mídias sugeridas, a visualização matemática dos problemas e a disposição dos conteúdos na distribuição dos capítulos, como forma de abordagem metodológica dos conceitos referentes ao assunto das progressões. Isto foi estabelecido mais adiante, na análise dos livros didáticos. Ainda na terceira seção, aborda-se a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (1988) como teoria de ensino, que serviu de apoio para a experimentação da Engenharia Didática empregada neste trabalho.

Na terceira seção, o trabalho está subdividido nos seguintes subtópicos: 3.1 A Teoria das Situações Didáticas (TSD), Reflexões sobre a Progressão Aritmética (PA) e a Progressão Geométrica (PG); 3.1.1 Progressão Aritmética (PA); 3.1.2 Progressão Geométrica (PG); 3.2 Os Livros Didáticos de Matemática do Ensino Médio, que se subdivide em: 3.2.1 Categoria de análise 1: Mídias sugeridas; 3.2.2 Categoria de análise 2: Distribuição do conteúdo, 3.2.3 Categoria de análise 3: Forma de abordagem do assunto e para finalizar essa seção um tópico sobre a importância da formação continuada no índice 3.3.

Na quarta seção, trazemos a elaboração do momento formativo a ser aplicado com os sujeitos. Nesta etapa, utilizamos o aporte das fases dialéticas da TSD, acerca das impressões dos sujeitos, bem como o levantamento de hipóteses acerca do que se espera da interpretação dos gráficos das progressões. Esta seção quatro está subdividida em dois subtópicos que são: 4.1 Planejamento do curso e 4.2 Elaboração das Situações Didáticas, que se encontram dentro da fase de Análise à *Priori* da ED.

Segundo essa linha de desenvolvimento, na quinta seção ocorre a descrição do experimento da formação, referente à fase de experimentação da ED. Nesta etapa, registramos

o processo de coleta de dados para que seja realizada na seção 6 uma análise a *posteriori*, com o confronto das hipóteses levantadas com os dados coletados, a fim de se verificar a veracidade (ou não) das hipóteses. Finalmente, temos a seção 7, onde apresentamos as considerações finais.

Em busca de dar sentido ao processo investigativo, apresenta-se a seguir a metodologia empregada na tentativa de responder aos objetivos apresentados.

2 A ENGENHARIA DIDÁTICA (ED) COMO METODOLOGIA DE PESQUISA

Para que um conhecimento possa ser considerado científico, torna-se necessário identificar as operações mentais e técnicas que possibilitam a sua verificação (GIL, 1999). Dessa forma, o método que proporciona as bases lógicas para essa investigação é o método indutivo. Nesse método, parte-se de um ponto de observação particular para uma dedução geral, através da generalização de observações realísticas de casos concretos e comprovadamente verdadeiros (GIL, 2008).

A metodologia adotada para tanto será a Engenharia Didática (ED). A ED é uma metodologia de pesquisa, desenvolvida por Michelle Artigue, oriunda da vertente francesa da Didática da Matemática. Ela possui quatro fases: Análises preliminares, Concepção e Análise a priori, Experimentação e Análise a posteriori e validação (ARTIGUE, 1995).

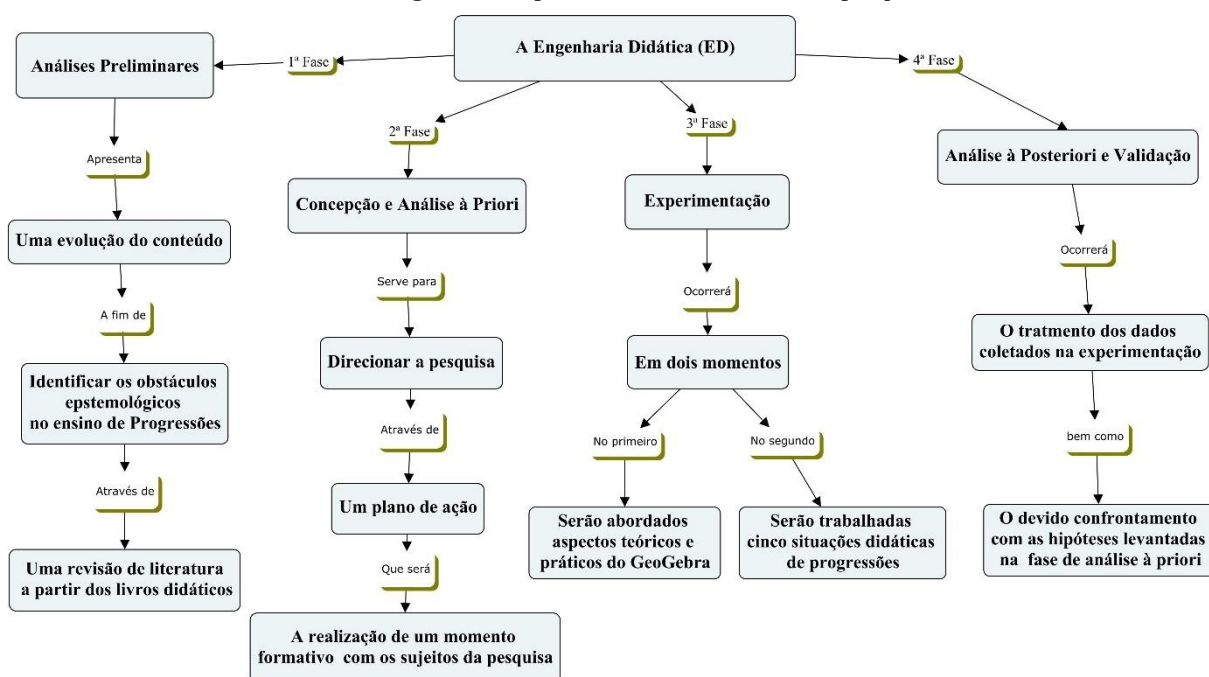
Para este trabalho será utilizada a ED de segunda geração, que direciona o objetivo de investigação à formação docente. Segundo Artigue (1995), a ED é uma metodologia de pesquisa que possui as características semelhantes ao trabalho de um engenheiro, do ponto de vista do planejamento de um projeto, pois o professor busca realizar um trabalho e precisa dominar o conhecimento relativo à sua realização. Assim, ele submete seu planejamento a um controle científico que deve prever possíveis entraves e saídas para cada problema proposto. (LIMA, 2019).

Destaca-se também por representar um método que visa alcançar um objetivo pré-determinado, indicando nesse caminho os possíveis obstáculos a serem superados, tornando-se para o trabalho do pesquisador uma espécie de guia, que tem a finalidade de ajudar a organizar sua prática (POMMER, 2013).

Nesse contexto, a ED é mostrada com as suas características no que se denomina como o desenho da pesquisa que segundo Sampierre, Collado e Lúcio (2013) “O termo desenho se refere ao plano de ação ou estratégia criado para obter a informação que se deseja” (SAMPIERRE; COLLADO; LÚCIO, 2013, p. 140). Esta pesquisa foi realizada seguindo os pressupostos da Engenharia Didática nas suas quatro fases, conforme já exposto.

A metodologia de pesquisa ED foi alicerçada na Teoria das Situações Didáticas, que consta de quatro fases de desenvolvimento para a evolução do aprendizado do estudante, conforme exposto no decorrer do trabalho. Para ilustrar o desenho da pesquisa, apresentamos um mapa na Figura 2:

Figura 2: Mapa conceitual do desenho da pesquisa



Fonte: Pesquisa Direta

Na figura 2, tem-se uma visão geral de como está subdividida as fases dessa pesquisa e que seguem uma ordem da esquerda para a direita na qual estão presentes a organização das quatro fases da ED e mostra um mapa conceitual de cada fase seguindo-se as setas indicativas e realizando-se a leitura conforme indicação destas com a fase de análises preliminares na primeira coluna de quadros da imagem, finalizando com uma revisão de literatura em livros didáticos e artigos sobre o ensino de progressões.

Durante a fase de análise a priori foram levantadas as hipóteses sobre as impressões dos sujeitos, bem como a realização do planejamento das situações utilizadas na experimentação com os sujeitos, que ocorreu na terceira fase da ED e por último ocorreu na quarta coluna a fase de análise a posteriori, conforme descrito na figura 2 acima. A seguir apresentam-se as fases do desenvolvimento desta pesquisa, de acordo com os pressupostos da ED.

Dentro das quatro fases da ED, ocorreu uma evolução da pesquisa a partir da concepção do objeto de estudo, que se justifica na fase de análises preliminares com um levantamento histórico, epistemológico e didático, com ênfase nas metodologias de ensino adotadas no referencial teórico analisado.

Em seguida ocorreram a concepção e análise a *priori*, que visou realizar uma previsão dos comportamentos esperados no decorrer da experimentação e coleta de dados. Por fim, na fase final, ocorreram as análises a *posteriori* com a validação interna desses dados pois, na ED

essa validação pode se dar de forma interna com o confronto dos dados entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, podendo ocorrer ou não essa validação.

2.1 Análises preliminares

Conforme Artigue (1995), nessa fase são realizadas algumas análises prévias, com o objetivo de conhecer o funcionamento do ensino de certo conteúdo matemático, a fim de propor uma intervenção que modifique sua abordagem na sala de aula usual. A fase das Análises Preliminares apresenta uma evolução do conteúdo a ser estudado.

É nesta fase que se realiza uma revisão de literatura, envolvendo as condições e contextos presentes nos vários níveis de produção didática e no ambiente onde ocorrerá a pesquisa, assim como uma análise geral quanto aos aspectos histórico-epistemológicos dos assuntos do ensino que serão trabalhados e os seus efeitos. Consoante exposto em Alves (2017, p. 88) a respeito da ED, considera-se:

De modo sistemático, conforme Artigue (1996, p. 249-250), nesta etapa consideramos: (i) uma análise epistemológica dos conteúdos visados no ensino de determinado conteúdo; (ii) análise dos entraves no campo de ensino em que pretendemos realizar uma ação didática; (iii) exame das concepções e os conhecimentos prévios dos alunos e, por fim, análise do ensino atual (inspeção dos compêndios especializados e livros adotados) e seus efeitos no que tange o ensino. (ALVES, 2017, p. 88).

Nesse sentido, nesta fase é realizada uma revisão de literatura de modo a fundamentar teoricamente a pesquisa, trazendo os principais autores e teóricos dos assuntos abordados, a fim de identificar os obstáculos epistemológicos existentes no ensino de progressões de segunda ordem no nível médio a partir dos livros didáticos.

Almouloud (2007) considera que essa fase se dá pela identificação dos problemas que estão relacionados com os processos de ensino e aprendizagem do objeto de estudo em suas dimensões didática, cognitiva e epistemológica. Nesse sentido, o terceiro capítulo traz um estudo relativo ao objeto de conhecimento a partir dos livros didáticos utilizados pelos professores participantes da pesquisa.

2.2 Concepção e Análise *a priori*

A segunda fase da ED, segundo Santos e Alves (2017, p. 450), serve para buscar a definição de variáveis “a fim de direcionar a pesquisa e propor um plano de ação”. Tanto a

primeira fase das Análises Preliminares quanto esta, funcionam como mecanismos de orientação para o desenvolvimento da terceira fase, ou seja, a experimentação.

Portanto, nesta fase foi realizada uma primeira observação dos sujeitos da pesquisa com o intuito de fazer um planejamento da formação a ser trabalhada, verificando de que forma esses sujeitos se planejam para o conteúdo que está sendo trabalhado em sala de aula. Foram observados em seus planejamentos aspectos como metodologia, recursos didáticos e postura docente em sala de aula. Após esta etapa, foram elaborados os planos de aula que foram usados durante as situações didáticas na formação proposta, para isso foram utilizados os recursos oferecidos pela escola como computadores, *Datashow* e demais materiais didáticos como pinceis, apagadores, régua e etc.

2.3 Experimentação

A experimentação é a etapa de aplicação das situações didáticas e coleta dos dados relativos à pesquisa. Nesta coleta, podemos fazer uso de vários instrumentais como relatórios, registros fotográficos, produções dos sujeitos, dentre outros recursos, a fim de formarmos o corpus da pesquisa (SANTOS et al., 2017, p. 450).

Nesta fase, implementamos uma formação presencial em dois momentos, de acordo com o especificado no especificado no quadro 7, abordando a resolução de questões referentes ao conteúdo de Progressões de ordem superior com o auxílio do GeoGebra, a fim de alcançar o terceiro objetivo específico da pesquisa.

No primeiro momento foram abordados aspectos teóricos e práticos do GeoGebra. No segundo momento, foram apresentadas cinco situações didáticas envolvendo questões do conteúdo de progressão aritmética e geométrica. Os encontros foram gravados com a autorização dos sujeitos e, ao fim do percurso, foi realizado um momento avaliativo da oficina em que os sujeitos se posicionaram sobre as contribuições que os gráficos das progressões trouxeram para o ensino desse assunto.

2.4 Análise a posteriori e Validação

Conforme Artigue (1995), esta fase se caracteriza pelo tratamento dos dados coletados. Nela também ocorre a devida confrontação com a análise à priori, o que permite a interpretação dos resultados e análise sobre as condições em que as questões levantadas foram solucionadas. Assim, pode-se analisar se e quando ocorrem as contribuições para a superação do problema.

Nessa fase foram analisados os dados coletados na Experimentação, durante a análise a priori, nas gravações das situações didáticas e no formulário de avaliação da oficina. Esses dados foram confrontados e validados com os estudos encontrados durante as análises preliminares.

A partir do exposto, apresentam-se a seguir o tipo, os sujeitos, o *lócus* e o desenho da pesquisa a ser desenvolvida.

2.5 Tipo de pesquisa

Quanto a abordagem do problema, este trabalho privilegia uma pesquisa do tipo qualitativa, pois os dados coletados serão analisados através do método indutivo e não serão utilizadas técnicas estatísticas. Conforme explicam Prodanov e Freitas (2013, p. 70) nas pesquisas qualitativas “os pesquisadores tendem a analisar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são os focos principais de abordagem”. Nesse sentido, os autores reforçam a ideia de que essa análise é suficiente para se chegar a um resultado satisfatório, considerando-se o universo de dados a serem analisados.

Quanto à sua natureza, ela é básica pois segundo Prodanov e Freitas (2013, p. 126) essa pesquisa “envolve verdades e interesses universais, procurando gerar conhecimentos novos e úteis para o avanço da ciência”. Assim, com esse trabalho pretende-se contribuir para o avanço da ciência a partir de resultados que irão gerar novas discussões em relação aos processos de ensino.

Quanto aos objetivos a serem alcançados, temos aqui uma pesquisa exploratória e explicativa, pois na visão de Prodanov e Freitas (2013), este modelo de pesquisa tem a finalidade de proporcionar uma maior familiaridade com o problema, explicitando-o ou levantando hipóteses a seu respeito, ademais também “procura identificar os fatores que causam um determinado fenômeno, aprofundando o conhecimento da realidade” (PRODANOV; FREITAS, 2013, p. 127). Portanto, essa pesquisa enfatiza a utilização do *software* GeoGebra, proporcionando essa familiaridade com os processos de ensino baseados na metodologia adotada, uma vez que serão observadas e descritas as impressões dos sujeitos sobre o objeto a ser estudado.

Em relação aos procedimentos, esta é uma pesquisa-participante, já que se refere a uma proposta de formação continuada do conteúdo de sequências lineares de segunda ordem, com o aporte tecnológico do GeoGebra para a transposição didática. Assim, na visão de Prodanov e

Freitas (2013, p. 128) a pesquisa é participante “quando é desenvolvida a partir da interação entre pesquisadores e membros das situações investigadas”.

Segundo Gil (2008, p. 31), “a pesquisa participante se caracteriza pelo envolvimento dos pesquisadores e dos pesquisados no processo de pesquisa”. Além disso, a pesquisa participante “mostra-se bastante comprometida com a minimização da relação entre dirigentes e dirigidos e por essa razão tem-se voltado sobretudo para a investigação junto a grupos desfavorecidos, tais como os constituídos por operários, camponeses, índios, etc.” (GIL, 2002, p. 56), o que se aplica perfeitamente na pesquisa com professores.

A pesquisa é exploratória, pois, segundo Prodanov e Freitas (2013), tem a finalidade de proporcionar mais informações sobre o objeto de estudo, o que possibilita um maior delineamento e facilita a delimitação do tema de pesquisa, já que possui um planejamento bem flexível e permite o estudo sob diversos ângulos e aspectos. É também descritiva, pois “visa descrever as características de determinada população ou fenômeno, ou o estabelecimento de relações entre variáveis. Envolve o uso de técnicas padronizadas de coleta de dados: questionário e observação sistemática” (PRODANOV; FREITAS, 2013, p. 52).

Segundo Marconi e Lakatos (2017, p. 79) “o método qualitativo ajuda a entender o processo de experimentação”. Já de acordo com Gil (2002, p. 133) “a análise qualitativa depende de muitos fatores, tais como a natureza dos dados coletados, a extensão da amostra, os instrumentos de pesquisa e os pressupostos teóricos que nortearam a investigação”. Nesse sentido, define-se uma abordagem que norteia o tratamento dos dados coletados dentro dessa abordagem.

Prodanov e Freitas (2013, p. 126) classificam as pesquisas de natureza básica como aquelas que “envolvem verdades e interesses universais, procurando gerar conhecimentos novos úteis para o avanço da ciência”. Nesse sentido esta pesquisa propõe um estudo inovador e pouco explorado.

Destaca-se também que a coleta de dados foi feita através de gravações de áudio, vídeos e registros fotográficos, bem como a coleta de informações através do preenchimento de formulários com a devida autorização de todos os participantes. Após esses registros, seu acesso se deu somente pelo pesquisador e seus orientadores para fins de análise.

A seguir descreve-se o lócus e os critérios para a seleção dos sujeitos da pesquisa.

2.6 Lócus da pesquisa

A pesquisa foi realizada presencialmente em uma escola pública da rede estadual de Ensino Médio, da Superintendência das Escolas Estaduais de Fortaleza, Região 3 (SEFOR 3) em Fortaleza-CE, em consonância com os sujeitos e com a direção. A escolha se deu pela localização da escola num bairro de periferia e por ser uma das únicas escolas da região com Ensino Médio pertencentes à SEFOR 3. Os momentos formativos ocorreram nas dependências da escola no segundo semestre de 2022.

Ressalta-se que, dada a crise epidemiológica ainda sob cuidados e restrição de proximidade decorrentes da pandemia do COVID-19, tomamos as devidas precauções sanitárias, não oferecendo maiores riscos à saúde dos participantes. Adotamos algumas medidas preventivas como o distanciamento social e procedimentos básicos de higiene, com o fornecimento de máscaras descartáveis e álcool em gel para os participantes, conforme orientação dos órgãos competentes, no entanto, nem todos optaram por utilizarem esses materiais, já que o risco de contaminação era baixo e a maioria dos participantes já haviam tomado a dose de reforço da vacina.

2.7 Sujeitos

A pesquisa foi realizada com quatro professores de matemática do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual do município de Fortaleza – CE, em exercício pleno da docência. A escolha seguiu critérios de inclusão e exclusão, como exposto a seguir.

O primeiro critério de inclusão dos sujeitos se deu pela lotação dos professores de matemática em turmas do 1º ano do Ensino Médio. Além disso, foi elaborado um questionário com quinze perguntas e que foi aplicado via formulário eletrônico cuja finalidade era conhecer os aspectos subjetivos dos sujeitos, cujo esboço está inserido nos apêndices deste trabalho. Dentre as perguntas, verificam-se aspectos formativos, experiência profissional e o interesse em participar da pesquisa como voluntário.

A utilização do questionário para selecionar os participantes se justifica pois, segundo Gil (2008), essa técnica apresenta uma série de vantagens, já que consegue atingir um universo maior de sujeitos, mesmo estes não estando presentes no espaço geográfico da escola, no caso em que não é possível realizar uma entrevista para se fazer essa escolha.

Assim como nos critérios de inclusão dos sujeitos, em que foram considerados aspectos subjetivos e de atuação no campo do trabalho, nos critérios de exclusão, foram observados os aspectos da não-voluntariedade e o enquadramento, ou seja, se o sujeito não pertence ao universo no qual a pesquisa está inserida, a saber, mesmo que seja professor de matemática,

mas não trabalha com a disciplina nessa unidade escolar ao qual a pesquisa foi realizada. Para tal, o professor de matemática em pleno exercício da profissão deve atuar nas turmas dos primeiros anos do ensino médio, especificamente.

Ao participar do estudo, o professor foi convidado a conhecer, em um primeiro momento, os aspectos teóricos e práticos do GeoGebra. Em um segundo momento, foram apresentadas duas situações didáticas envolvendo questões a partir do conteúdo de progressão aritmética e geométrica. Foram solicitados o preenchimento de formulários com aspectos subjetivos, bem como a gravação de imagens e áudios. Porém, ressalta-se que todas as informações foram tratadas sob sigilo, não havendo sob nenhuma hipótese a divulgação desses da identidade dos participantes.

Os momentos formativos ocorreram em duas etapas, definidas de acordo com a disponibilidade do grupo, de modo a não interferir no tempo pedagógico de direito dos alunos. Cada momento formativo teve duração de duas horas, totalizando 10 horas no geral e ocorreram no período da manhã. Os dados coletados serão armazenados pelo pesquisador por um prazo máximo de cinco anos, conforme orientações do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), onde este projeto de pesquisa teve aprovação.

O formulário foi proposto via grupo de mensagens instantâneas administrado pela própria direção da escola e constou das seguintes questões, conforme exposto no Quadro 1:

Quadro 1 – Perguntas do formulário para a escolha dos sujeitos da pesquisa.

QUESTIONÁRIO PARA A SELEÇÃO DOS SUJEITOS DA PESQUISA	
1	Você tem interesse em participar como voluntário nessa pesquisa? Caso sua resposta seja sim, prossiga.
2	Você conhece o <i>software</i> GeoGebra?
3	Se sim, já utilizou o <i>software</i> em suas aulas presenciais ou remotas?
4	Se você já utilizou algum recurso educacional digital em suas aulas presenciais?
5	Se você respondeu "Sim" ou "Raramente", cite-as. Caso tenha respondido "Não" escreva quais recursos você costuma utilizar em suas aulas.
6	Qual a sua formação inicial?
7	Em qual instituição de nível superior você concluiu a sua formação inicial?
8	Qual é o seu nível acadêmico?
9	Há quanto tempo você é professor?
10	Em quais séries(anos) você atua?
11	Qual(ais) disciplina(s) você leciona nesta unidade escolar?

12	Você tem conhecimento sobre a situação do Brasil no Ranking do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) em sua última edição?
13	Você tem conhecimento sobre a situação da escola em relação ao IDEB?
14	Você trabalha em mais de uma unidade escolar?
15	Durante as aulas remotas no período da pandemia, quais recursos pedagógicos digitais você utilizou com seus alunos para auxiliar o seu trabalho e facilitar a compreensão do conteúdo por eles?

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

O objetivo do formulário foi conhecer melhor o perfil dos sujeitos. Muito embora não exista uma regra exclusiva para a sua aplicação dentro do contexto de sala de aula, garantindo que a amostra esteja totalmente em conformidade com as especificações necessárias para o estudo proposto, a saber, esperam-se professores voluntários que atuem diretamente com turmas de primeiro ano do Ensino Médio na disciplina de Matemática e que tenham interesse na utilização do *software* GeoGebra para o ensino.

3. ANÁLISE PRELIMINAR: A TSD E AS PROGRESSÕES NOS LIVROS DIDÁTICOS

Nesta seção foram abordados os assuntos referentes às progressões aritméticas e geométricas, bem como uma análise dos livros didáticos e discussão teórica sobre a TSD.

Inicialmente foi desenvolvido um apanhado teórico sobre a TSD e logo em seguida os conceitos de progressões e suas características, suas definições e termos gerais, visando uma melhor compreensão sobre a transposição didática de fórmulas quando da utilização do GeoGebra.

Assim os estudos apresentados neste trabalho estão baseados em autores como, Lima et al. (2006), Oliveira (2019), Alves (2019) que tratam deste assunto com a utilização do referido *software* no mesmo contexto com a resolução de problemas, bem como Brousseau (1998) em relação a Teoria das Situações Didáticas (TSD), Artigue (1995) e Chevallard (1998) sobre a Transposição Didática, entre outros que tratam do tema em questão.

A seguir aborda-se a Teoria das Situações Didáticas (TSD), em seus aspectos históricos e epistemológicos. Esta teoria foi difundida por Brousseau e está alicerçada na Engenharia Didática, sendo também uma das vertentes da Didática da Matemática.

3.1 Teoria das Situações Didáticas

A Teoria das Situações didáticas (TSD) procura caracterizar uma situação em um processo de aprendizagem que ocorre em sala de aula envolvendo o aluno, o professor e o saber. Brousseau (1998) defende que o trabalho intelectual do aluno deve ser de caráter investigativo científico, considerando que o aluno deve conseguir formular, provar, construir modelos, linguagem e trocar essas informações com outros alunos.

Deve-se ressaltar que o importante não é a memorização de regras, teoremas e simplesmente fazer a sua aplicação quando for necessário. O mais importante é propor situações problema que valorizem o raciocínio, a criatividade e forneçam condições de desenvolver estratégias de pesquisa, contribuindo para que o aluno possa produzir conhecimento. As relações envolvendo o saber, o professor e o aluno em sala de aula devem propiciar condições para a consolidação da aprendizagem, através das situações-problema que ocorrem quando são desenvolvidas atividades de sala de aula.

De acordo com Brousseau (1998), a TSD permite a intervenção, tanto do aluno como do professor. Na TSD, a aprendizagem matemática acontece, efetivamente, sempre que o conhecimento que se aprende tem sentido e significado para o estudante, e aquele conhecimento

aprendido é aplicado em outros contextos (LIMA; AZEVEDO; ALVES, 2020). Desta forma, a maneira com que os conteúdos matemáticos são apresentados aos estudantes são de grande importância na significação do saber escolar.

A TSD distingue duas fases importantes no tratamento das situações de aprendizagem em sala de aula: situação didática, que deve ser conduzida pelo professor, e a situação adidática, que diz respeito à ação do aluno sob a mediação do professor. Segundo Souza, Alves e Fontenele (2020), a situação didática surge quando o professor tem a intenção de ensinar um saber com a finalidade de o aluno aprender de forma significativa. E as situações adidáticas têm como característica colocar o aluno diante de uma situação para que ele possa produzir o seu próprio conhecimento, tendo o professor o papel de mediador e orientador. Souza, Alves e Fontenele (2020) ainda reforçam que em relação às duas situações que dizem respeito às ações do aluno:

Na primeira ocorre uma interação do aprendiz em situação de jogo, ocorrendo sempre que houver intenção do professor em desenvolver a aprendizagem de um sujeito. Na segunda, o aluno progride por seu próprio mérito para construir o conhecimento, mas respeitando as regras do jogo, que foram previamente estabelecidas pelo professor de maneira a promover meios que suscitem um potencial próprio ao aluno para resolução da questão em jogo. (SOUZA; ALVES; FONTENELE, 2020, p. 92)

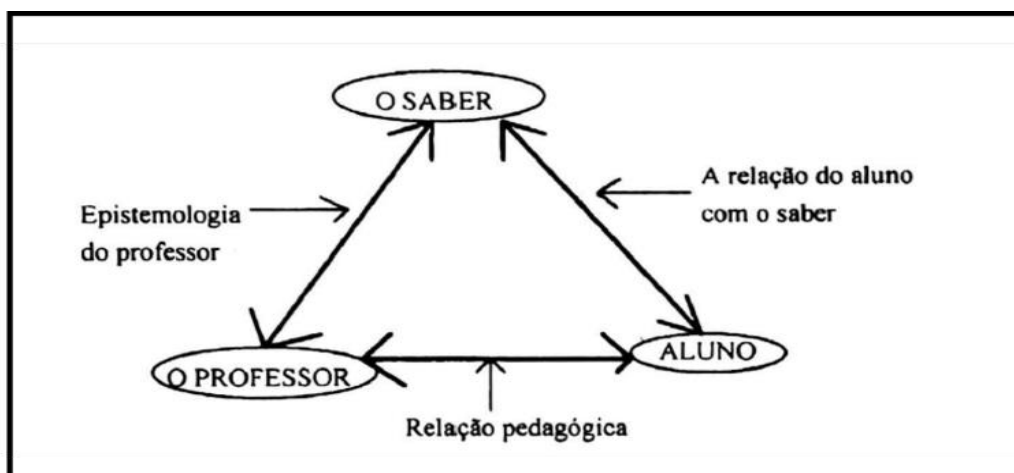
Na primeira os autores se referem a postura do professor frente ao aluno no papel de aprendiz, e na segunda o aluno assume o papel de protagonista do seu aprendizado, controlando o processo na busca de respostas para a situação previamente elaborada pelo professor.

Para Pommer (2008), a TSD de Brousseau (1996) entrelaça a epistemologia da Educação Matemática nos aspectos cognitivos e sociais, na tentativa de compreender como ocorrem as interações na sala de aula entre o professor e os estudantes. Essas interações permitem que o conhecimento possa ser reproduzido e otimizado.

É salutar objetivar as interações entre o conhecimento a ser aprendido e os processos envolvidos nessa aprendizagem, posto que, a partir dessas interações, o aluno passa a compreender as dimensões epistemológicas do conhecimento matemático. Pommer (2008, p. 2) reforça que o objetivo principal da Didática da Matemática enquanto metodologia é “a caracterização de um processo de aprendizagem por meio de uma série de situações reprodutíveis, denominadas de situações didáticas, que estabelecem os fatores determinantes para a evolução do comportamento dos alunos”.

Baseado na premissa de que o objeto central dessa teoria não é o aluno (como sujeito cognitivo), mas sim a situação didática, na qual se encontram as interações entre o saber, o aluno e o professor, Brousseau traz o triângulo didático, conforme apresentado na Figura 3:

Figura 3: O Triângulo Didático de Brousseau



Fonte: Almouloud (2014, p. 32).

Com isto, é importante que o professor, na condução da atividade, crie previamente um ambiente favorável para a aprendizagem do aluno. Com a finalidade de facilitar o processo de ensino, a Teoria das Situações Didáticas observa e decompõe este processo em quatro fases, a saber: a dialética da ação, a dialética da formulação, a dialética da validação e a dialética da institucionalização, estabelecidos aqui a partir do pensamento de Souza, Alves e Fontenele (2020) conforme o Quadro 2:

Quadro 2: Fases dialéticas da TSD

Fase dialética	Previsões das ações esperadas dos estudantes
Ação	Nesta fase, espera-se que os estudantes ao se depararem com a situação proposta, busquem a compreensão e desenvolvam formas de criar procedimentos e hipóteses na busca de resolverem o problema e chegarem a uma solução.
Formulação	É a etapa seguinte na qual espera-se que haja a interação e trocas de conhecimentos entre os estudantes, com a finalidade de atingirem os objetivos planejados anteriormente. Neste momento também ocorre a interpretação da linguagem formal escrita para a matemática.
Validação	É o momento em que será verificado e organizado a produção de conhecimento produzido pelos estudantes nas duas fases anteriores. Essa verificação ocorre pelos próprios estudantes e revela se a solução encontrada satisfaz o objetivo do problema.
Institucionalização	Professor e aluno realizam a institucionalização do conhecimento, ou seja, validam as hipóteses anteriores e procedem o avanço do conhecimento individual para o nível do saber científico, histórico e cultural. É somente nesta fase que são trabalhados a formalização do saber matemático, com a apresentação dos conceitos, das fórmulas e propriedades inerentes à linguagem matemática. É aqui também que ocorre a socialização dos diferentes caminhos desenvolvidos na busca pela solução.

Fonte: Adaptado de Souza, Alves e Fontenele (2020, p. 92-93)

Para tornar o processo viável, utilizamos para a transposição didática o *software* GeoGebra. O GeoGebra tem um papel crucial tanto no apoio tecnológico como pedagógico.

Na seguinte seção realizamos uma análise dos conteúdos trabalhados nos livros didáticos adotados pela escola participante da pesquisa em relação ao estudo das progressões.

3.1.1 Progressão Aritmética (PA)

Quanto ao assunto de progressões, a definição de PA é trabalhada de diferentes formas, mas cada uma se refere ao mesmo significado intrínseco e levam ao entendimento de como se comporta a sequência. Nesse contexto, sobre o uso de definições, Lima *et al.* (2006, p. 26) afirmam que “uma definição matemática é uma convenção que consiste em usar um nome, ou uma sentença breve, para designar um objeto ou uma propriedade, cuja descrição normalmente exigiria o emprego de uma sentença mais longa”. Isto corrobora o pensamento de Azerêdo e Rêgo (2016), sobre a linguagem matemática e as suas representações, que por ser uma linguagem concisa exige uma caracterização universal para não acarretar dificuldades em seu entendimento.

Também se percebe na fala de Azerêdo e Rêgo (2016, p. 159) que a “Matemática é caracterizada com as marcas de precisão, de concisão e de universalidade, possibilitando seu entendimento em diferentes lugares, independente da língua materna.” Portanto, é imprescindível apresentar estas definições no intuito de contribuir para um melhor entendimento da matemática, que já é “possuidora de regras diferentes que precisam ser compreendidas e apropriadas pelos estudantes” (AZERÊDO; RÊGO, 2016, p. 160).

Em relação à definição de PA, Lima *et al.* (2006), sugere uma abordagem simples e clara quando propõe a ideia de que uma progressão aritmética é “*uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante.*” definindo assim que essa diferença constante seja denominada de razão da progressão, sendo representada pela letra “*r*”.

O autor ainda destaca os casos especiais, nos quais os valores de *r* são caracterizados pelo seu valor numérico estar associado ao sinal positivo ou negativo, tornando a PA Crescente ou Decrescente, respectivamente, e no caso em que a razão é igual a zero, sendo classificada como constante ou estacionária (LIMA et al, 2006).

Com isso determina-se que uma progressão é um tipo de sequência numérica que obedece a uma determinada lógica matemática, denominada de lei de formação da sequência. A partir dela, pode-se encontrar qualquer termo dessa sequência, sendo elas classificadas de várias formas, conforme a especificidade de suas características.

Souza e Garcia (2016) apresentam as definições de Progressão Aritmética e Geométrica, buscando conectar as progressões e as funções correspondentes.

Em relação a Progressão Aritmética, é uma sequência onde cada termo a partir do segundo, é somado a um valor constante, chamado de r , ao seu termo antecessor. Essa constante r é conhecida como razão da progressão e através dela é possível encontrar o termo seguinte. Em Souza e Garcia (2016, p. 207), os autores destacam que “considerando a função $f: R \rightarrow R$ e $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n \dots$ elementos de uma PA de razão r , f será uma função afim, definida por $f(x) = ax + b$, se, e somente se, $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \dots, f(x_n), \dots$ for uma PA de razão $a \cdot r$ ”.

A demonstração dessa relação se dá por recorrência, de forma bastante intuitiva conforme segue.

Em uma função do tipo $f(x) = ax + b$, o número “a” da função é o coeficiente angular. Daí, infere-se a seguinte associação: Se $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n \dots = a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n \dots$, decorre que, ao desenvolver-se o termo geral da PA, temos:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 + 0r \\ a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r, \text{ ou } a_3 = a_1 + 2r \\ a_4 &= a_3 + r, \text{ ou } a_4 = a_1 + 3r \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \\ a_n &= a_{n-1} + r, \text{ ou } a_n = a_1 + (n - 1) * r \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que essa relação se estabelece da seguinte forma:

$$a_n = a_1 + n * r - r,$$

ou seja: $a_n = r * n + (a_1 - r)$. Logo, percebe-se que essa expressão pode ser associada à função afim $f(x) = ax + b$, quando:

$$\begin{aligned} a &= r \\ a_n &= f(x) \\ b &= (a_1 - r) \\ n &= x \end{aligned}$$

Dessa forma, conclui-se que a sequência formada pela função afim estabelecida fornece os seus termos de acordo com os pares ordenados, em que o seu domínio será o conjunto

dos naturais $\mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{N}$) e a sua imagem o conjunto de todos os $y = f(x)$ nos reais ($\mathbb{R}$), já que $x \in \mathbb{R}$. Portanto, cada termo será determinado pelos pares ordenados

$$(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), (4, a_4), \dots, (n, a_n), \dots,$$

ou se preferir:

$$(1, f(x_1)), (2, f(x_2)), (3, f(x_3)), (4, f(x_4)), \dots, (n, f(x_n)), \dots.$$

Contudo cabe mostrarmos a volta dessa afirmação da seguinte forma de acordo com Bortolossi (s.d): Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona que transforma progressões aritméticas em progressões aritméticas, então f é uma função afim.

Para Demonstrar considere que a função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = f(x) - f(0)$.

A função φ é do tipo que transforma PA em progressão aritmética e tal que $\varphi(0) = 0$. Assim podemos mostrar que se φ for uma função linear, então f será uma função afim. Dessa forma temos que $\forall x \in \mathbb{R}$, temos os números $-x$, 0 e $+x$ formam nessa ordem uma progressão aritmética, e, portanto, o mesmo deve ocorrer com os números $\varphi(-x)$, $\varphi(0)$ e $\varphi(+x)$.

Analogamente, $g(-x) = -g(x)$. Consideremos também que se $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, consequentemente os números $0, x, 2x, \dots, n * x$ dessa forma são uma progressão aritmética, e por conseguinte o mesmo ocorre com suas respectivas imagens que são $\varphi(0), \varphi(x), \varphi(2x), \dots, \varphi(nx)$.

Nesse caso, temos que a razão desta progressão se dá pela diferença entre o segundo e o primeiro termo, que dessa forma se conclui que é $\varphi(x)$ e portanto concluímos que $\varphi(n * x) = n * \varphi(x)$, nos levando a suposição de que, se n for um número inteiro negativo, então $-n \in \mathbb{N}$, e, portanto, $\varphi(n * x) = -\varphi(-n * x) = -(-n * \varphi(x)) = n * \varphi(x)$, o que nos leva a conclusão de que $\varphi(n * x) = n * \varphi(x) \forall n \in \mathbb{Z}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$, ou seja, concluímos que pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, φ é linear, conforme queríamos demonstrar.

3.1.2 Progressão Geométrica (PG)

Semelhante à definição anterior, a Progressão Geométrica (PG) é uma sequência determinada de forma que, para encontrar o seu segundo termo, deve-se multiplicar o termo anterior por uma constante q , que é chamada de razão dessa progressão. Assim, a partir do segundo termo em diante, é possível encontrar os termos sucessores da progressão, posto que o primeiro termo em qualquer sequência é estabelecido como um termo constante e independente e conhecido como a_1 .

Segundo Souza e Garcia (2016, p. 221) “dadas a função do tipo exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = b \cdot a^x$ e $(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots)$ elementos de uma PA, a sequência $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \dots, f(x_n), \dots)$ é uma progressão geométrica (PG) de razão a^r .”

Uma das formas de se demonstrar a relação entre a PG e as funções exponenciais, se assemelha à demonstração anterior e consiste em estender o conjunto domínio a partir dos números naturais ($\mathbb{N}$) para os reais ($\mathbb{R}$) e substituir no termo geral da PG, $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$, n por x e a_n por $f(x)$. Dessa forma tem-se que $a = q$ e o valor de b corresponde ao valor de $f(x)$ tal que, quando $x = 0$ o valor de b assume o valor de a_1 . Assim, desenvolve-se o termo geral e obtém-se que:

$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)} = f(x) = b \cdot a^x$, seguindo, temos que, pelo inverso multiplicativo:

$$b \cdot \frac{q^n}{q^n} = a_1 \cdot \frac{q^n}{q^n} \cdot q^{-1}, \text{ ou seja,}$$

$$b = a_1 \cdot \frac{1}{q}$$

$$b = \frac{a_1}{q}$$

Analogamente, os pontos representativos dos termos dessa PG são pares ordenados que representam a versão discreta de uma função exponencial e são determinados por:

$$(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), (4, a_4), \dots, (n, a_n), \dots$$

ou identicamente ao exposto na demonstração anterior, de forma geral:

$$(1, f(x_1)), (2, f(x_2)), (3, f(x_3)), (4, f(x_4)), \dots, (n, f(x_n)), \dots$$

Ainda pode-se definir as sequências, que são combinações entre as progressões PA e PG, como sendo as Progressões Aritmético-Geométricas (PAG), e entre as PG e PA que são as Progressões Geométrico-Aritméticas (PGA).

O estudo destes tipos de sequência ainda é recente na literatura, o que possibilita um vasto campo de investigação. Segundo Rocha (2019), estas sequências podem ser acessíveis ao público do Ensino Médio. O autor define as Progressões Geométrico-Aritméticas (PGA) como “toda progressão onde o seu termo geral é da forma, $b_n = aq^{(n-1)} + (n-1)r$, sendo a , r e q constantes não nulas e $q \neq 1$ ”, ao passo que as Progressões Aritmético-Geométricas (PAG) pode ser definida como “toda progressão onde o seu termo geral é da forma $a_n = [a + (n-1)r]q^{(n-1)}$, sendo a , r e q constantes não-nulas e $q \neq 1$ ” (ROCHA, 2019, p. 37). Tal definição também é encontrada e demonstrada no trabalho

de Paiva, na Revista do Professor de Matemática número 73 (RPM, 73, 2010). Em Paiva (RPM, 73) temos a definição para a soma dos termos de uma PAG. O autor afirma que:

no estudo das progressões geométricas aprende-se que, para $|q| < 1$, o limite, quando n tende a infinito, de q^n é zero. Usando esse fato, temos: O limite da soma S_n dos n primeiros termos de uma PAG de primeiro termo a e razão aritmética r e razão geométrica q , com $|q| < 1$, quando n tende a infinito é igual a $s = \frac{a}{1-q} + \frac{rq}{(1-q)^2}$. (PAIVA, RPM 73, 2010).

A ideia central das PAG consiste em multiplicar termos consecutivos de uma PA, ordenadamente a termos consecutivos de uma PG. Assim em termos matemáticos tem-se que:

$$a, (a + r), (a + 2r), (a + 3r), \dots, [a + (n - 1)r], \dots \text{ sendo uma PA e,}$$

$$1, q, q^2, q^3, \dots, q^{n-1}, \dots, \text{ sendo uma PG,}$$

que multiplicadas ordenadamente, conforme o autor, geram a sequência:

$$a, (a + r)q, (a + 2r)q^2, (a + 3r)q^3, \dots, [a + (n - 1)r]q^{n-1}, \dots$$

sendo esta, uma PAG, conforme definição anterior.

Apresenta-se, a seguir, algumas definições sob a influência do trabalho de Nobre e Rocha (2018). Os autores supracitados definem o “Operador Diferença” da seguinte forma:

Dada uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, define-se o chamado operador diferença $(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_{n+1} - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que constitui uma nova sequência. Como $(\Delta^1 a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forma uma nova sequência, podemos novamente obter o operador diferença, isto é, $(\Delta^1 [\Delta^1 a_n])_{n \in \mathbb{N}} = (\Delta^2 a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, e assim recursivamente, $(\Delta^k a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, para $k \geq 3$. (NOBRE; ROCHA, 2018, p. 37).

Essa nova sequência se estabelece, podendo ser necessário ou não realizar uma, ou várias vezes, até que a diferença entre seus termos seja constante. Ou seja, até que se estabeleça uma razão constante. O número de vezes que serão necessárias para estabelecer essa razão dependerá da ordem da sequência, neste caso, a ordem da PA.

Sobre a ordem da PA, Nobre e Rocha (2018, p. 37) definem como “uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ será uma PA de ordem k se for necessário aplicar o operador diferença k vezes para se chegar a uma sequência constante”. Desse modo, uma sequência será chamada de PA de ordem k sempre que o operador diferença de ordem $k - 1$ for uma PA de primeira ordem. Em termos matemáticos, podemos dizer que uma sequência será uma PA de ordem k se $(\Delta^{k-1} a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for uma PA de primeira ordem ou se $(\Delta^{k-2} a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for uma PA constante. (NOBRE; ROCHA, 2018).

A fim de ilustrar melhor essa definição, considere como exemplo, a seguinte sequência de números (2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, ...). Esta é uma PA de ordem 2, visto que

matematicamente, $\forall n \in N, \Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n = (4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots)$ é uma PA de primeira ordem, o que implica que $\forall n \in N, \Delta^2 a_n = \Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n = 2$, ou seja, uma PA constante.

Rocha (2019) afirma que é possível tratar este assunto no nível médio, dada sua natureza. No entanto, este tópico da forma como colocado aqui não vai de encontro ao que é proposto nos livros didáticos, não sendo comum encontrar esse modelo de abordagem.

3.2 Os livros didáticos de Matemática do Ensino Médio

Acerca das sequências, existem relatos históricos que atribuem a sua devida importância ao desenvolvimento do saber matemático existente atualmente. Segundo Almeida Júnior (2017, p. 3) “a matemática pode ser encontrada em todo o cotidiano como por exemplo, as estações do ano, que se repetem obedecendo a um padrão, os números das placas dos veículos também são exemplos de sequências ou progressões”. Tal afirmação reforça uma importância para a necessidade da busca em compreender esse conteúdo.

Apesar de ser um conteúdo importante para a humanidade, os processos de ensino e aprendizagem das progressões não acompanharam o desenvolvimento esperado, especialmente quanto ao modo como tem sido apresentado aos estudantes. Em geral, os livros didáticos não contemplam o assunto por completo, trazendo apenas uma apresentação superficial dos conteúdos.

Conforme Alves, Borges Neto e Barreto (2011), nos livros, a teoria é apresentada através de definições e fórmulas, sendo raramente acompanhada de demonstrações dos teoremas matemáticos, ou ainda sendo ausentes as discussões sobre as relações dos diferentes tópicos da matemática. Ainda de acordo com Alves, Borges Neto e Barreto (2011), geralmente os estudantes da graduação, após conclusão do curso e inserção no mercado de trabalho, buscam suporte pedagógico para suas aulas nos livros didáticos, sendo este o instrumento principal na preparação de aulas (ALVES; BORGES NETO; BARRETO, 2011).

O ensino de progressões tem sido motivo de discussão a partir dos livros de matemática. O livro, enquanto material didático, serve de suporte ao docente e assume uma importância fundamental neste processo. Conforme afirmam Fonseca e Vilela (2014, p. 573) “os materiais didáticos, por terem um papel significativo no processo ensino aprendizagem, têm sido frequentemente discutidos em pesquisas educacionais”. Nesse sentido, realizamos uma análise dos conteúdos presentes em alguns dos livros didáticos de matemática do Ensino Médio, conforme mencionado anteriormente.

Esta análise teve como objetivo apresentar a abordagem teórica do conteúdo referente às sequências numéricas de Progressões Aritméticas (PA) e Progressões Geométricas (PG), a fim de compreender de que forma são desenvolvidos os conceitos matemáticos referentes a este assunto, atendendo assim ao primeiro objetivo específico deste trabalho.

Para isso, foram selecionados alguns livros de Matemática do 1.º ano do Ensino Médio, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). O critério de escolha das obras foi priorizar as que são utilizadas pela Escola lócus desta pesquisa. Consideramos, assim, obras que vigentes no presente momento. Com isso, realizamos uma pesquisa bibliográfica no acervo da instituição, conforme o Quadro 3:

Quadro 3 – Coleções de livros didáticos analisados²

Livros de Matemática do 1.º ano do Ensino Médio		
Título	Referência	Observação sobre o objeto de estudo
Matemática Completa	Giovanni, José Ruy. Matemática Completa/ José Ruy Giovanni, José Roberto Bonjorno. – 2. ed. renov. – São Paulo: FTD, 2005. – (Coleção Matemática Completa)	Apresenta o conteúdo no capítulo 11 sem fazer menção ao assunto nos outros capítulos
Matemática Ensino Médio	Smole, Kátia Cristina Stocco. Matemática – ensino médio – Volume 1 – 1ª série/ Kátia Cristina Stocco Smole, Maria Ignez de Souza Vieira Diniz – 5. ed. - São Paulo: Saraiva, 2005.	Apresenta uma sequência de introdução interligando os assuntos de progressões ao de funções, na unidade 6, trazendo aprofundamentos sobre os conceitos de progressões geométricas em exercícios e curiosidades sobre este assunto
Novo Olhar Matemática	Souza, Joamir Roberto de. Novo Olhar: matemática: 1/Joamir Roberto de Souza – 2. ed – São Paulo: FTD, 2013.	Introduz o assunto de progressões de forma sutil no capítulo de funções exponenciais sem conceituar e aprofunda o estudo no capítulo 8
#Contato matemática	Souza, Joamir Roberto de. #Contato Matemática, 1º ano/Joamir Roberto de Souza, Jacqueline da Silva Ribeiro Garcia – 1. ed – São Paulo: FTD, 2016. – (Coleção #contato matemática)	Apresenta a mesma distribuição dos conteúdos, que o anterior, do mesmo autor, inclusive com a seção “Acessando Tecnologias” ao final do capítulo 9 na página 266
Matemática 1	Chavante, Eduardo. Quadrante	A obra, apesar de fazer uma referência

² A análise conteudista dos livros relacionados no (Quadro 3) acima mostrou que a grande maioria não trabalha os conceitos de progressões de segunda ordem a contento, quando muito apresentam problemas relacionados ao tema sem qualquer aprofundamento, revelando uma lacuna a ser explorada nesse contexto, já que estes problemas são cobrados em exames e certames como olimpíadas e avaliações externas, justificando assim uma preocupação nessa superficialidade apresentada deste assunto em diversos livros observados.

	Matemática. 1º ano: ensino médio/ Eduardo Chavante. Diego Prestes. – ed. São Paulo: Edições SM. 2016. – (Coleção quadrante matemática)	entre os assuntos, de funções e progressões, propõem o seu estudo separadamente. Apresenta o conteúdo somente no capítulo 8
Matemática: Contexto & Aplicações	Dante, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações: ensino médio / Luiz Roberto Dante. – 3. ed. -- São Paulo: Ática, 2017.	Introduz o assunto de sequências a partir do primeiro capítulo de funções e continua por todos, até o capítulo 7, no qual aprofunda os conceitos.

Fonte: Pesquisa direta

O Quadro 3 está de acordo com o exposto em Bardin (2006), pois se refere à fase da pré-análise, no qual as obras são selecionadas e organizadas por ano de publicação, neste caso, os livros de matemática foram analisados de acordo com a apresentação da sequência dos conteúdos, a forma de abordagem e as sugestões de utilização de mídias como suporte ao professor, isso foi necessário para a escolha das categorias de análises das obras. A seguir, tem-se a segunda fase, que é a exploração desse material, onde aprofundamos nossa análise.

3.2.1 Categoria de análise 1: distribuição do conteúdo

O primeiro livro analisado foi o *Matemática Completa* (volume 1), dos autores Giovani e Bonjorno (2005), a fim de se fazer um breve histórico da evolução da apresentação do conteúdo nos livros didáticos, e verificar se houve alguma mudança significativa à medida que têm sido exigidas novas abordagens de ensino.

Quanto à distribuição dos conteúdos, o livro está dividido segundo nas seções:

- 1 – Geometria Métrica Plana;
- 2 – Trigonometria nos Triângulos;
- 3 – Conjuntos;
- 4 – Funções;
- 5 – Função Polinomial;
- 6 – Função Modular;
- 7 – Função Exponencial;
- 8 – Função Logarítmica;
- 9 – Noções de Matemática Financeira;
- 10 – Trigonometria no Círculo;
- 11 – Progressões.

Nota-se uma característica peculiar na apresentação dos conteúdos, pois este livro apresenta o assunto deste estudo na última seção. No entanto, inicia o tópico com uma apresentação do conceito de sequência numérica seguida da sua definição, assim apresentada como “qualquer função f cujo domínio é N^* ” (GIOVANNI; BONJORNO, 2005, p. 351).

A depender de como esses conteúdos são apresentados nos livros didáticos, pode-se configurar como um obstáculo epistemológico, pois a falta de exemplos poderá dificultar o processo de ensino da mesma forma que o de aprendizagem.

A obra de Smole e Diniz (2005) analisada, mostrou-se mais flexível em relação à disposição deste conteúdo, apresentando uma sequência de introdução que interliga os assuntos de progressões e funções. Esta obra discute na unidade 6 as sequências, progressão aritmética e geométrica antes da unidade 7, de função exponencial, equação exponencial e inequação exponencial, trazendo ainda na mesma unidade um aprofundamento sobre os conceitos de progressões geométricas em exercícios e curiosidades sobre este assunto.

As autoras dividem o livro em duas partes: na primeira estão as 10 unidades referentes aos componentes curriculares de Números, Estatística e Funções, e; na segunda tem-se 4 unidades referentes à Trigonometria. Em todas as seções do livro é possível encontrar notas das autoras que incentivam os alunos à pesquisa, bem como coloca o conteúdo matemático em contato com outras disciplinas e suas aplicações.

Outra coleção analisada pertence ao triênio 2015-2017, de Souza (2013) intitulada Novo Olhar: Matemática, sendo esta dividida em quatro unidades, conforme o Quadro 4:

Quadro 4 – Divisão da obra, Novo Olhar: Matemática em unidades e capítulos

DIVISÃO DOS TEMAS	CAPÍTULOS/ UNIDADE	OBSERVAÇÕES DA OBRA
UNIDADE 1	1 – Os Conjuntos	O livro apresenta a sequência de Fibonacci e a sua relação com o número Φ , na seção “Explorando o Tema” nas páginas 42 e 43.
UNIDADE 2	2 – As Funções 3 – Função Afim 4 – Função Quadrática 5 – Função exponencial 6 – Logaritmo e Função Logarítmica 7 – Função Modular	Registra-se a presença de algumas questões sobre o tema de sequências na página 164 relacionado ao assunto de função exponencial sem, contudo, fazer referência direta entre os conteúdos.
UNIDADE 3	8 – As Progressões	Compreendido entre as páginas 216 a 255, entre teoria e exercícios.
UNIDADE 4	9 – Trigonometria no Triângulo	Capítulo que antecede a seção “Acessando Tecnologias” presente ao final do livro.

Fonte: Elaboração do autor.

Com esta distribuição do conteúdo, o livro de Souza (2013) trabalha a possibilidade de se conceituar as progressões vinculadas ao estudo das funções, porém não aprofunda o tema, quando apresenta apenas alguns problemas sem trazer a relação que existe entre as progressões

e as funções. Nota-se que a abordagem é mais conceitual e prioriza um modelo convencional de apresentação dos conceitos. Apesar de utilizar alguns elementos gráficos, tem em sua maioria os conceitos teóricos e expositivos.

Outra coleção analisada do mesmo autor, Joamir Souza, em parceria com Jacqueline Garcia, pertencente ao triênio 2018-2020. Esta obra apresenta a mesma distribuição dos conteúdos do Quadro 4, inclusive com a seção “Acessando Tecnologias” ao final do capítulo 9 na página 266. A principal diferença entre as obras Souza (2013) e Souza e Garcia (2016) é que esta última apresenta mais recursos visuais na abordagem dos conteúdos, o que a torna mais dinâmica e, conseqüentemente, mais atraente, pois permite ao estudante uma maior interação entre a teoria e a prática dos conceitos.

De forma geral, não há grandes modificações de uma obra para a outra. Embora a versão anterior contenha mais exercícios que a atual, nota-se que a essência permaneceu a mesma, inclusive com as sugestões de uso de recursos tecnológicos como a calculadora na resolução de atividades e o uso do computador como sugestão ao final do livro.

O próximo livro é intitulado *Matemática 1*, dos autores Eduardo Chavante e Diego Prestes, pertencente ao triênio 2017-2020 e está dividido em unidades de modo semelhante ao livro anterior, com algumas diferenças na distribuição dos capítulos, conforme se verifica no Quadro 5:

Quadro 5 – Divisão da obra, MATEMÁTICA 1 em unidades e capítulos

DIVISÃO DOS TEMAS	CAPÍTULOS/ UNIDADE	OBSERVAÇÕES DA OBRA
UNIDADE 1	1– Conjuntos 2 – Funções	Finaliza com uma seção denominada “Ampliando Fronteiras” e trata sobre grandezas irracionais.
UNIDADE 2	3 – Função Afim 4 – Função Modular 5 – Função Quadrática	Compreendida da página 66 até a 127 e finaliza com a seção “Matemática em ação” sem qualquer menção ao estudo de progressões.
UNIDADE 3	6 – Função Exponencial 7 – Função Logarítmica	Da página 128 a 169, limita-se a pura apresentação dos conceitos dos tópicos elencados.
UNIDADE 4	8 – Sequências e Progressões 9 – Estatística 10 – Trigonometria	Abordagem do conteúdo de sequência restrita às páginas 170 a 201.

Fonte: Elaboração Própria baseado no livro MATEMÁTICA 1 (2023)

Supondo que o professor trabalhe os conteúdos conforme a proposta sugerida no livro, entende-se que o tópico de sequências poderia ser mais bem compreendido se fosse organizado

e ministrado na unidade 3, com o conteúdo de funções. Nesse aspecto, nota-se que os autores, apesar de fazerem uma referência entre estes assuntos, propõem o seu estudo separadamente.

O último livro analisado foi *Matemática: Contexto & Aplicação*, de Luiz Roberto Dante (2016), do triênio de 2017 a 2020, que propõe a seguinte divisão dos conteúdos, conforme o Quadro 6:

Quadro 6 – Divisão da obra, Matemática: Contexto & Aplicação em unidades e capítulos

DIVISÃO DOS TEMAS	CAPÍTULOS/ UNIDADE	OBSERVAÇÕES DA OBRA
UNIDADE 1 (Números e Funções)	1 – Conjuntos numéricos 2 – Funções	Relaciona o assunto de funções ao estudo de progressões aritméticas e geométrica já na primeira unidade a partir da página 66.
UNIDADE 2 (Função Afim e Função Quadrática)	3 – Função Afim e função modular 4 – Função quadrática	Na seção “Outras Conexões” apresenta novamente a relação entre o estudo das funções e progressões na página 90. Novamente na página 137 retoma o assunto de conexão entre função quadrática e progressão aritmética.
UNIDADE 3 (Função Exponencial e Função Logarítmica)	5 – Função exponencial 6 – Logaritmo e função logarítmica	Nesta unidade a relação entre função exponencial e progressões, está na página 164.
UNIDADE 4 (Sequências e Trigonometria)	7 – Sequências 8 – Trigonometria no triângulo retângulo	Aqui o assunto é aprofundado seguindo a proposta conceitual e relacional entre os conteúdos afins.

Fonte: Elaboração Própria baseado no livro Matemática: Contexto & Aplicação (2023)

Dentre os livros analisados, este é o único que intitula as unidades e expõe os conteúdos seguindo uma determinada sequência lógica, pois em várias seções ao longo dos capítulos faz ligações de conteúdos, bem como contextualiza suas aplicações nas diversas situações do cotidiano.

Destacam-se também nessa obra a seção 10, “Funções e sequências” (página 66), em que os autores introduzem os assuntos de PA e PG para justificar o estudo das funções, ainda no capítulo 2. Continuando nessa linha, no capítulo 3, seção 10, “Outras conexões” (página 90), Dante (2017) elenca os assuntos:

- Função afim e progressões aritméticas
- Função afim e física
- Função afim e proporcionalidade
- Função linear e escalas

O assunto de sequências ainda é trabalhado no capítulo 4, na página 137, na seção 10 de “Conexão entre função quadrática e progressão aritmética”, no capítulo 5, na página 164, na

seção 5 de “Conexão entre funções exponenciais e progressões” e, por último, no capítulo 7, de modo mais completo, pois se trata de um capítulo para aprofundamento do conteúdo.

Em relação à distribuição dos conteúdos, Bardin (2006) orienta que sejam esgotados todos os pormenores de modo a sanar todas as lacunas, o que foi feito aqui em todas as obras. Foram observados aspectos gerais e estes foram relatados, conforme verifica-se nos Quadros 3 a 6 apresentados acerca de cada obra e demais descrições acima. Embora tenha-se ciência de que os livros analisados representam apenas o universo de obras que foram adotadas pela escola em questão, ressaltamos que estas obras não representam todo o universo de obras utilizadas pelas escolas do Estado do Ceará.

3.2.2 Categoria de análise 2: Mídias sugeridas para o estudo de Progressões

No livro *Matemática completa (volume 1)* percebe-se que os autores apresentam alguns problemas contextualizados sobre as progressões sob uma abordagem expositiva do conteúdo. Apresentam, ainda na página 363, como recurso tecnológico, o uso da calculadora para determinar os termos de uma PA cujo primeiro termo é 4,7 e a razão 1,74. Os autores também indicam o uso da calculadora como recurso tecnológico para se conhecer os termos de uma PG e descrevem os passos para a construção dos seus termos na página 374, bem como para a soma dos termos da PG, conforme a Figura 4:

Figura 4: Sugestão de uso da tecnologia *calculadora* para o ensino de Progressões.

Progressões na calculadora - II

Podemos também usar a calculadora para conhecer os termos de uma progressão geométrica. Devemos digitar, em primeiro lugar, o valor correspondente à razão da PG, depois a tecla ($\times$), indicando a multiplicação, e, em seguida, o valor do primeiro termo. Ao pressionar a tecla ($=$) pela primeira vez, no visor aparecerá o segundo termo da progressão. Pressionando pela segunda vez a tecla ($=$), aparecerá no visor o terceiro termo e assim sucessivamente, obtendo-se, dessa forma, os termos da progressão geométrica. Tente!

É possível, ainda, utilizar a calculadora para calcular a soma dos n termos de uma PG finita, conhecidos o primeiro termo (a_1), a razão (q) e o n -ésimo termo (a_n). É só digitar:

$q \rightarrow - \rightarrow 1 \rightarrow = \rightarrow M+$

Limpe o visor da calculadora utilizando C e digite:

$a_n \rightarrow \times \rightarrow q \rightarrow = \rightarrow - \rightarrow a_1 \rightarrow \div \rightarrow MR \rightarrow =$

O resultado obtido será a soma da PG. Tente!

Fonte: Giovanni e Bonjorno (2005, p. 374).

Além da sugestão da Figura 4, o livro sugere outro recurso para o cálculo da soma dos termos de uma PG infinita de termos iniciais ($1/2, 1/4, 1/8, \dots$), que consiste em pintar um quadrado de lado 1 em cores diferentes, de acordo com cada fração correspondente aos termos da progressão, até que pela noção de limite, se chegue ao resultado dessa soma. É interessante ressaltar que durante a seção não houve nenhuma preparação prévia para a compreensão do conceito de limite, considerando que o nível dos estudantes é referente ao primeiro ano do Ensino Médio. Ressalta-se também que esta obra pertence ao Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM), implantado em 2004 pelo governo nacional para alunos de escolas públicas de todo o país, tendo sua vigência no triênio de 2009-2011.

Na obra de Smole e Diniz (2005), em relação à visualização matemática, percebe-se uma preocupação com a parte gráfica. As autoras utilizam várias figuras ilustrativas para a formalização dos conceitos. Quanto às mídias sugeridas, o uso da calculadora também é recomendado em várias seções do livro, enquanto o uso do computador é recomendado apenas uma vez ao final da unidade 6, em referência ao estudo dos fractais.

Isso vai de encontro ao que diz Almouloud (2014), em relação a formalização dos conceitos em uma análise epistemológica, pois a análise epistemológica apoia-se no desenvolvimento histórico do conceito, o que permite identificar diferentes concepções sobre um determinado objeto. Essa preocupação fica evidente na unidade 6.

Ainda na unidade 6, as autoras abordam, de forma sutil, o conceito de números figurais em forma de exercícios, porém sem explicitar este conceito. O que se percebe é uma breve introdução visual destes números, como os números triangulares, quadrados, pentagonais e hexagonais, bem como notamos os conceitos de progressões de segunda ordem. Embora o tema não seja tratado esta nomenclatura, percebemos sua existência. Além disso, são introduzidas sequências como os fractais e a Sequência de *Fibonacci* a partir de recursos visuais, que sugerem uma boa percepção matemática.

Já no livro, *Novo Olhar: Matemática*, de Souza (2013), em várias atividades a calculadora é recomendada como recurso tecnológico e percebe-se também a referência aos números figurados em forma de alguns exercícios, mas sem mencionar as suas características no decorrer do texto.

Quanto ao uso de tecnologias na abordagem do conteúdo, o livro traz poucas sugestões. Porém, ao final da unidade 4, após o capítulo 9 sobre Trigonometria a partir da página 294, é apresentada uma seção “*Acessando Tecnologias*”, que aborda o uso de alguns programas como o *Winplot* e o *LibreOffice Calc*. Também são sugeridas atividades para se trabalhar PA e PG na planilha eletrônica, bem como a construção de tabelas trigonométricas.

O próximo livro “*Matemática 1*”, dos autores Chavante e Prestes (2016), na categoria de recursos utilizados, observou-se que o livro mantém uma abordagem metodológica convencional para a exposição dos conceitos, com pouca utilização de recursos visuais, bem como não incentiva a busca por novas metodologias.

Apesar de se perceber um resgate sobre a História da Matemática nas seções que finalizam os capítulos, e que sejam apresentadas questões contextualizadas, com foco no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e vestibulares, não se encontram sugestões de uso de mídias digitais como recursos possíveis para estudantes ou professores.

Em relação ao conteúdo de progressões, o livro aborda em forma de exercícios o conceito de números triangulares (páginas 174 e 175), bem como os fractais de Sierpinski. Além disso, faz apenas uma menção ao uso de planilha para o trabalho com PG (página 198) como exemplo. Destaca-se que este livro prioriza um número significativo de exercícios teóricos em sua abordagem, em detrimento de elementos gráficos como recursos visuais.

Ao final do Capítulo 10, os autores apresentam algumas seções breves, em forma de curiosidades matemáticas, sem o intuito conteudista. Entende-se que a intenção é de despertar a curiosidade do aluno para buscar mais informações sobre o tema. Estas seções são: *Ampliando fronteiras* (que trabalha uma explanação sobre Curva de Koch), *Matemática em ação* (que trabalha o Tamanho aparente dos astros), *Ferramentas* (sobre o uso da Calculadora científica e

da planilha para cálculos diversos) e por último *Leitura e pesquisa* (com sugestões de leituras de livros sobre matemática).

A obra de Dante (2017) apresenta algumas seções relativas a assuntos recorrentes em exames como o ENEM, vestibulares e problemas olímpicos. Na categoria de utilização de recursos visuais, percebe-se que o autor buscou apresentar os conteúdos com a utilização de diversas imagens complementares, bem como o uso de gráficos e diagramas explicativos, além de introduzir o uso do computador na construção de gráficos, através da planilha na seção “Matemática e tecnologia” na página 83 e nas páginas 121-123 em que o autor recomenda o *software* GeoGebra no estudo de funções.

3.2.3 Categoria de análise 3: Forma de abordagem do assunto

Metodologicamente, o primeiro livro (Matemática Completa) propõe a participação ativa do estudante e incentiva a busca do conhecimento em outras fontes de informação. No entanto, apresenta poucas sugestões que levem o aluno a essa busca. Já em relação ao segundo livro (Matemática Ensino Médio), percebeu-se que ele apresenta muitos problemas em forma de exercícios, mas com poucos recursos visuais, tornando a sua abordagem metodológica mais teórico-abstrata, oferecendo assim uma proposta de ensino convencional.

Nessa categoria, especificamente, observou-se uma lacuna que pode se apresentar como um obstáculo, o que Brousseau (1983) chama de obstáculo didático. Segundo Almouloud (2014, p. 141) “eles nascem da escolha de estratégias de ensino que permitem a construção, no momento da aprendizagem”, ou seja, da escolha da metodologia adotada.

Uma observação importante sobre a obra de Dante (2017), é que este autor realizou uma abordagem metodológica interdisciplinar, fazendo o entrelaçamento dos assuntos no decorrer dos capítulos e relacionando o ensino das progressões diretamente com o de funções inclusive dando sugestões de uso de tecnologias e mostrando possibilidades de utilização dos assuntos em outros temas da Matemática. Isso pode mostrar aos alunos que a matemática é uma só, apesar dos títulos nem sempre sugerirem isso, corroborando o pensamento de Brousseau (1983).

Baseado nisso, levanta-se novamente a indagação quanto ao contexto da maioria dos livros didáticos: como a interpretação geométrica das progressões de ordem superior, ausente na maioria das obras observadas, pode contribuir para a compreensão desse conteúdo, com o auxílio de metodologias contemporâneas de ensino e o uso da tecnologia, como o *software* GeoGebra?

Na tentativa de responder a essa indagação, esta pesquisa traz nessa seção uma abordagem epistemológica sobre o conhecimento das sequências ao longo da História da Matemática e a importância desse estudo para o seu desenvolvimento. Também discorre sobre a ausência que os livros didáticos destinam para este assunto atualmente.

Observou-se, durante as leituras dos livros, a ausência de aspectos metodológicos que realizassem um entrosamento entre o ensino das progressões e o ensino das funções. Além disso, notamos a falta de incentivo ao uso de tecnologias, que por sua vez proporcionam uma visualização gráfica dos termos das progressões estudadas. O máximo que foi sugerido foi o uso de algumas mídias digitais, como a calculadora, ou em alguns casos, o uso de planilhas eletrônicas para o cálculo dos termos.

3.3 A formação continuada como estratégia de melhoria

Seguindo o modelo de educação empregado e difundido em meados dos anos 90, encontra-se na didática francesa todo um arcabouço teórico voltado para a formação dos profissionais visando a formação em serviço, essa definição sobre o que Pastré (2002) chamou de Didática Profissional (DP) pode ser encontrada também nas pesquisas de autores como Vergnaud, Savoyant, Mayen, Alves e outros.

Nesse sentido, a DP se desenvolveu como uma das vertentes da didática francesa e buscou contribuir na formação continuada de indivíduos adultos numa tentativa de aproximar o trabalho profissional das competências educacionais vigentes. Pastré (2017, p. 626) relata que a DP possui dois objetivos cujo cerne é: “construir conteúdos de formação correspondentes à situação profissional de referência e utilizar as situações do trabalho como suporte para a formação de competências”, corroborando nossa ação em fazê-la, visando o desenvolvimento no ensino de matemática para professores do Ensino Médio.

Para Alves (2017) existe uma necessidade proeminente do professor estar sempre buscando se atualizar no campo epistêmico, sobretudo no campo que concerne ao ensino de matemática, visto que esta se baseia numa evolução tecnológica e didática que requer uma atualização constante dos processos aos quais se suporta.

Em consonância com esse pensamento de Alves (2017) encontra-se no excerto de Guedes *et al* (2019) uma justificativa para a necessidade da busca de estratégias para se trabalhar a formação continuada de professores de matemática para a obtenção de êxito no processo de ensino e de aprendizagem, em suas palavras “é indispensável a inserção de

estratégias que possam auxiliar o professor na sua atuação profissional e que sejam capazes de reforçar a importância da formação continuada do educador.” (GUEDES *et al*, 2019, p. 4).

Assim, esse trabalho se desenvolveu na tentativa de buscar contribuir no processo de formação continuada e ajudar o professor a melhorar suas potencialidades no ensino de Matemática no nível do Ensino Médio com o componente das progressões.

Em continuação ao desenvolvimento da ED, apresentamos a seguir a quarta seção desse trabalho, com a fase de concepção e análise *a priori* das situações didáticas.

4 CONCEPÇÃO E ANÁLISE A *PRIORI* DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A segunda fase desta metodologia é a concepção e análise *a priori*. Assim como a fase das análises preliminares, esta fase funciona como mecanismo de orientação para o desenvolvimento da experimentação, com vistas ao campo da prática.

Essa fase considera as variáveis que podem ou não interferir na aplicação da sequência didática estruturada. Na verdade, objetiva determinar as escolhas quanto às variáveis em sala, permite controlar os sujeitos de forma comportamental e explicar os sentidos desse comportamento. Segundo Almouloud (2007), esta etapa da ED tem como objetivo responder a questões e validar as hipóteses levantadas nas análises preliminares. De acordo com Artigue (1995), o pesquisador deve definir as variáveis didáticas no âmbito global e local, descrevendo cada atividade proposta. Assim, o professor deve criar situações-problema controláveis por ele, onde possa gerar desequilíbrios, de forma que os sujeitos alcancem o aprendizado (ARTIGUE, 1995).

Com base nas análises preliminares, apresenta-se na sequência o processo de elaboração das situações didáticas seguindo as fases da TSD e utilizando o *software* GeoGebra como recurso tecnológico auxiliar. Nas seções subsequentes apresentamos as Situações Didáticas com suas descrições e previsões acerca do que se espera dos sujeitos.

De acordo com o exposto anteriormente, a TSD desenvolve o processo de aprendizagem em quatro fases, nas quais o sujeito (estudante) interage de forma diferente com o conhecimento. Essas fases podem ser decompostas nas situações de ação, formulação, validação e institucionalização (BROUSSEAU, 1998). As primeiras compõem o momento da situação adidática, em que o sujeito é (auto)responsável pela construção do seu conhecimento (LIMA; AZEVEDO; ALVES, 2020). Nesse caso, o professor encaixa-se na situação como mediador, indicando possíveis formas de orientar o sujeito a encontrar a solução para o problema proposto.

Nas situações denominadas adidáticas, os sujeitos entram em interação constante entre pares, caracterizando o *milieu*. Conforme Lima, Azevedo e Alves (2020, p. 347) os sujeitos “interagem entre si e com o *milieu*, se tornando sujeitos ativos no processo de ensino-aprendizagem”. Na última fase da TSD, a institucionalização, o professor assume a situação e retoma o controle para fazer as conclusões e organizar a ideia central do problema.

Descreve-se a seguir as fases dialéticas da TSD para cada situação de ensino, elaboradas para serem trabalhadas com os sujeitos dessa pesquisa, a fim de se fazer um levantamento das hipóteses.

4.1 Os números quadrados e a PA de segunda ordem na Situação 1³

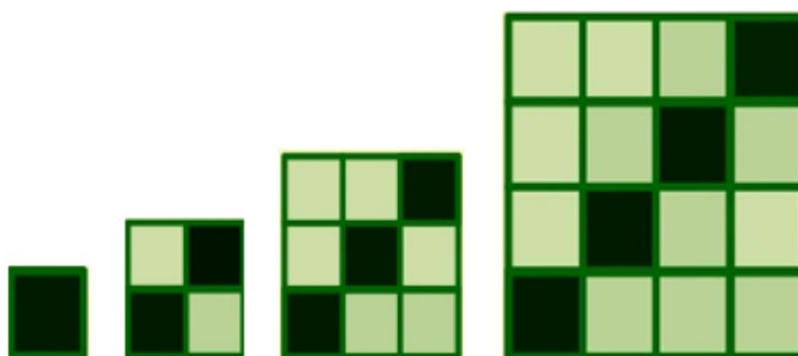
Esta situação trata-se de um problema de PA de segunda ordem cujo enunciado é:

Observe a sequência de figuras geradas a partir do controle deslizante n . Considere que as figuras hachuradas estejam em PA Crescente e determine:

Quantos quadradinhos não hachurados terão na 10ª figura? E na 15ª figura? A expressão algébrica que determina quantos quadradinhos não hachurados terão na n ésima figura é:

Como suporte ao problema, apresentamos a Figura 5 a seguir:

Figura 5: Suporte da Situação 1



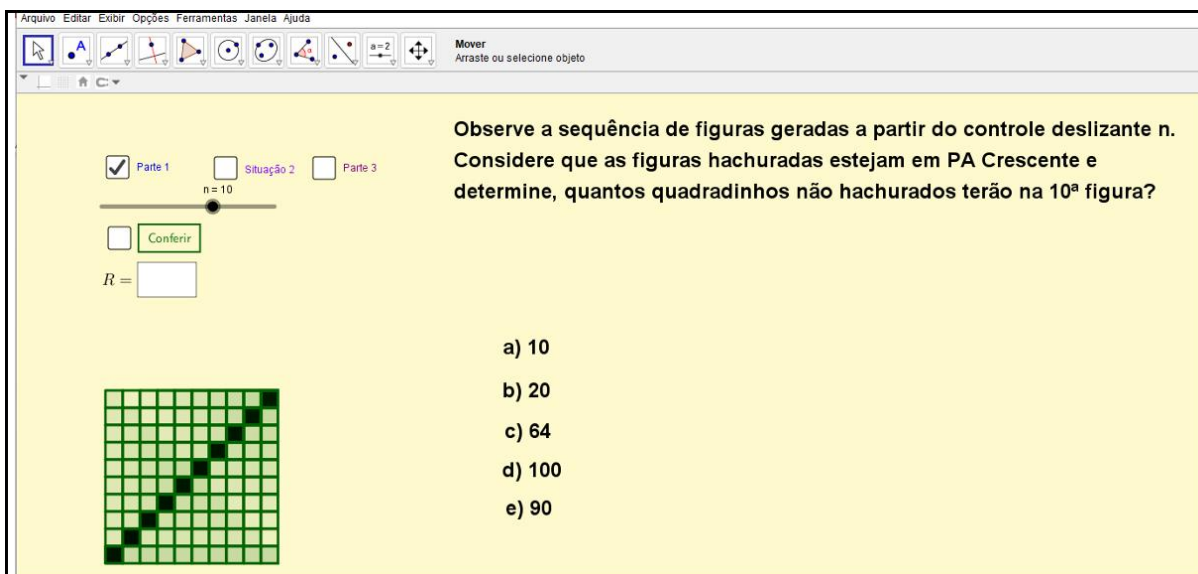
Fonte: Elaboração do autor (2023)

Antes da efetiva ação e interação com o problema no ambiente do *software*, foram trabalhados os aspectos técnicos e conhecimento das ferramentas e recursos necessários para cada situação no GeoGebra, a fim de minimizar possíveis dificuldades perante as situações apresentadas.

Nessa fase, Almouloud (2007, p.38), afirma que “as interações estão centralizadas na tomada de decisões”. Portanto, observa-se que os sujeitos devem interpretar e diagnosticar o problema para chegarem a uma solução. Espera-se que os sujeitos utilizem o controle deslizante para interagir com a construção previamente elaborada, a fim de aumentarem ou diminuïrem a sequência de quadrados e verificarem essa quantidade. Nesse sentido o GeoGebra pode facilitar essa ação, como mostra a Figura 6:

³ Esta situação foi publicada de forma parcial no III Congresso Brasileiro do GeoGebra X dia Iberoamericano GeoGebra no formato de resumo expandido.

Figura 6: sequência para o valor de $n=10$.



Fonte: Elaboração do autor (2023)

Inicialmente devem ser observadas as distintas maneiras que os sujeitos podem interagir com a situação, a fim de identificar quais aspectos são facilitados pelo uso do GeoGebra através da visualização do crescimento ou decrescimento da sequência, ou se esta abordagem trará para estes a facilidade esperada numa possível aplicação em sala de aula.

Essa proposta didática é composta por três partes, em que o sujeito deve perceber que, para avançar na resolução, precisa interagir com os campos de entrada de dados na Janela de Visualização e verificar se seus valores correspondem à solução correta de cada parte conforme se desenvolve a situação.

Almouloud (2007) enfatiza que nessa fase ocorrem as trocas de experiências entre os sujeitos, sendo estas de modo oral ou escrito. Nesse momento, o diálogo ocorre de forma intensa, na tentativa de desenvolver raciocínios que visem a solução do problema. Assim, é esperado que eles percebam que é possível interagir com o *software* e compreendam que essa situação requer a inserção da resposta no campo R da Janela de Visualização, conforme Figura 7, além de verificar a assertividade da resposta fornecida no botão Conferir.

Figura 7: Verificação do resultado obtido na parte 1 do problema

A interface apresenta uma barra de progresso com um ponto deslizante no meio, rotulada com $n = 10$. Acima da barra, há três caixas de seleção: 'Parte 1' (com um ícone de checkmark), 'Parte 2' e 'Parte 3'. Abaixo da barra, há uma caixa de seleção com um ícone de checkmark e o botão 'Conferir'. Na base da interface, o texto $R =$ precede uma caixa de entrada contendo o valor '90'. À direita desta caixa, há um botão com o texto 'correto'.

Fonte: Elaboração do autor (2023)

Nota-se que essa interação fornece imediatamente um *feedback*, que pode ser positivo no caso de acerto, com a mensagem de resposta correta; ou, no caso em que a solução encontrada não corresponde ao esperado, a mensagem será negativa, como exemplificado na Figura 8:

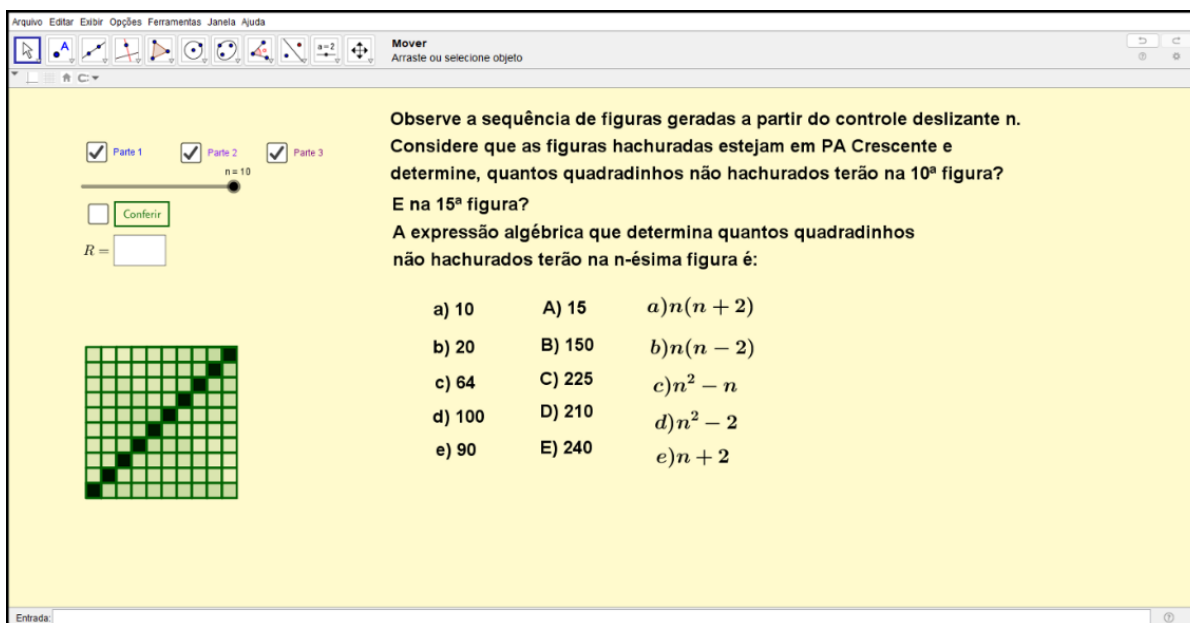
Figura 8: Exemplo de resposta errada da parte 1.

A interface é idêntica à da Figura 7, mas com o valor '100' inserido na caixa de entrada. O botão de feedback agora contém o texto 'Incorreto' em vermelho.

Fonte: Elaboração do autor (2023)

Nesta fase enfatizam-se os aspectos gerais em busca de uma generalização do problema, onde os sujeitos podem utilizar os conhecimentos produzidos nas fases anteriores e buscar a solução para o caso geral, como exposto na Figura 9:

Figura 9: As três partes da situação 1.

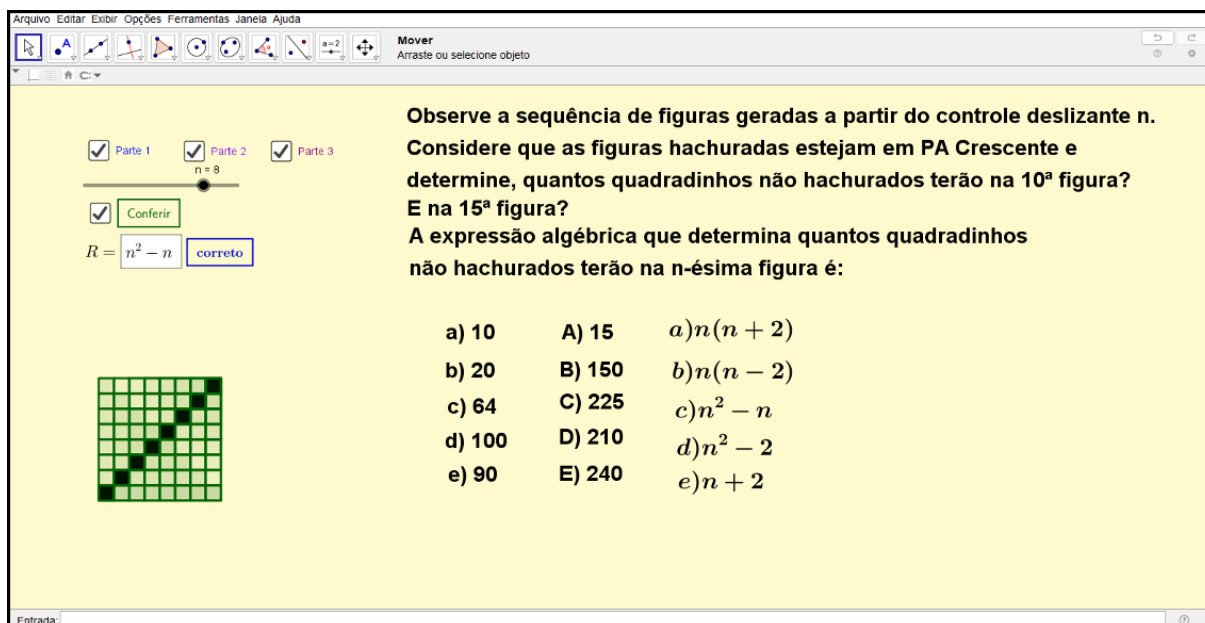


Fonte: Elaboração Própria no GeoGebra (2023)

Espera-se nessa fase que os sujeitos apresentem argumentos sobre as estratégias utilizadas e de que modo o uso do *software* foi relevante. Conforme Almouloud (2007, p. 40) essa fase da TSD se refere “a validação das asserções que foram formuladas nos momentos de ação e de formulação, podendo se referir a diferentes níveis de validade: sintática, semântica ou mesmo pragmática”. Com efeito, entende-se que a validação deve ocorrer por meio de qualquer uma das soluções apresentadas na fase de formulação.

Na institucionalização, o professor assume o controle da situação e então formaliza os resultados apresentados pelos sujeitos, ou seja, “o professor fixa, convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber” (ALMOULOU, 2007, p. 40). Dessa forma, o professor passa a realizar um fechamento e a apresentar os detalhes matemáticos do problema. Neste caso, a sequência numérica de segunda ordem a partir da manipulação do controle deslizante.

Assim deve-se gerar uma sequência com os seguintes números (1, 4, 9, 16), onde os sujeitos podem verificar, conforme definido em Nobre e Rocha (2018), que o número de quadrados não-hachurados é a diferença entre o total de quadrados da figura e o total de quadrados da diagonal, correspondente à sequência (0, 2, 6, 12), conforme a Figura 10, e que essa sequência segue a fórmula $a_n = n^2 - n$:

Figura 10: Verificação da aplicação da fórmula na situação 1

Fonte: Elaboração do autor (2023)

Além da compreensão deste conceito em questão, podemos ainda observar, no contexto de manipulação dessa situação-problema, que o sujeito pode expandir o raciocínio. É possível perceber que, em um caso mais geral, ele terá uma sequência numérica representativa dos quadrados não-hachurados, representada pelos números $(2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, \dots)$, o que segundo Nobre e Rocha (2018) representa uma PA de segunda ordem, pois, ao aplicarmos o operador diferença $\Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n$, encontramos a sequência $(4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots)$ que representa uma PA de razão $r = 2$.

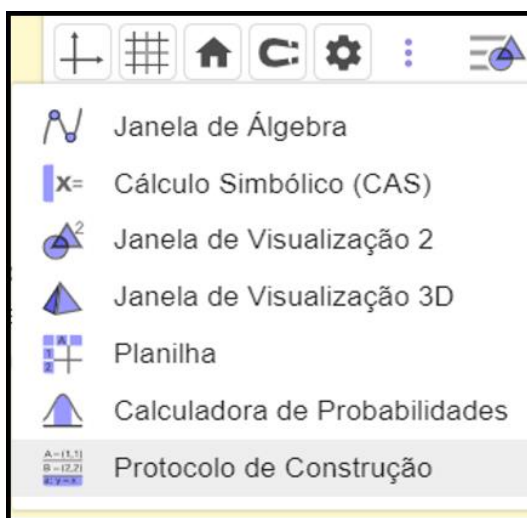
Ademais, ao considerarmos a sequência de quadrados gerada pela manipulação do controle deslizante n , encontramos os quadrados perfeitos $(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \dots)$, que seguindo a mesma lógica anterior, também representa uma PA de segunda ordem pois, ao aplicarmos o operador diferença, é definida a PA $(3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots)$ que possui razão $r = 2$.

Esta situação didática pode ser acessada e baixada através do link <https://www.geogebra.org/m/musaxma5> ou via código QR, disponível na Figura 11:

Figura 11: Código QR de acesso a situação 1

Fonte: Elaboração do autor (2023)

Além disso, é possível ao professor participante dessa pesquisa observar os aspectos metodológicos utilizados na elaboração dessa situação, acessando o protocolo de construção e verificando o passo-a-passo do seu desenvolvimento. Para isso, ele deve acessar a construção e realizar a busca conforme exposto na Figura 12:

Figura 12: Protocolo de construção da situação 1

Fonte: Elaboração do autor (2023)

A utilização do protocolo poderá sanar algumas dúvidas sobre a elaboração da situação, já que ele é apresentado em forma de tabela e apresenta em suas linhas e colunas elementos da construção previamente preparada, podendo ser refeito. Tais aspectos do GeoGebra podem contribuir para a promoção do seu uso em sala de aula e facilitar os processos de ensino.

4.2 Os números triangulares na Situação 2⁴

O problema adaptado para essa situação foi extraído do banco de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP, 2006), Nível 1 e 3ª lista, que é referente ao objeto de conhecimento de progressões de ordem n , com ênfase nas sequências dos números triangulares. e tem a seguinte descrição:

1) O famoso matemático grego Pitágoras chamou de *números triangulares* os números obtidos pela soma dos primeiros inteiros maiores que 0. Por exemplo, 1, 3, 6 e 10 são números triangulares:

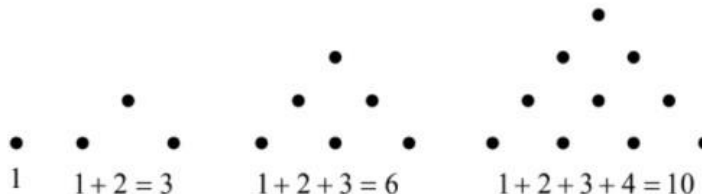
$$1 = 1$$

$$3 = 1 + 2$$

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$10 = 1 + 2 + 3 + 4$$

A configuração de pontos adiante ilustra a motivação para o nome *números triangulares* conforme se verifica a seguir.



A sequência de números triangulares continua com $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, etc. Quantos são os números triangulares menores do que 100? Qual é a razão dessa PA de segunda ordem? ⁵

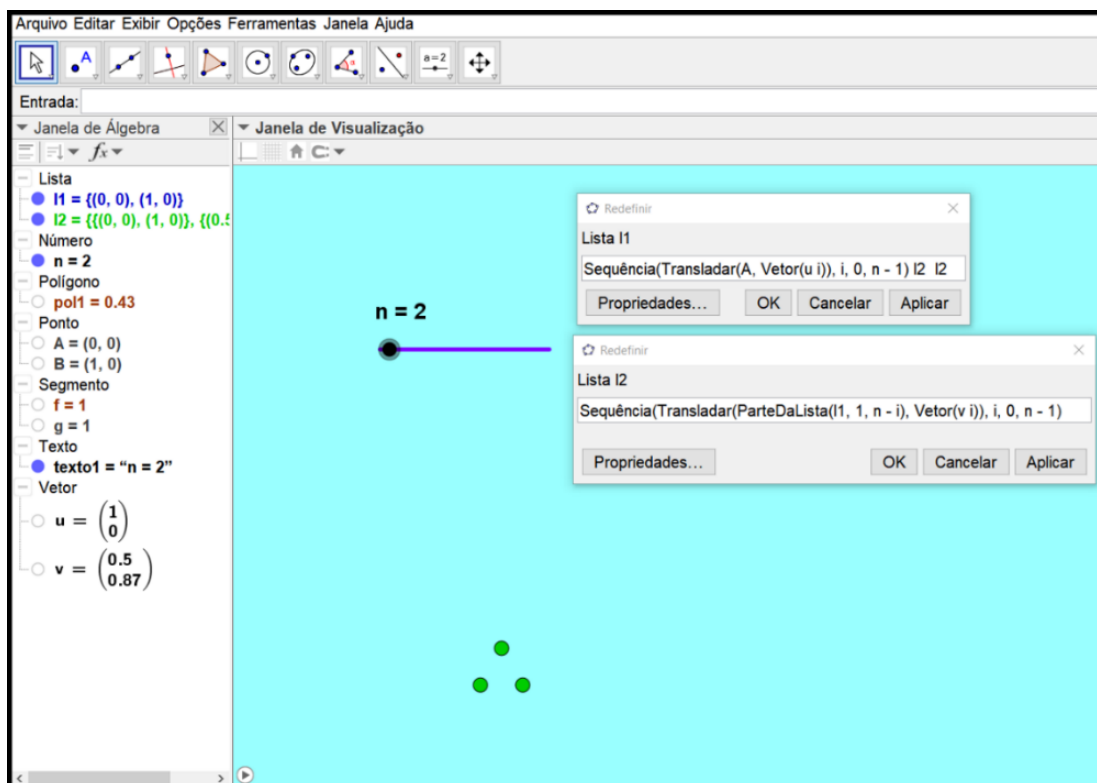
Nessa fase, Almouloud (2007, p.38), afirma que “as interações estão centralizadas na tomada de decisões”. Portanto, observa-se que os sujeitos devem interpretar e diagnosticar o problema para chegarem a uma solução. Espera-se que os sujeitos, utilizem o controle deslizante para interagir com a construção previamente elaborada, a fim de aumentarem ou diminuïrem a sequência representada pelo triângulo. Nesse sentido o GeoGebra pode facilitar essa ação, em que eles devem perceber as diferentes situações apresentadas na modelagem do

⁴ A situação apresentada nessa seção encontra-se em análise de avaliação para publicação como resultado parcial (no Prelo, de um periódico).

⁵ Esta atividade poderá ser acessada no link: <https://www.geogebra.org/m/v8bzujxq>

problema na Janela de Álgebra. Na Figura 13 apresenta-se a concepção da situação didática no ambiente do *software*:

Figura 13: Modelagem da situação 2 no GeoGebra

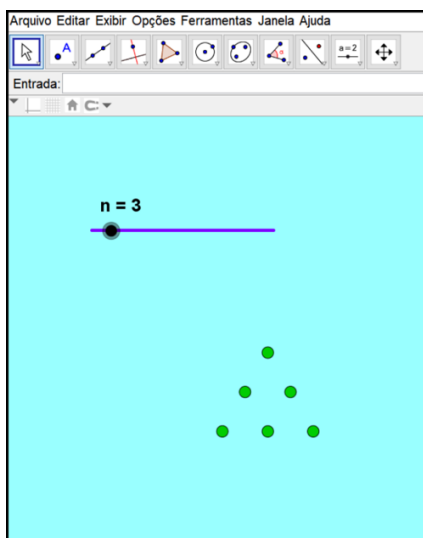


Fonte: Elaboração do autor (2023)

Nesta etapa, segundo Pais (2002), os sujeitos devem realizar procedimentos mais imediatos no intuito de resolver o problema, o que resulta na produção de um conhecimento de natureza mais experimental do que teórica. Dessa forma, motivados pelo enunciado do problema, tentam encontrar um padrão.

No problema em questão, eles devem perceber que o segundo número triangular é o primeiro acrescido de 2; o terceiro é o segundo acrescido de 3; o quarto é o terceiro acrescido de 4, e assim por diante, seguindo um padrão. O entendimento da sequência pode ser explorado através do *software* GeoGebra, movimentando o controle deslizante, como na Figura 14:

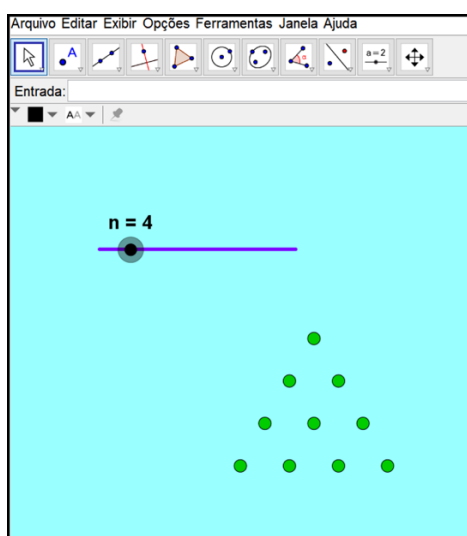
Figura 14: Representação do terceiro número triangular no GeoGebra



Fonte: Elaboração do autor (2023)

Na Figura 14 é necessária uma transposição didática do problema (CHEVALLARD, 2013), visando sempre o melhor entendimento por parte do sujeito, “ator” nesse processo. Assim, verifica-se que para o número $n = 3$, o valor correspondente será 6. Consequentemente, ao movimentar o controle deslizante para $n = 4$, obtém-se a quarta fila de pontos, o que equivale ao total de $6 + 4 = 10$ (Figura 15):

Figura 15 - representação do número triangular quando $n=4$



Fonte: Elaboração do autor (2023)

A Figura 15 mostra que o total de pontos na base do triângulo, quando $n = 4$, pode ser compreendida como o quarto número da sequência, ou seja, o quarto número triangular que é a soma de todos os números anteriores, sendo o quarto número igual a 10. Espera-se que os

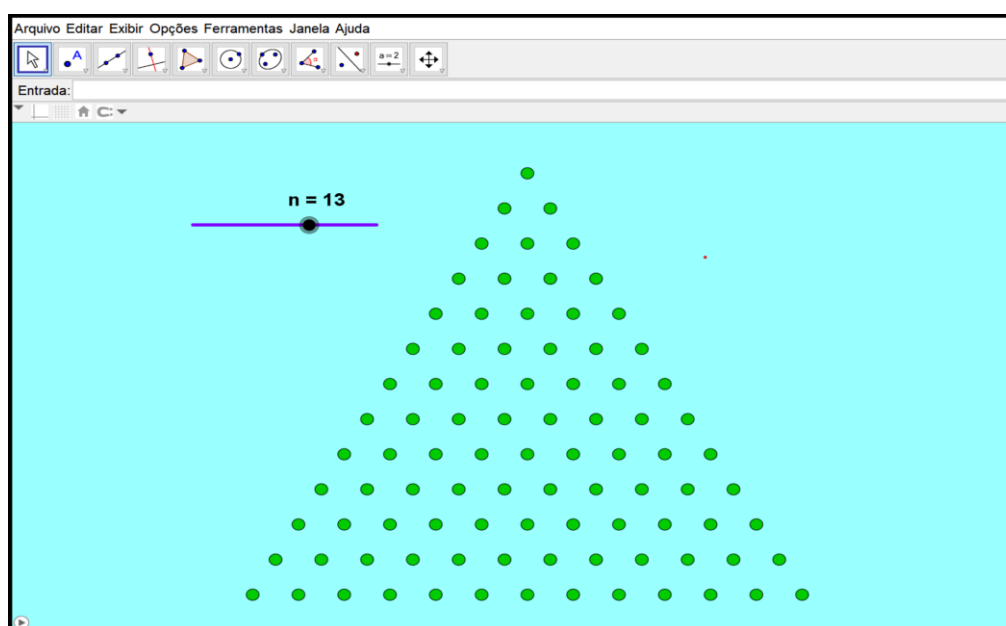
sujeitos participantes percebam a relação de recorrência e avancem no conceito em busca da solução do problema em questão, destacando os aspectos em que o GeoGebra está facilitando o seu entendimento.

É importante salientar que com a utilização do GeoGebra estes podem avançar mais alguns números e, em caso de dúvidas, podem ampliar a sua percepção sobre a situação de recorrência desse problema. A representação dos números imediatamente posteriores aos apresentados no problema pode ser de fundamental necessidade, no caso em que estes não percebem de imediato a lógica da sequência e a partir daí entram em outra fase da TSD.

Almouloud (2007) enfatiza que nessa fase ocorrem as trocas de experiências entre os sujeitos. Nesse momento, o diálogo ocorre voltado para diferentes tentativas e raciocínios que visam a solução do problema. Assim, espera-se que os sujeitos utilizem o GeoGebra em uma perspectiva exploratória, com o intuito de visualizar o comportamento da sequência dos números triangulares. Debates e confrontos de ideias podem surgir nesse momento ao observar valores cuja soma ultrapasse 100.

Deve-se observar uma variação na quantidade de pontos acrescida a cada figura, podendo, dessa forma, estabelecer a sequência de números triangulares menores que 100, e consequentemente obtendo os números 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78 e 91, o que resulta em 13 números triangulares. Essa percepção é possível, desde que seja estabelecido no controle deslizante a possibilidade de se obter a sequência de números suficientes para tal observação, conforme a Figura 16:

Figura 16 - números triangulares menores do que 100



Fonte: Elaboração Própria no GeoGebra (2023).

Após essa observação, espera-se que eles percebam que $A_1 = 1$, $A_2 = 3$, $A_3 = 6$, $A_4 = 10$, e assim, sucessivamente. Também é esperada a percepção que identifique o seguinte padrão:

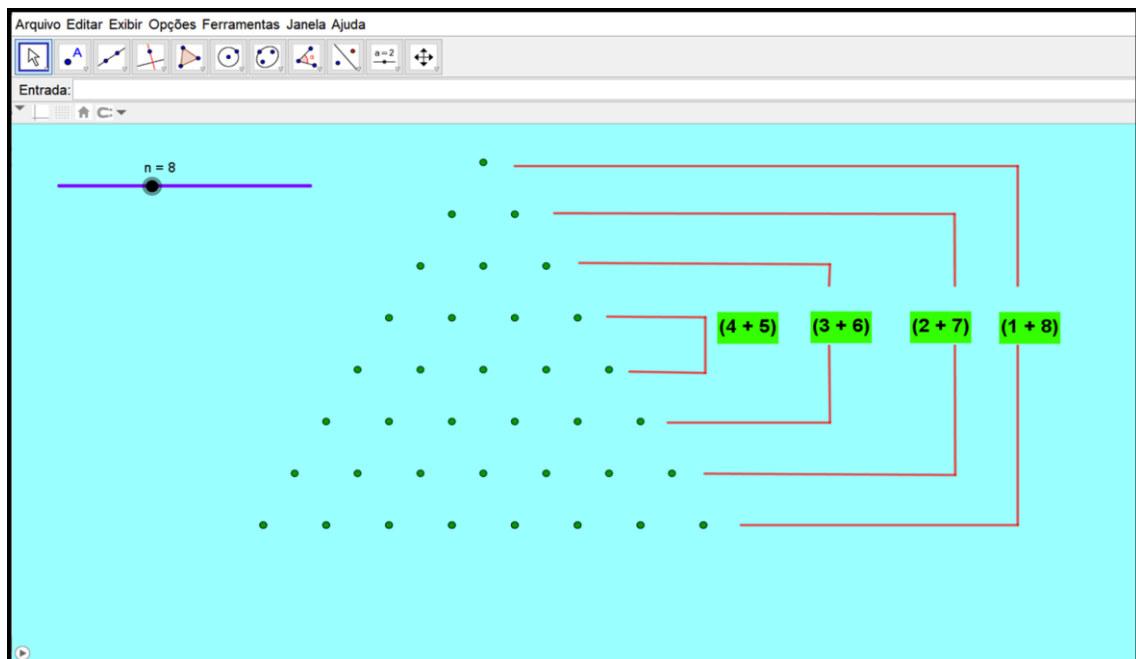
$$\begin{aligned} A_1 &= 1 \\ A_2 &= 1 + 2 = 3 \\ A_3 &= 1 + 2 + 3 = 6 \\ A_4 &= 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \\ &\vdots \\ A_n &= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n \end{aligned}$$

Deste modo, verifica-se que ao se tomar as somas duas a duas tem-se a seguinte forma:

$$A_n = (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + (4 + n - 3) + \dots$$

onde cada soma tem o mesmo valor e, portanto, são $\frac{n}{2}$ parcelas iguais (Figura 17) para a soma dos 8 primeiros números triangulares, ou seja, o A_8 :

Figura 17 - Representação do oitavo número triangular no GeoGebra.

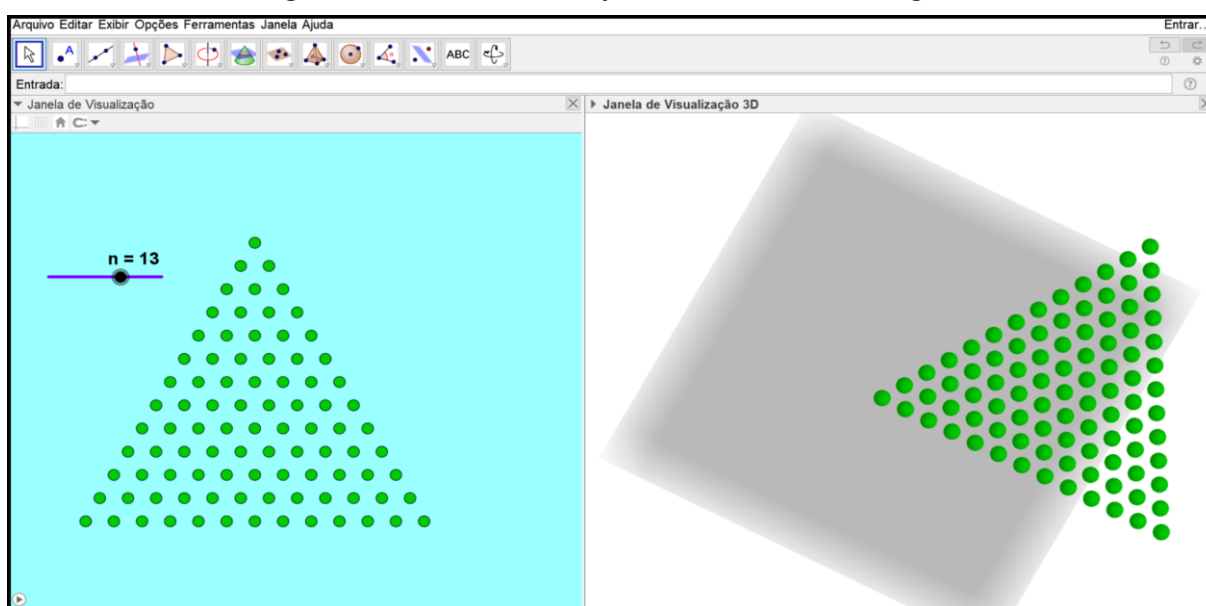


Fonte: Elaboração do autor (2023)

Com essa observação, nota-se que o oitavo número triangular é a soma de 4 parcelas iguais a 9, ou seja, $4(1 + 8)$. Então, espera-se a compreensão de que para se chegar a um termo qualquer a_n dessa sequência basta que $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ainda vale ressaltar que com o uso do GeoGebra é possível se trabalhar essa situação didática pela janela de visualização 3D, proporcionando uma melhor interação com o objeto de estudo. No campo 3D é possível observar o crescimento ou decrescimento da figura sob uma perspectiva tridimensional, como se verifica na Figura 18:

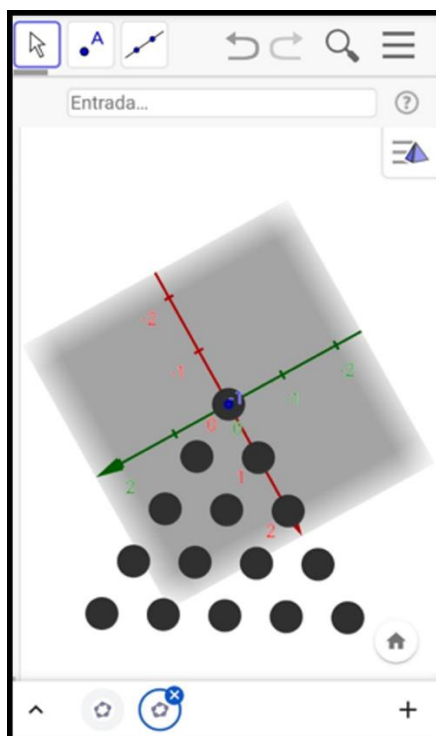
Figura 18 – Janela de visualização 2D e 3D do número triangular



Fonte: Elaboração do autor (2023)

A viabilidade de aplicação dessa situação é possível por qualquer uma das formas de visualização apresentadas anteriormente. No entanto, ao utilizar-se a janela de visualização em 3D, abre-se espaço para novas interações com o problema, podendo manipular, inclusive, a partir de aparelhos *smartphones*, conforme exemplificado na Figura 19:

Figura 19 – Visualização da SD a partir de um *smartphone*.



Fonte: Elaboração Própria no GeoGebra (2023)

A janela de visualização 3D proporciona uma visão diferente do problema, o que permite uma manipulação do objeto de estudo para criar uma perspectiva dele. Dessa forma, espera-se que este elemento possa proporcionar uma linha de raciocínio mais aproximada do objetivo deste estudo, que visa proporcionar uma nova perspectiva no ensino do tema.

Na validação, espera-se que os sujeitos apresentem argumentos sobre as estratégias utilizadas e em que o uso do *software* foi importante pois, conforme Almouloud (2007, p.40), essa fase da TSD se refere “a validação das asserções que foram formuladas nos momentos de ação e de formulação, podendo se referir a diferentes níveis de validade: sintática, semântica ou mesmo pragmática”. Entende-se, com isso, que a validação ocorre por meio de qualquer uma das soluções apresentadas na fase de formulação.

Assim, espera-se que na fase de validação ocorra um debate de ideias consolidadas na etapa anterior, o que significa que pode haver discordância ou não dos resultados apresentados pelos sujeitos. De acordo com Pais (2002, p. 73) “esse tipo de situação está relacionado ao plano de argumentação racional e, portanto, está voltada para a questão da veracidade do conhecimento”. É o momento de se verificar e atestar se os argumentos são válidos ou não.

Almeja-se, portanto, uma percepção dos sujeitos de que a sequência de números triangulares manipulada pelo controle deslizante representa uma PA de segunda ordem já que

os números $(1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, \dots)$ a partir da aplicação do operador diferença $\Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n$, permite que seja encontrada a sequência $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots)$ que representa uma PA de razão $r = 1$.

Na institucionalização, o professor assume o controle da situação e formaliza os resultados apresentados pelos sujeitos. Isso é o que Almouloud (2007, p. 40) chama de “estatuto cognitivo do saber” pois, é nessa fase que “o professor fixa, convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber”. Dessa forma, o professor passa a realizar um fechamento e pode apresentar os detalhes matemáticos do problema, como por exemplo a sequência numérica de segunda ordem a partir da manipulação do controle deslizante.

Segundo Pais (2002, p. 74) “sob o controle do professor, é o momento em que se tenta proceder à passagem do conhecimento, do plano individual e particular, à dimensão histórica e cultural do saber científico”. É, portanto, nesse contexto que o professor formaliza o conhecimento através de exemplos e contraexemplos que possibilitem sanar quaisquer inseguranças em relação aos conceitos trabalhados na situação didática apresentada.

4.3 O problema da PAPG na Situação 3⁶

O problema selecionado para esta situação pertence ao banco de questões da OBMEP 2010, Nível 3. O problema propõe o seguinte:

Determine quatro números distintos a_1, a_2, a_3 e a_4 que sejam termos consecutivos de uma Progressão Aritmética e tais que os números a_1, a_3 e a_4 formem uma Progressão Geométrica.

No trabalho com esse tipo de questão, busca-se desenvolver no sujeito a sua capacidade interpretativa, o que pode ser possível devido à transposição didática, que busca agregar uma nova perspectiva para os Problemas Olímpicos (ALVES, 2020).

Nessa fase, Almouloud (2007, p.38), afirma que “as interações estão centralizadas na tomada de decisões”. Portanto, observa-se que os sujeitos buscam interpretar e diagnosticar o problema para chegarem a uma solução. Com isso, é esperado que, ao se depararem com o problema inicial, os sujeitos busquem uma primeira interação com o controle deslizante para a manipulação da construção, buscando um entendimento prévio baseado na visualização dos gráficos presentes.

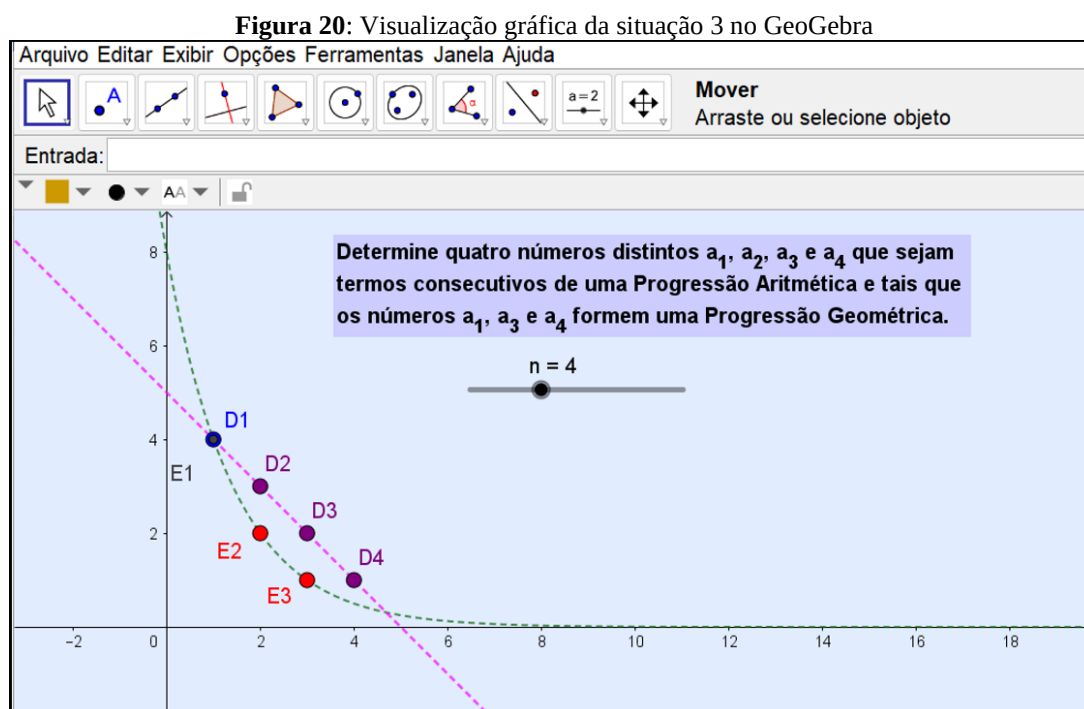
⁶ <https://drive.google.com/file/d/1mImxD9CS4QACwOohFMBIwvU4upoQCQD0/view>

Esse problema foi publicado na revista REIEC num experimento com professores e uma outra experiência com estudantes do Ensino Médio está no prelo da revista ETD para publicação.

Também é esperado que eles percebam, amparados pelo suporte visual do *software*, que embora os valores dos termos representados pelos pontos das progressões mudem com a manipulação do controle deslizante, as propriedades das sequências permanecem inalteradas, o que pode validar o fato de que o problema em questão pode assumir diversas soluções como verdadeiras.

Na situação de ação, os sujeitos são instigados pelo professor a se engajarem num processo investigativo em grupo (ALVES, 2020). Dessa forma, acontece um confronto de dados geométricos com os numéricos extraídos da situação dinâmica proporcionada pela visualização no ambiente do *software* GeoGebra e os dados prévios da situação estática do problema inicial.

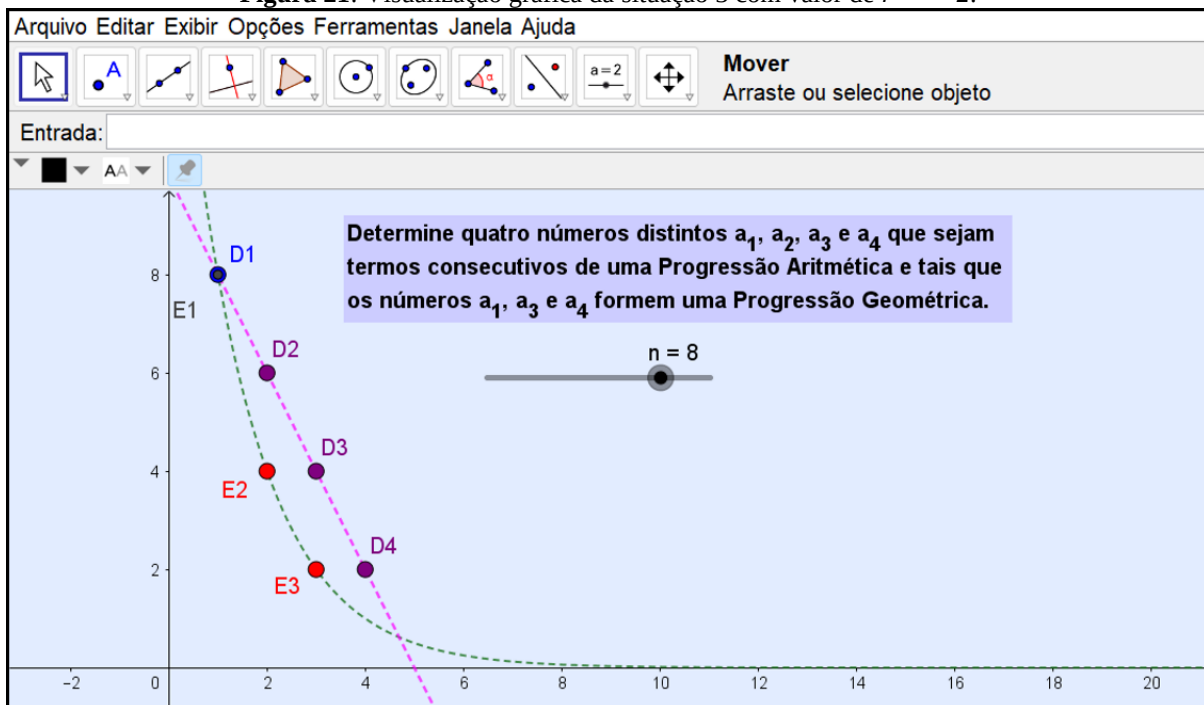
Nas Figuras 20 e 21 são expostas duas opções de representação gráfica da situação:



Fonte: Elaboração do autor (2023)

O problema original não propõe resolução baseada em aspectos da visuais. No entanto, essa abordagem propõe uma nova perspectiva para a situação, à medida que o controle deslizante é modificado. Na Figura 20 temos uma sequência em que a razão é $r = -1$ e na Figura 21 é apresentada outra possibilidade:

Figura 21: Visualização gráfica da situação 3 com valor de $r = -2$.

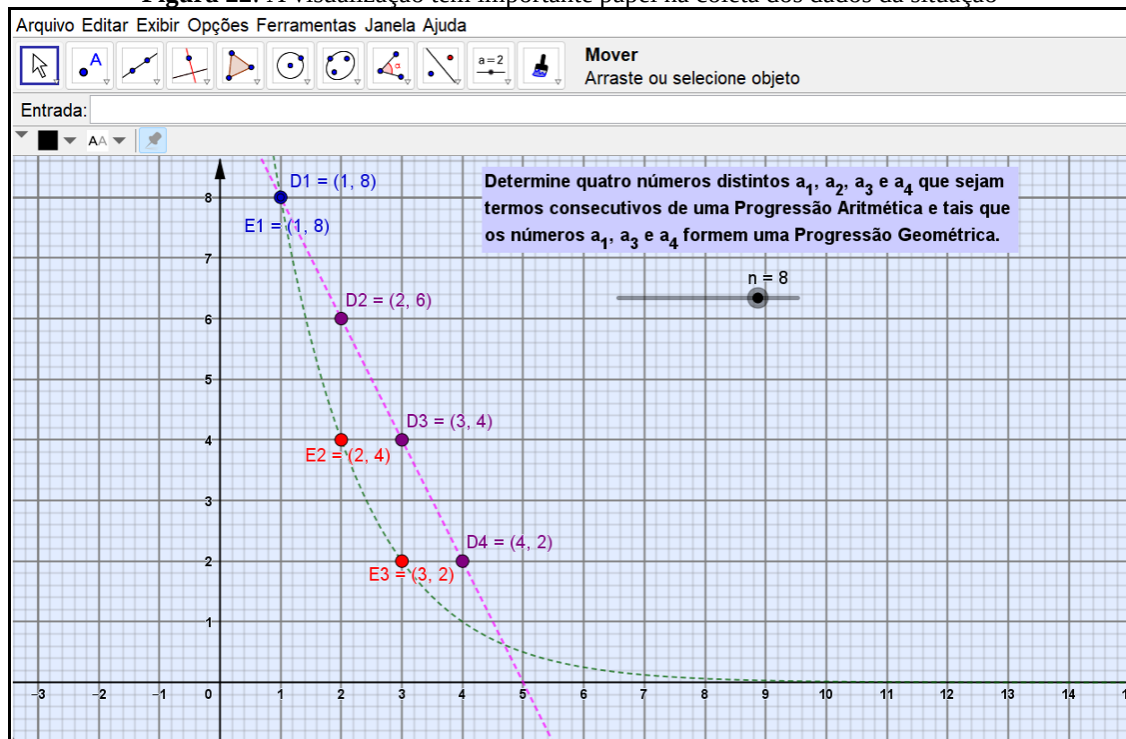


Fonte: Elaboração do autor (2023)

Alves (2020, p. 124) relata que na situação de ação o raciocínio intuitivo está “mobilizado com origem na visualização e a percepção tácita de propriedades de natureza numérica, natureza algébrica e natureza geométrica”. No cenário computacional, a partir do ambiente do GeoGebra, os sujeitos se deparam com diversas possibilidades de interação e, embasados pela visualização, avançam para a fase seguinte.

Almouloud (2007) enfatiza que a formulação é a fase em que ocorrem as trocas de experiências entre os sujeitos, e que essas podem ser via oral ou escrita. Neste momento, o diálogo ocorre de forma intensa na tentativa de desenvolver raciocínios que visem a solução do problema. Dessa forma, os sujeitos são conduzidos pela visualização a observar os pontos na malha do plano cartesiano e, a partir daí, extrair as informações que porventura ainda faltam para completar seu raciocínio. Na Figura 22 apresenta-se os pontos dispostos na reta, representando os quatro termos da PA e os três pontos da curva representando os termos da PG e suas coordenadas, respectivamente:

Figura 22: A visualização tem importante papel na coleta dos dados da situação



Fonte: Elaboração do autor (2023)

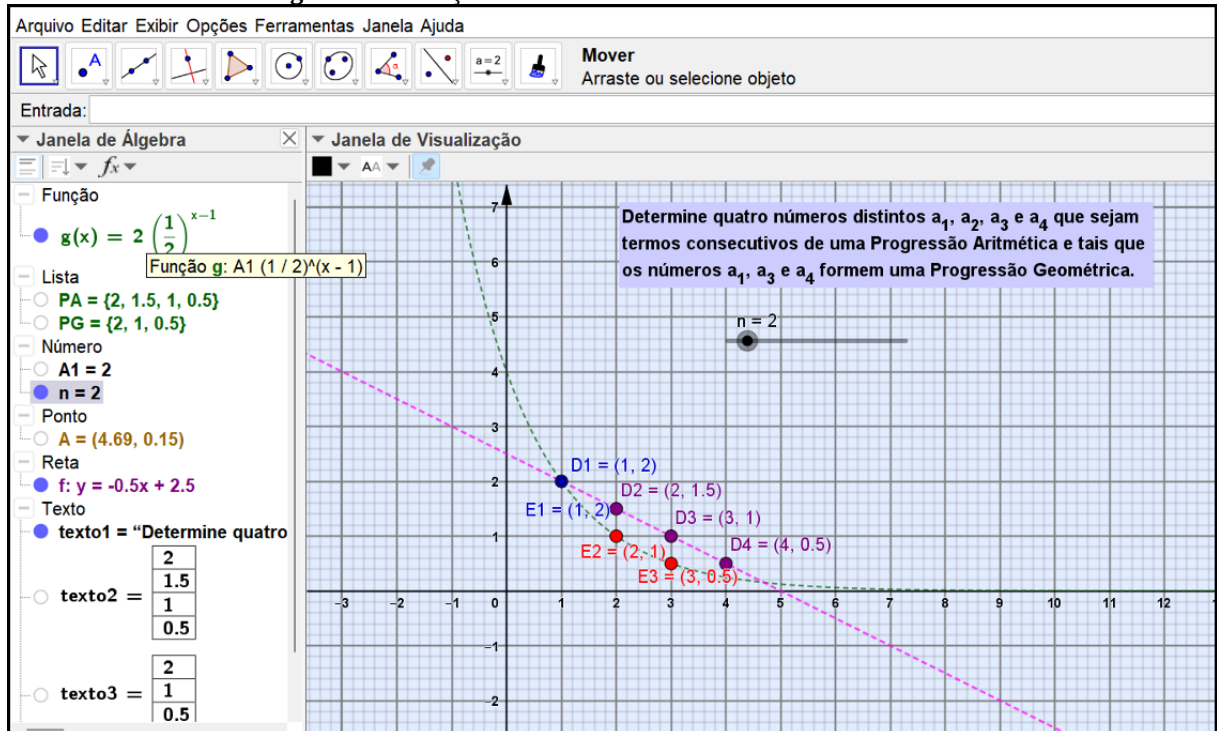
Observa-se na Figura 22 que em relação a PA contém os pontos $\{(1, 8); (2, 6); (3, 4); (4, 2)\}$ e a PG os pontos $\{(1, 8); (2, 4); (3, 2)\}$. É esperado que eles percebam a relação entre as funções e as progressões nas quais a PA está para a função linear $f(x) = -2x + 10$ e a PG está para a função exponencial $g(x) = 8(\frac{1}{2})^{x-1}$ e que para cada valor de n no controle deslizante tem-se uma situação diferente com PA e PG diferentes e, consequentemente, funções associadas diferentes.

Almouloud (2007) enfatiza que nessa fase dialética os sujeitos podem construir progressivamente uma linguagem que seja compreensível por todos e que “considere os objetos e as relações matemáticas envolvidas na situação adidática” (p. 38). Assim, ao considerarem essa relação, espera-se que eles cheguem à conclusão de que o valor de y em cada par ordenado representa o valor dos termos das respectivas progressões.

Dessa forma, isolando os termos em notação apropriada para uma linguagem mais compreensível, dado o nível de ensino a ser proposto, é salutar imaginar que as sequências sejam construídas da seguinte forma: PA = (8, 6, 4, 2) ou outra similar de acordo com o valor do controle deslizante escolhido e PG = (8, 4, 2), analogamente. Daí, segue-se para o ponto crucial dessa situação, que é encontrar a razão das progressões como $r = -2$ e $q = \frac{1}{2}$.

Vale ressaltar que, embora o valor de r varie em infinitos valores, espera-se que os sujeitos concluam que o valor de q permanece constante, conforme se verifica na Figura 23, em que $r = -\frac{1}{2}$ e $q = \left(\frac{1}{2}\right)$.

Figura 23: Variação de “ r ” ao movimentar o controle deslizante.



Fonte: Elaboração do autor (2023)

Percebe-se que a mediação do professor é de suma importância para a orientação da situação, pois esta visa criar um caminho de raciocínio lógico na exploração visual do *software*, a fim de se obter o melhor aproveitamento da evolução dos sujeitos.

Esta fase é o momento em que os sujeitos argumentam e apresentam as estratégias matemáticas desenvolvidas na resolução do problema, conforme previsto em Almouloud (2007, p.40), essa dialética é “a validação das asserções que foram formuladas nos momentos de ação e de formulação, podendo referir-se a diferentes níveis de validade: sintática, semântica ou mesmo pragmática (relativa à eficácia do texto)”.

Nesse sentido, os sujeitos devem organizar e apresentar os argumentos desenvolvidos nas fases anteriores na tentativa de solucionar o problema. Alves (2020, p. 334) afirma que “o professor deverá estimular a atividade de provas e demonstrações com origem nos dados coligidos da investigação na etapa anterior, confrontando-os com o ambiente computacional e suas potencialidades”.

É salutar crer que será natural a inferência de que se a PA tem quatro termos ela poderá ser escrita como uma sequência $(x, x + r, x + 2r, x + 3r)$ e que a PG por definição seja escrita como $(x, x + 2r, x + 3r)$. De forma geral, é esperado que os sujeitos cheguem ao resultado para a razão dessa PA baseados na propriedade do termo médio da PG. Assim, tem-se:

$$(x + 2r)^2 = x * (x + 3r)$$

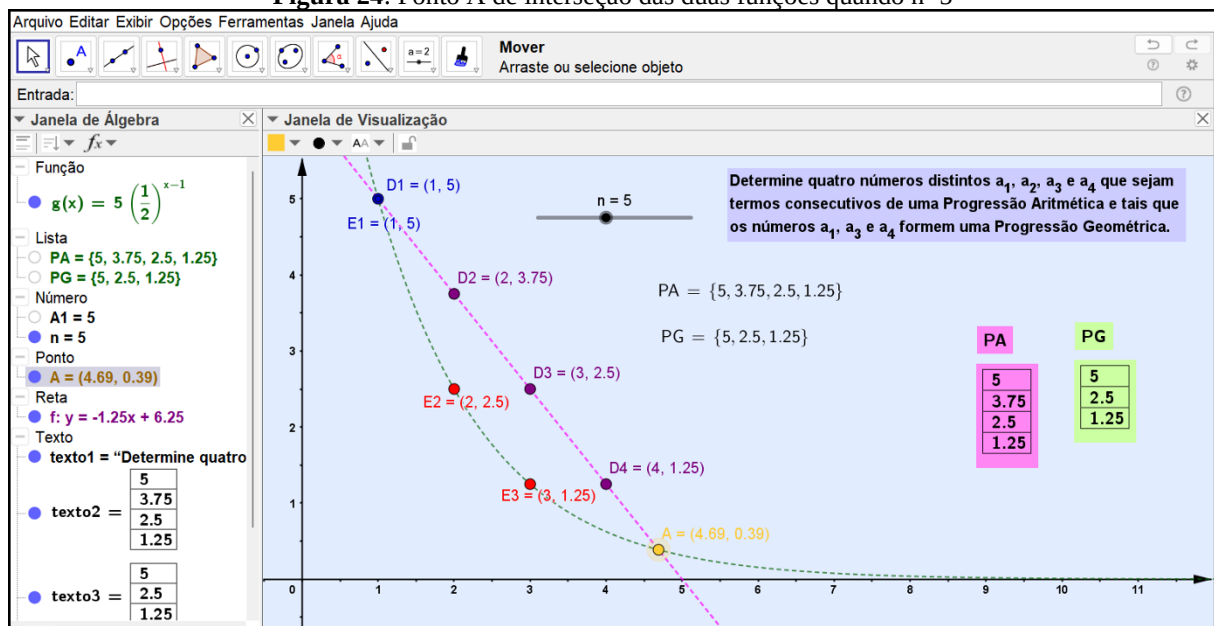
desenvolvendo a igualdade encontra-se:

$$x^2 + 4xr + 4r^2 = x^2 + 3xr$$

continuando $4xr + 4r^2 = 3xr$, e daí $4r^2 = -xr$, ou seja, o valor de $r = -\frac{x}{4}$.

Na institucionalização é o momento em que o professor assume o controle da situação e busca a formalização dos resultados encontrados pelos sujeitos, o que segundo Almouloud (2007, p. 40), representa o momento em que “o professor fixa, convencionalmente e explicitamente, o estatuto cognitivo do saber”. Cabe ao professor apresentar argumentos sobre o fato de existirem infinitas razões para a PA e detalhar o modelo computacional, realizando uma conclusão das ideias. Ressaltamos que nem todos os pontos que fazem parte das duas funções, ou são necessariamente termos da PA ou da PG, como é o caso do ponto A mostrado na Figura 24:

Figura 24: Ponto A de interseção das duas funções quando $n=5$



Fonte: Elaboração do autor (2023)

É importante frisar que através da visualização são explorados aspectos inicialmente não presentes na situação problema, e que se tornam evidentes após a modelização no *software*, como na Figura 24. Outro aspecto a ser observado, após a institucionalização realizada pelo

professor, é que o saber passa a se tornar oficial e a ser incorporado pelos sujeitos ampliando o seu campo de utilização (ALMOULOU, 2007). Assim, sendo o aluno o responsável pelas fases de Ação, Formulação e Validação, cabe ao professor fazer o fechamento na institucionalização e dar um direcionamento na condução do saber a ser ensinado.

Cabe acrescentar que o *software* permite que sejam realizadas algumas operações de cálculos, como o realizado para encontrar a razão da PA na aba “GeoGebra Notas⁷” e que pode ser verificada na Figura 25, mostrando os passos dessa resolução e se configurando como uma excelente ferramenta a ser explorada pelos professores do Ensino Médio:

Figura 25: Aba GeoGebra Notas na versão online do software

$$\begin{array}{lll}
 (x+2r)^2 = x \cdot (x+3r) & \frac{4xr+4r^2}{3} = xr & \frac{4r^2}{3} = \frac{-xr}{3} \\
 x^2 + 2x2r + 4r^2 = x \cdot (x+3r) & \frac{4xr}{3} + \frac{4r^2}{3} = xr & \frac{r^2}{3} = \frac{-xr}{3 \cdot 4} \\
 x^2 + 4xr + 4r^2 = x \cdot (x+3r) & \frac{4r^2}{3} = xr - \frac{4xr}{3} & \frac{r^2}{3} = \frac{-xr}{12} \\
 x^2 + 4xr + 4r^2 = x^2 + 3xr & \frac{4r^2}{3} = \frac{xr3}{3} - \frac{4xr}{3} & \frac{r^2}{3r} = \frac{-x}{12} \\
 x^2 - x^2 + 4xr + 4r^2 = 3xr & \frac{4r^2}{3} = \frac{xr3 - 4xr}{3} & \frac{r}{3} = \frac{-x}{12} \\
 0 + 4xr + 4r^2 = 3xr & \frac{4r^2}{3} = \frac{-1xr}{3} & r = \frac{-x3}{4 \cdot 3} \\
 4xr + 4r^2 = 3xr & \frac{4r^2}{3} = \frac{-xr}{3} & r = \frac{-x}{4} \\
 \frac{4xr+4r^2}{3} = xr & &
 \end{array}$$

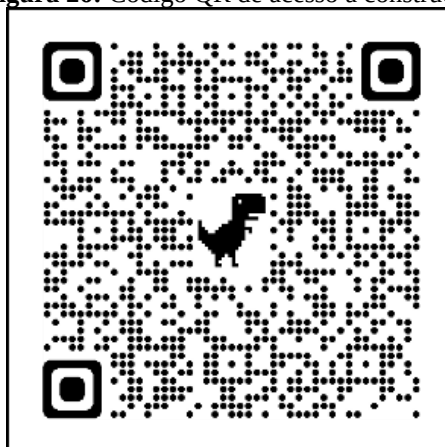
Fonte: Elaboração Própria no GeoGebra.org (2023)

Além desse recurso, também é possível ter acesso à construção desta atividade através de um *link* ou código QR, que possibilita inclusive que ela seja modificada à medida que se tenha outro objetivo para seu uso. Este *link*⁸ está disponível para acesso e na Figura 26 ofertamos seu código QR. Caso o professor sinta a necessidade de conhecer o passo-a-passo da construção, ele pode acessar, baixar o arquivo e analisar a tabela de protocolo no menu “Exibir” do GeoGebra:

⁷ Disponível no endereço <https://www.geogebra.org/notes/kc5ymbnf>

⁸ <https://www.geogebra.org/m/e8p7hgyc> (Link da Situação 3 – PAPG).

Figura 26: Código QR de acesso a construção



Fonte: Elaboração do autor (2023)

4.4 A PGA^2 na perspectiva da visualização gráfica na Situação 4⁹

Apresenta-se a seguir um problema extraído de Rocha (2019, p. 41) e adaptado para esta situação de ensino, cuja abordagem está relacionada ao assunto das sequências PGA^2 , conforme exposto nas análises preliminares. Seu enunciado propõe:

A progressão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (3, 7, 14, 25, 42, \dots)$, onde $a_n = (n^2 + 1) + 2^{n-1}$, é uma PGA^2 . Assim, determine: a) os seus 20 primeiros termos; b) as sequências geradas pelo operador diferença $(\Delta^k a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e, c) a função exponencial que contém os pontos gerados pela sequência final dessa PGA^2 .

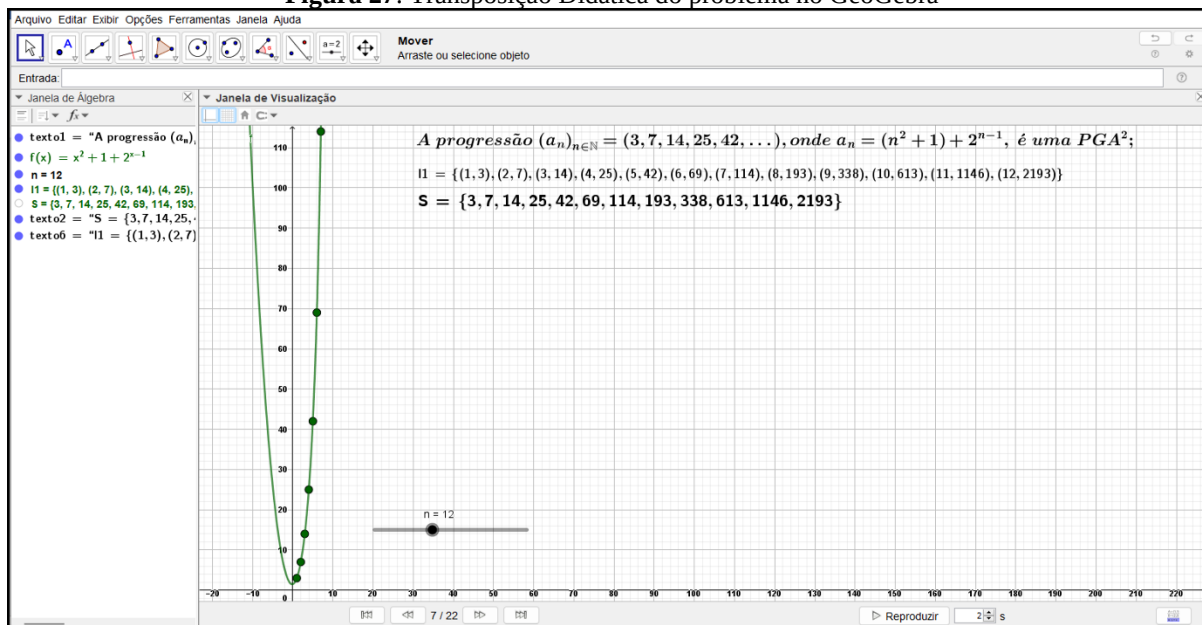
Na situação de ação, Almouloud (2007, p.38), afirma que “as interações estão centralizadas na tomada de decisões”. Portanto, observa-se que os sujeitos buscam interpretar e diagnosticar o problema para chegar a uma solução. Com isso, é esperado que, ao se depararem com o problema inicial, os sujeitos busquem uma primeira interação com o controle deslizante para a manipulação da construção e um entendimento prévio baseado na visualização dos gráficos presentes.

Na dialética da ação, os sujeitos são instigados pelo professor a se engajarem num processo investigativo em grupo (ALVES, 2020). Dessa forma, acontece um confronto de dados geométricos com os numéricos extraídos da situação dinâmica proporcionada pela visualização no ambiente do *software* GeoGebra e os dados prévios da situação estática do problema inicial.

⁹ <https://www.geogebra.org/m/mwrdw2qm> (Link da Situação 4 - PGA).

Espera-se também que haja uma transposição didática para uma interpretação da fórmula do termo geral da sequência $a_n = (n^2 + 1) + 2^{n-1}$ para a lei de formação da função exponencial $f(x) = (x^2 + 1) + 2^{x-1}$, ocasionando a primeira interação dos sujeitos no ambiente do *software* com o problema e visualizando a sequência posta na Janela de Visualização, de acordo com o proposto. Na Figura 27 se verifica como se inicia essa interação:

Figura 27: Transposição Didática do problema no GeoGebra



Fonte: Elaboração do autor (2023)

Nesse momento, é conveniente esperar que os sujeitos percebam a partir da visualização que a sequência S representa os termos da progressão do problema, e que na lista dos pontos da função f , a sequência é representada pelas coordenadas y de cada par ordenado. Com algo a mais que a situação estática original, no GeoGebra existe a possibilidade de aumentar ou diminuir a sequência movimentando o controle deslizante e, com isso, ampliando o campo de visualização dos seus termos originalmente limitados na escrita.

Enfatiza-se que devido a essa característica do GeoGebra, na utilização das situações elaboradas para esse trabalho como proposta de ensino, o *software* pode facilitar o ensino deste conteúdo, já que os sujeitos poderão se valer destas construções para trabalhar com os estudantes, criando objetivos específicos para o ensino das sequências a partir de uma perspectiva bem mais abrangente com o raciocínio pela visualização.

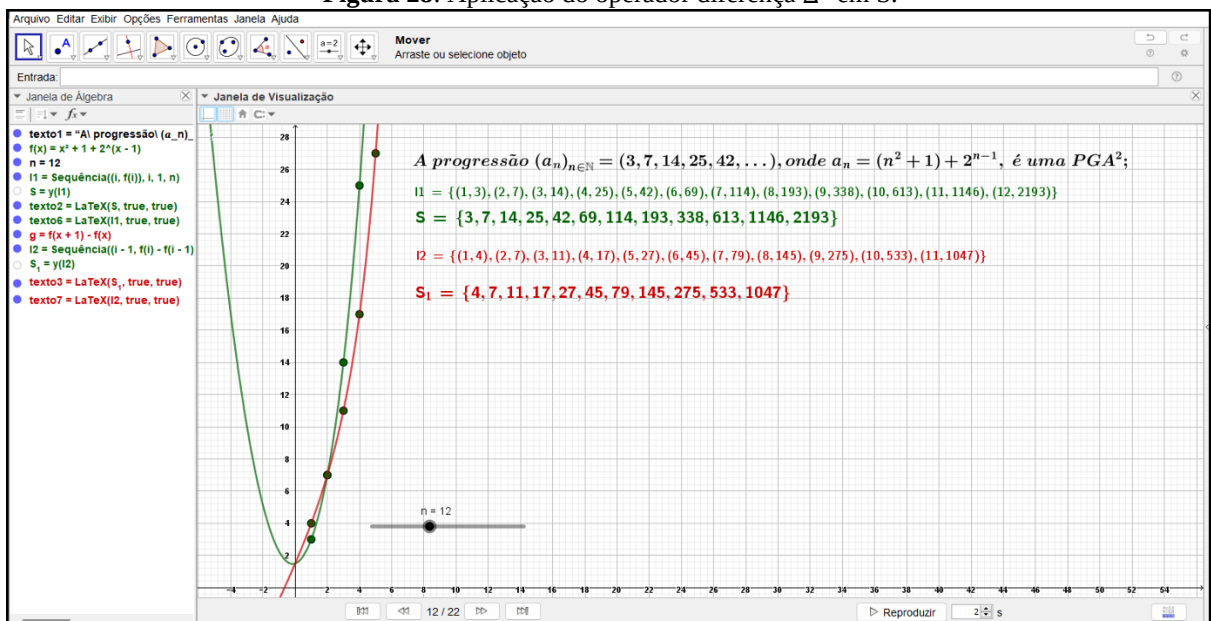
Alves (2020, p. 124) relata que na situação de ação, uma das características do raciocínio intuitivo está “mobilizado com origem na visualização e a percepção tácita de propriedades de natureza numérica, natureza algébrica e natureza geométrica”. No cenário computacional, que

se apresenta no ambiente do GeoGebra, os sujeitos se deparam com diversas possibilidades de interação e embasados pela visualização avançam para a fase seguinte.

Almouloud (2007) enfatiza que a dialética de formulação é a fase em que ocorrem as trocas de experiências entre os sujeitos e que essas podem ser via oral ou escrita. Nesse momento, o diálogo ocorre de forma intensa na tentativa de desenvolver raciocínios que visem a solução do problema. Dessa forma, os sujeitos são conduzidos pela visualização a observar os pontos na função $f(x)$ e comparar com os pares ordenados na lista $l1$ e com a sequência S .

Dando continuidade nessa abordagem, após a apresentação do próximo passo, os sujeitos se deparam com uma nova função e com uma nova sequência. Nesse momento, segundo Alves (2020), há uma troca de informações entre os sujeitos e essa troca pode levar estes a chegarem a algumas conclusões. Neste caso, espera-se que eles percebam que da sequência S para a S_1 houve a aplicação de um operador diferença Δ^1 , conforme definido anteriormente. Na Figura 28 apresenta-se essa evolução após a aplicação do operador diferença na sequência S :

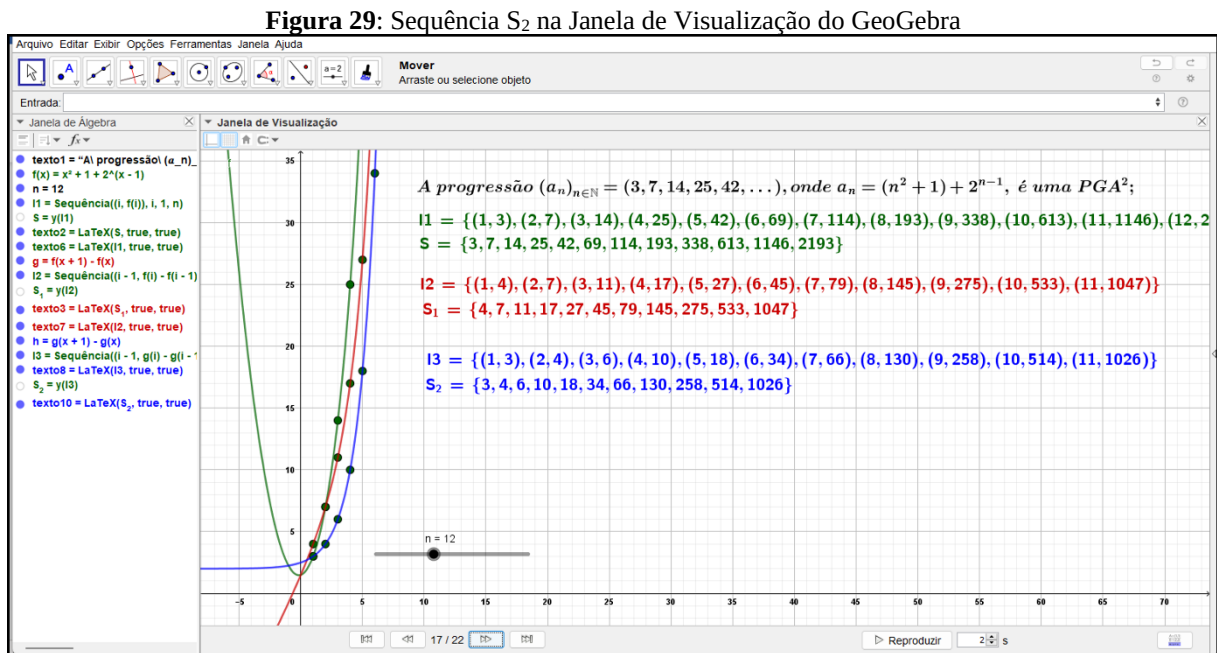
Figura 28: Aplicação do operador diferença Δ^1 em S .



Fonte: Elaboração do autor (2023)

Com a visualização das sequências S e S_1 na Janela de Visualização do GeoGebra, os sujeitos deverão chegar à conclusão de que a relação entre elas é exatamente a diferença entre ambas e, assim, abrir margem para uma verificação na próxima sequência a ser mostrada.

Para reforçar essa ideia, verifica-se na Janela de Álgebra como foi formada a função, $g(x) = f(x + 1) - f(x)$. Assim, para buscar esse reforço, apresenta-se na Figura 29 a próxima sequência a fim de verificar tal hipótese:



Fonte: Elaboração Própria no GeoGebra (2023)

A partir desse ponto, é esperado que os sujeitos tenham assimilado o conceito necessário para determinar a próxima sequência, realizando mais uma vez o operador diferença e consequentemente chegando no resultado $S_3 = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \dots\}$, satisfazendo ao item b do enunciado e partindo para a próxima fase da TSD.

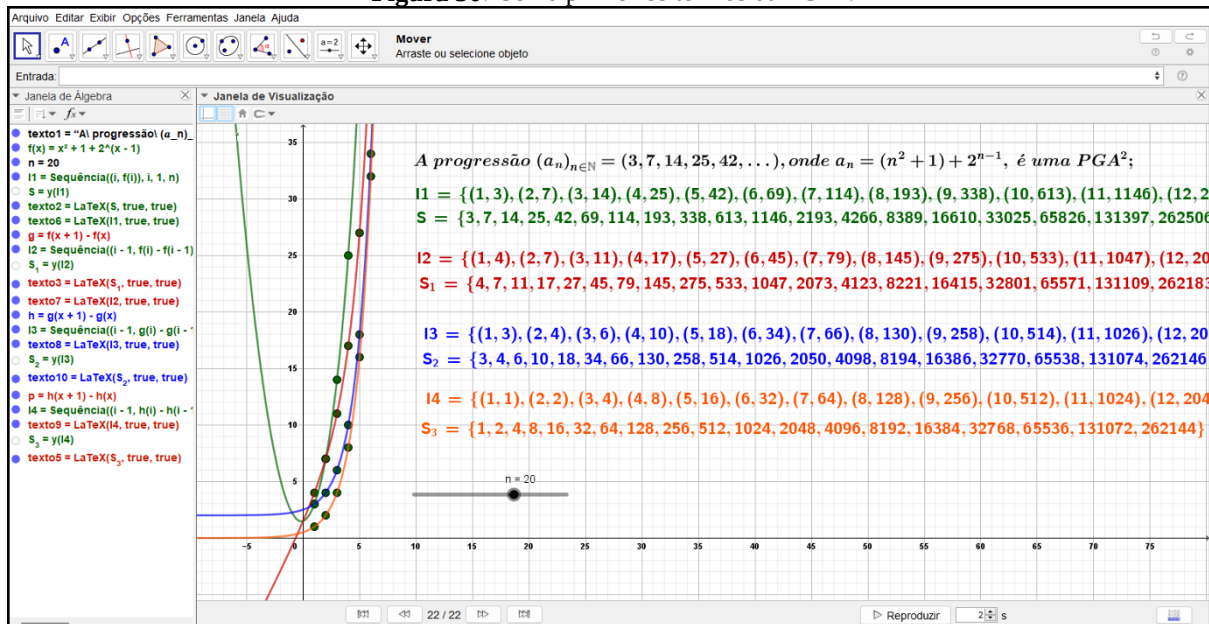
A validação é o momento em que os sujeitos argumentam e apresentam as estratégias matemáticas desenvolvidas na resolução do problema. Conforme previsto em Almouloud (2007, p. 40), essa dialética é “a validação das asserções que foram formuladas nos momentos de ação e de formulação, podendo referir-se a diferentes níveis de validade: sintática, semântica ou mesmo pragmática (relativa à eficácia do texto)”. Nesse sentido, os sujeitos devem organizar e apresentar os argumentos desenvolvidos nas fases anteriores na tentativa de solucionar o problema.

Alves (2020, p. 334) afirma que “o professor deverá estimular a atividade de provas e demonstrações com origem nos dados coligidos da investigação na etapa anterior, confrontando-os com o ambiente computacional e suas potencialidades”.

Nesse momento, os sujeitos podem apresentar como resposta ao item a do problema original, a sequência S_3 com os seus vinte primeiros termos, a partir da manipulação do controle

deslizante. Reforçamos que, sem o aporte do GeoGebra, esta tarefa se tornaria demasiadamente cansativa e perderia o sentido de praticidade desejado, conforme se verifica na Figura 30:

Figura 30: Os 20 primeiros termos da PGA².



Fonte: Elaboração Própria no GeoGebra (2023)

Outra questão a ser observada nessa fase é que os sujeitos são instigados a demonstrarem suas hipóteses. Conforme Alves (2020), o professor deve sempre estimular a investigação, no sentido de orientar a busca por fórmulas que possam representar o modelo geral. Entende-se, com isso, que ao realizarem essa etapa tem-se concluído a solução para o item a do problema, restando ainda responder ao item c.

Cabe ao professor controlar a situação e direcionar os sujeitos na visualização dos elementos presentes na Janela de Álgebra, na qual está descrita a função $f(x)$ mencionada acima, que é resultado direto da transposição didática da fórmula da sequência S . Por definição, a função $g(x)$ será o resultado da operação $f(x+1) - f(x)$ pela aplicação do operador diferença Δ^1 , resultando em $g(x) = 2x + 2^x - 2^{x-1} + 1$ e na sequência S_1 .

Analogamente, para o resultado da função $h(x) = g(x+1) - g(x)$, tem-se a aplicação do operador diferença Δ^2 que resulta em $h(x) = 2^{x-1} + 2$ e na sequência S_2 . Nessa mesma linha de raciocínio realiza-se o operador diferença Δ^3 mais uma vez e chega-se na função $p(x) = 2^x - 2^{x-1}$ e na sequência S_3 , que representa a PG de primeiro termo $a_1=1$ e razão $q = 2$, respondendo assim ao item c do enunciado.

A institucionalização marca o momento em que o professor assume o controle da situação e busca a formalização dos resultados encontrados pelos sujeitos, o que segundo

Almouloud (2007, p. 40), representa o momento em que “o professor fixa, convencionalmente e explicitamente, o estatuto cognitivo do saber”. Cabe ao professor apresentar argumentos sobre o fato de que na PGA os termos são representados de tal forma que cada elemento é o resultado da soma ordenada de uma PA a uma PG.

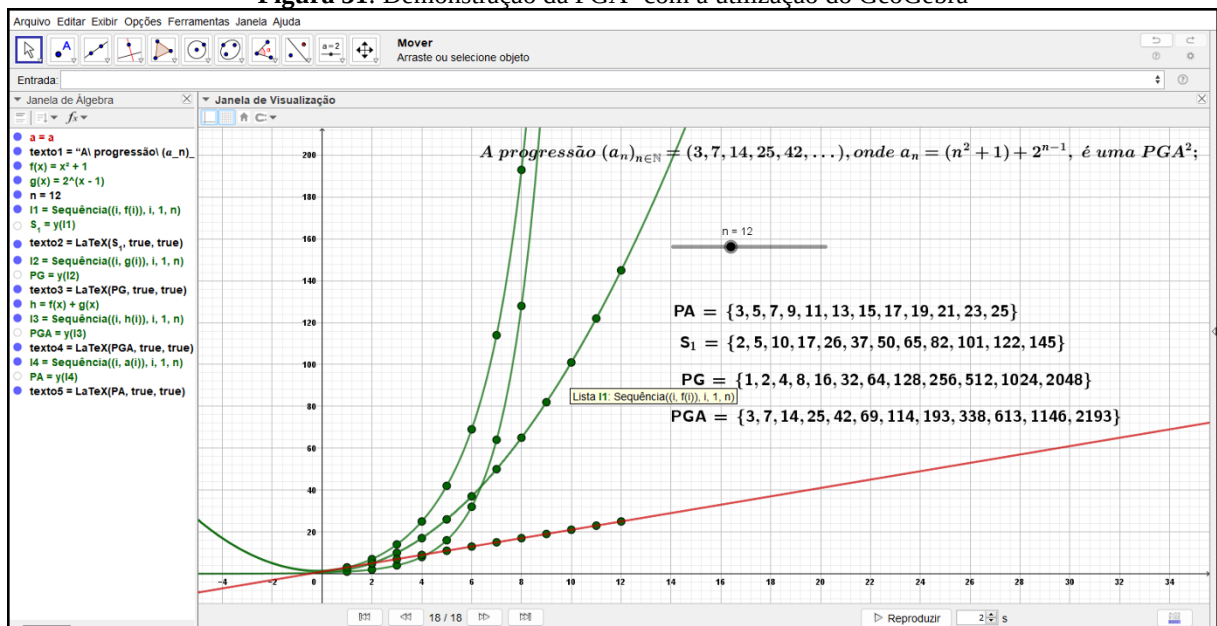
Assim, de acordo com Paiva (RPM, 73, p. 49), suponha que os termos consecutivos de uma PG sejam $(a, a*q, a*q^2, \dots, a*q^{n-1}, \dots)$ e que quando ordenadamente somados com os termos consecutivos de uma PA $(0, r, 2r, \dots, (n-1)r, \dots)$, geram uma outra sequência, que é o resultado dessa soma $(a, a*q + r, a*q^2 + 2r, \dots, a*q^{n-1} + (n-1)r, \dots)$ denominada Progressão Geométrico-Aritmética (PGA).

Com o auxílio do GeoGebra, é possível realizar uma demonstração simples, porém fundamental, para se provar que a PGA é o resultado da soma de duas sequências. De acordo com o enunciado, o seu termo geral é $a_n = (n^2 + 1) + 2^{n-1}$. Realizando uma transposição didática para o ambiente do *software* e dividindo essa equação em duas partes, chegamos às seguintes funções:

- $f(x) = x^2 + 1$ como função geradora dos termos de uma PA^2 , de segunda ordem, denominada na Janela de Visualização de S_1 ;
- $g(x) = 2^{x-1}$ como uma função geradora de uma PG de razão 2.

Para demonstrar, apresentamos a Figura 31 dessa construção, que mostra as sequências que dão origem à sequência S original desse problema, denotada na Janela de Visualização do GeoGebra por PGA:

Figura 31: Demonstração da PGA^2 com a utilização do GeoGebra



Fonte: Elaboração do autor (2023)

A Sequência $S_1 = \{2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, \dots\}$, apresentada na Figura 31, configura-se como de segunda ordem pois, ao ser realizado o operador diferença Δ^1 resulta da PA $= \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, \dots\}$, limitadas na imagem pelo controle deslizante. Observa-se também o aspecto visual da PA disposta em uma reta, enquanto as demais sequências estão dispostas em curvas.

4.5 A PAG sob o viés da visualização gráfica na Situação 5¹⁰

A quinta situação a ser trabalhada neste estudo se refere a um problema de PAG, extraído do texto da Revista do Professor de Matemática, número 73 e página 48, do autor Paiva (2010). O problema foi adaptado para esta situação de ensino utilizando o GeoGebra e tem como mote principal o seguinte texto:

$1, \frac{2}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{8}, \frac{5}{16}, \dots$ é uma PAG com termo geral $a_n = [1 + (n - 1)] \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = n * 2^{1-n}$.

Determinar a soma dos termos dessa PAG e o comportamento dos seus termos no gráfico da função discreta exponencial que os comporta.

Ressaltamos que a questão não oferece nenhum recurso visual como suporte.

Na situação de ação, Almouloud (2007, p. 38), afirma que “as interações estão centralizadas na tomada de decisões”. Portanto, observa-se que os sujeitos buscam interpretar e diagnosticar o problema para chegarem a uma solução. Com isso, espera-se que ao se depararem com o problema inicial, os sujeitos busquem uma primeira interação com o controle deslizante para a manipulação da construção ao buscar um entendimento prévio baseado na visualização dos gráficos presentes.

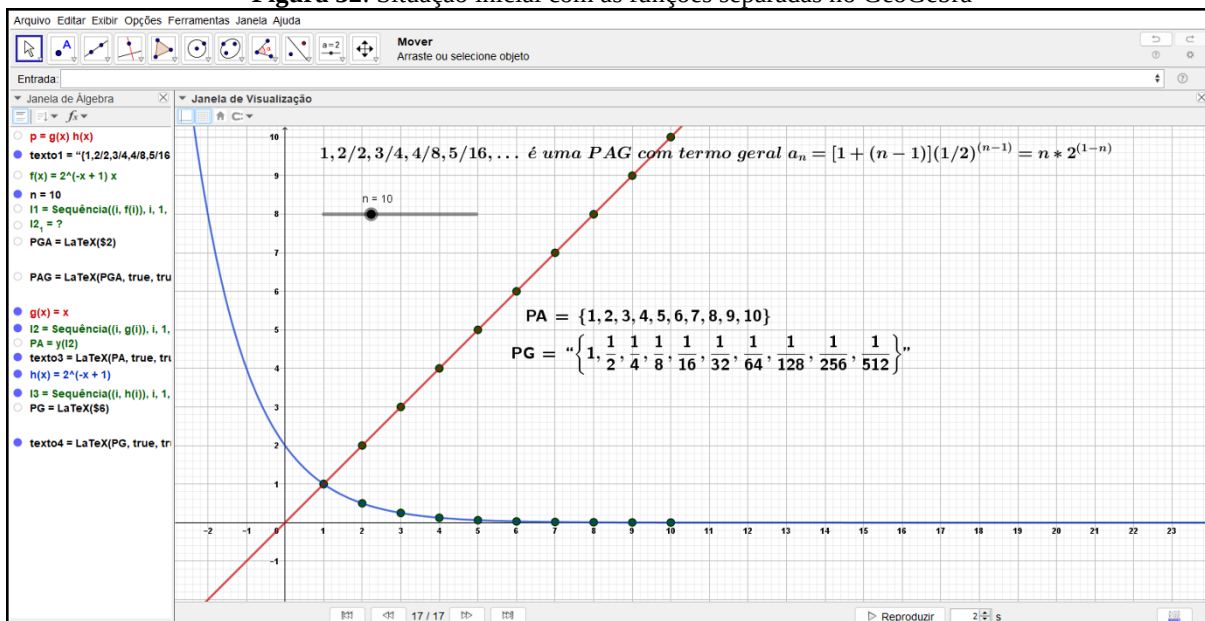
Ao iniciar a dialética da ação, os sujeitos são instigados pelo professor a se engajarem num processo investigativo em grupo (ALVES, 2020). Dessa forma, acontece um confronto de dados geométricos com os numéricos extraídos da situação proporcionada pela visualização no ambiente do *software* GeoGebra e os dados prévios da situação estática do problema inicial.

Nesse momento, os sujeitos devem observar na Janela de Visualização do *software* alguns elementos estáticos e outros dinâmicos. Espera-se a realização de uma transposição didática da situação estática do problema inicial para uma situação dinâmica, proporcionada pela manipulação desses elementos, tanto na Janela de Visualização como na Janela de Álgebra.

¹⁰ <https://www.geogebra.org/m/ktfjvmnc> (Link da Situação 5 – PA²G)

Com isso, apresenta-se de início o gráfico que representa os termos da PA, a fim de levar os sujeitos a buscar informações que levem à resolução do problema. Também é mostrado o gráfico da função que representa a PG, conforme exposto na Figura 32:

Figura 32: Situação inicial com as funções separadas no GeoGebra



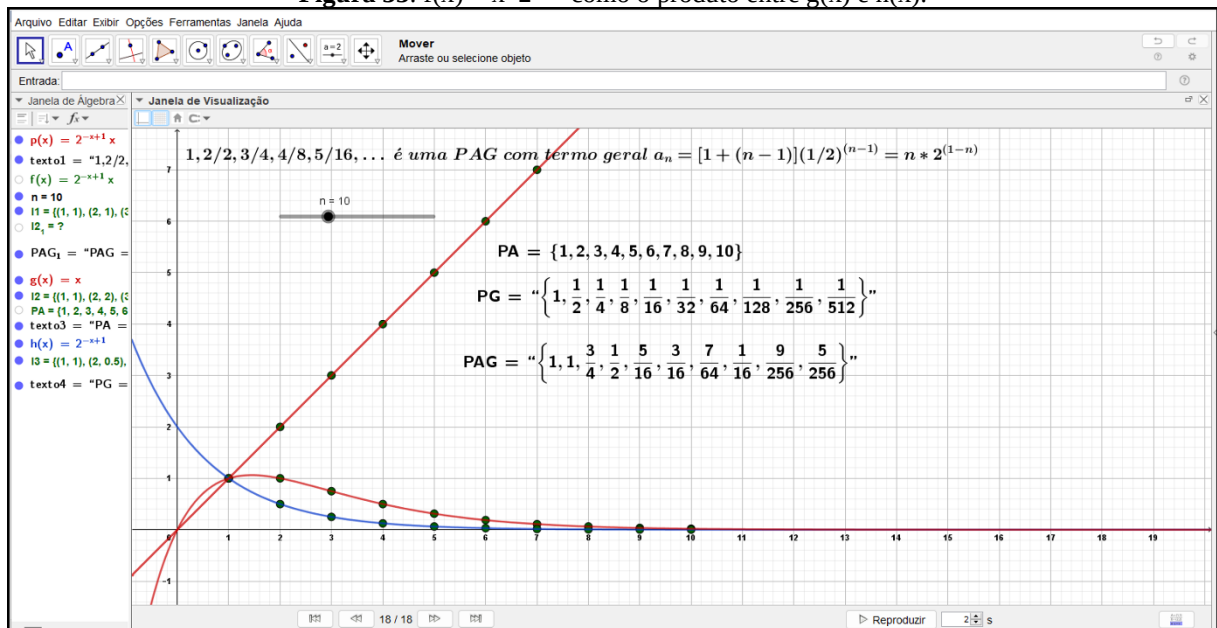
Fonte: Elaboração do autor (2023).

É esperado que, ao se depararem com a situação inicial, conforme mostrado na figura 32, os sujeitos tentem observar o crescimento ou decrescimento das sequências de modo associado à manipulação do controle deslizante e a visualização dos pontos nos gráficos, bem como os valores numéricos presentes na Janela de Visualização.

Almouloud (2007) enfatiza que a formulação é a fase em que ocorre as trocas de experiências entre os sujeitos e que essas podem ser via oral ou escrita. Nesse momento, o diálogo ocorre de forma intensa na tentativa de desenvolver raciocínios que visem a solução do problema. Dessa forma, os sujeitos são conduzidos pela visualização a observar os pontos na função $g(x)$ e comparar com os valores presentes na lista denominada PA, bem como na função $h(x)$ e a lista denominada PG, ambas expostas na Janela de Visualização.

Nesse momento, segundo Alves (2020), há uma troca de informações entre os sujeitos e essa troca pode levar estes a algumas conclusões. Nesse caso, espera-se que eles percebam, a partir da visualização do gráfico da Figura 33, que os seus pontos se referem ao produto dos termos da sequência PA com os termos equivalentes da PG:

Figura 33: $f(x) = x \cdot 2^{1-x}$ como o produto entre $g(x)$ e $h(x)$.



Fonte: Elaboração do autor (2023).

A constatação sobre a formação da sequência se mostra fundamental para que os sujeitos compreendam que a PAG parte da multiplicação entre os termos de uma PA e os termos simultâneos de uma PG, e que, dessa forma, a soma dos seus termos é dada pela seguinte fórmula $s = \frac{a}{1-q} + \frac{rq}{(1-q)^2}$, em que “a” é o primeiro termo da PAG, “r” é a razão da PA e “q” a razão da PG. Essa compreensão satisfaz a primeira parte do problema.

A validação é o momento em que os sujeitos argumentam e apresentam as estratégias matemáticas desenvolvidas na resolução do problema, conforme previsto em Almouloud (2007, p.40), essa dialética é “a validação das asserções que foram formuladas nos momentos de ação e de formulação, podendo referir-se a diferentes níveis de validade: sintática, semântica ou mesmo pragmática (relativa à eficácia do texto)”. Nesse sentido, os sujeitos devem organizar e apresentar os argumentos desenvolvidos nas fases anteriores na tentativa de solucionar o problema. Alves (2020, p. 334) afirma que “o professor deverá estimular a atividade de provas e demonstrações com origem nos dados coligidos da investigação na etapa anterior, confrontando-os com o ambiente computacional e suas potencialidades”.

Na busca pela soma dos termos da PAG, os sujeitos podem fazer uso da janela de Cálculo Simbólico (CAS) do GeoGebra, pois é possível se trabalhar tanto os aspectos algébricos quanto geométricos, e assim, estabelece-se que é possível determinar uma partição da fórmula da soma dos termos da PAG, definindo os valores das variáveis da seguinte forma:

1. $a = 1$ (Primeiro termo da PAG)

2. $r = 1$ (razão da PA)
3. $q = \frac{1}{2}$ (razão da PG)
4. Fazer o valor do controle deslizante “n” tender a infinito.

Os passos podem ser apresentados na Janela CAS do GeoGebra, sendo inserida em cada linha uma equação, conforme mostra a Figura 34, com as linhas do cálculo:

Figura 34: Janela CAS do cálculo da soma dos termos da PAG

5	a:=1
☐	→ a := 1
6	q:=1/2
☒	→ q := $\frac{1}{2}$
7	r:=1
☐	→ r := 1
8	eq1:=a/(1-q)
☐	→ eq1 := 2
9	eq2:=r*q/(1-q)^2
☐	→ eq2 := 2
10	S:=eq1+eq2
☐	→ S := 4

Fonte: Elaboração Própria no GeoGebra (2023)

Na Janela CAS pode-se observar uma construção de passos que representam uma lógica de raciocínio no desenvolvimento da fórmula da soma dos termos da PAG, o que pode contribuir para o desenvolvimento de uma nova linha de pensamento. Essa perspectiva vai de encontro ao que Alves (2020) aponta, em relação ao confrontamento dos dados e a exploração do ambiente computacional e suas potencialidades.

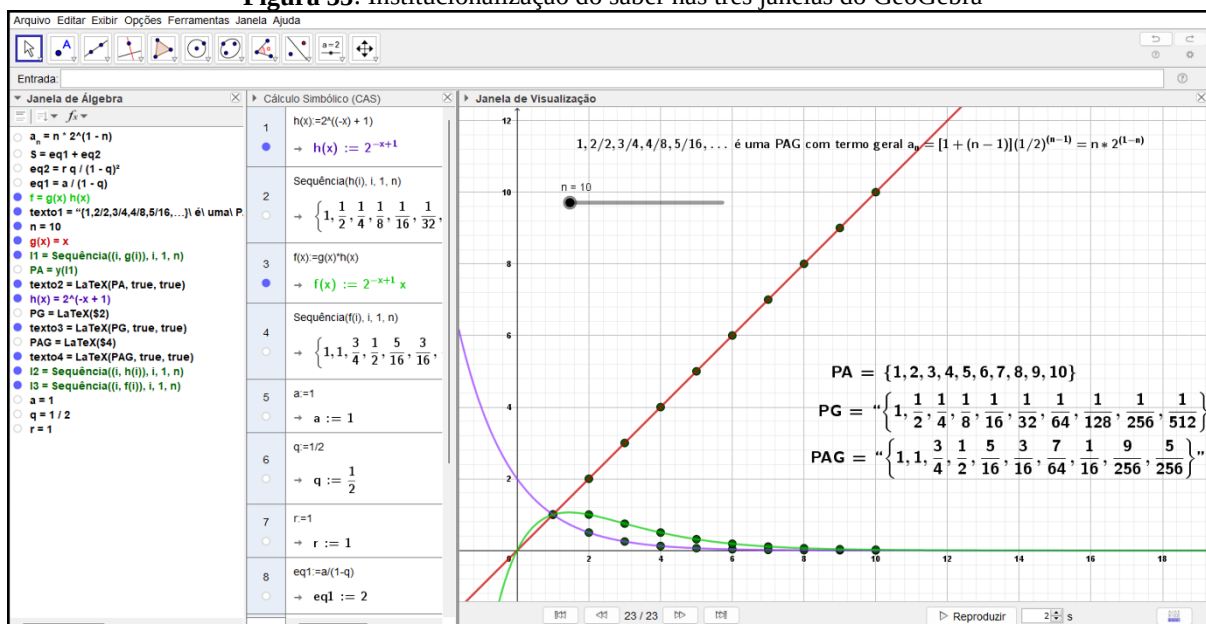
A institucionalização é a fase marca o momento em que o professor assume o controle da situação e busca a formalização dos resultados encontrados pelos sujeitos, o que segundo Almouloud (2007, p. 40), representa o momento em que “o professor fixa, convencionalmente e explicitamente, o estatuto cognitivo do saber”. Cabe ao professor apresentar argumentos sobre

o fato de que na PAG os termos são representados de tal forma que cada elemento seja o resultado do produto ordenado de uma PA e uma PG (ROCHA, 2019).

Essa fase marca o momento em que o professor deve apresentar uma visão geral do problema, buscando a institucionalização dos conceitos de forma a fazer um fechamento do assunto e, para isso, deve realizar uma abordagem sobre os passos da construção da situação no ambiente do GeoGebra.

Na Figura 35 são mostradas as três Janelas interativas do *software*, onde se verifica uma demonstração da PAG numa transposição para a função $f(x)$, gerada a partir do produto das funções $g(x)$ por $h(x)$, em suas três formas: algébrica, simbólica e geométrica. Essa visualização marca uma parte importante do processo de institucionalização do saber social do sujeito (ALMOULOU, 2007):

Figura 35: Institucionalização do saber nas três janelas do GeoGebra



Fonte: Elaboração do autor (2023)

Segundo Alves (2020, p. 340), “o professor poderá valorizar o papel da visualização, mediante a exploração do software GeoGebra, tendo em vista a aquisição de uma cultura matemática e o delineamento de hábitos intelectuais aplicáveis em outras situações”. Para além do estudo das progressões de ordem superior, estabelece-se uma linha de abordagem desses problemas, visando uma melhoria no processo de ensino aliado ao uso do GeoGebra, através de uma abordagem metodológica que prioriza a autonomia dos sujeitos como é o caso da TSD.

A seguir apresentamos a terceira fase da Ed, a experimentação, com uma caracterização dos procedimentos realizados, o contrato didático e a coleta de dados para posterior análise.

5 EXPERIMENTAÇÃO: A VISUALIZAÇÃO GRÁFICA DAS PROGRESSÕES À LUZ DA TSD

Os objetivos de uma pesquisa devem confirmar ou refutar as hipóteses teóricas através de argumentações que se apoiam em uma experimentação, como assinala Almouloud (2007). Essa fase da ED marca o momento em que são expostas as condições e o percurso de aplicação das situações didáticas, conforme previsto nas fases anteriores.

Almouloud (2007) ainda enfatiza que se deve determinar uma fórmula para a experimentação, a fim de se descrever os métodos que serão escolhidos na coleta dos dados. Além dos encontros presenciais, foi criado um grupo de comunicação em um aplicativo de mensagens instantâneas (*WhatsApp*), com a finalidade de organizar o preenchimento dos formulários e demais necessidades da pesquisa, como a coleta de dados dos participantes, envio das situações de ensino de cada encontro e compartilhamento de informações gerais.

O referido autor também acrescenta que na Didática da Matemática esse tipo de pesquisa experimental deve sempre se submeter a uma organização dos fenômenos de forma sistemática (ALMOULOU, 2007). Tal organização requer uma descrição das etapas como meio de sistematização do método.

A fim de se alcançar os objetivos elencados, baseados na TSD e de acordo com a metodologia que se utilizou para a aplicação da proposta, buscou-se contemplar em seu escopo teórico e metodológico uma coerência com a pesquisa, no sentido de prática de sala de aula e no desenvolvimento das situações de ensino.

Nesse caso, o lócus dos encontros presenciais foi o ambiente multimeios da escola parceira, ocorridos durante os horários de planejamento dos professores.

Antes da aplicação da primeira situação didática, houve a necessidade de se estabelecer um contrato didático com os sujeitos, no intuito de esclarecer a importância da participação na pesquisa e seus possíveis ganhos, conforme estabelecido no documento Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) lido e assinado pelos participantes, presente nos apêndices desta pesquisa.

Desse modo, foi estabelecido com os sujeitos que a interação mútua e ativa nas tentativas de resolução seria determinante para o bom desenvolvimento de cada situação. Reforçamos que seu compromisso e envolvimento nas tentativas de resolução das situações apresentadas era necessário, assim como a dinâmica empregada em cada momento do experimento. Os arquivos pré-construídos no GeoGebra e a situação de ensino foram encaminhados via aplicativo de mensagens, bem como o retorno das fotos e capturas de tela. A

coleta de dados é de suma importância para a pesquisa, além do compromisso de não faltarem nos dias previstos para cada encontro para não inviabilizar a análise posterior dos dados.

No Quadro 7 apresenta-se o detalhamento dos encontros presenciais, destacando aspectos do planejamento das atividades executadas com os sujeitos participantes:

Quadro 7: Planejamento das atividades executadas

Encontros presenciais na escola parceira					
Encontros	Data	Atividade	Objetivo	Recurso	Hipótese
1° Encontro	10/08/2022	Encontro inicial	Conhecer os sujeitos e selecionar os participantes voluntários da pesquisa	Formulário online, TCLE, Computador e <i>Datashow</i> .	Eram esperados pelo menos quatro participantes
2° Encontro	17/08/2022	Experimentação da Situação Didática 1	Trabalhar o conceito de PA de segunda ordem	Computador, <i>Datashow</i> , Folhas de papel, um tripé, <i>Smartphones</i> com internet, lápis, caneta e borracha.	Que seria possível chegar à solução do problema em três etapas apenas pela visualização e interação com o ambiente do GeoGebra.
3° Encontro	24/08/2022	Experimentação da Situação Didática 2	Trabalhar o conceito de números triangulares sob a ótica da visualização	Computador, <i>Datashow</i> , Folhas de papel, um tripé, <i>Smartphones</i> com internet, lápis, caneta e borracha.	Que os participantes perceberiam que os números triangulares poderiam ser estudados como uma PA de segunda ordem.
4° Encontro	31/08/2022	Experimentação da Situação Didática 3	Trabalhar a sequência PAPG sob o viés da visualização gráfica no Plano Cartesiano	Computador, <i>Datashow</i> , Folhas de papel, um tripé, <i>Smartphones</i> com internet, lápis, caneta e borracha.	Que a interpretação geométrica da sequência seria facilitada pela visualização gráfica.
5° Encontro	14/09/2022	Experimentação da Situação Didática 4	Trabalhar o conceito de PGA com ênfase no aspecto da visualização no GeoGebra	Computador, <i>Datashow</i> , Folhas de papel, um tripé, <i>Smartphones</i> com internet, lápis, caneta e borracha.	Que a interpretação geométrica da PGA se dará pela relação entre as funções e pela interação no ambiente do <i>software</i> GeoGebra contribuindo para a melhor compreensão desse assunto
6° Encontro	21/09/2022	Experimentação da Situação Didática 5	Trabalhar o conceito de PAG com ênfase no aspecto da visualização no GeoGebra	Computador, <i>Datashow</i> , Folhas de papel, um tripé, <i>Smartphones</i> com internet, lápis, caneta e borracha.	Que a interpretação geométrica da PAG se dará pela relação entre as funções e pela interação no ambiente do <i>software</i> GeoGebra contribuindo para a melhor compreensão desse assunto

Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

No Quadro 7 apresentamos as atividades desenvolvidas com os sujeitos participantes da pesquisa. Além disso, ressaltamos que foram realizados seis (06) encontros presenciais, sendo o início destes encontros no dia 10 de agosto de 2022 e os demais, sempre às quartas-feiras das semanas seguintes, salvo feriados. Cada encontro foi estruturado para a aplicação de uma situação didática e teve a participação de todos os cinco sujeitos selecionados.

Inicialmente, para a escolha dos sujeitos, foi realizado um encontro presencial com a equipe de professores da escola, onde foi esclarecida a temática da pesquisa bem como a dinâmica de realização. Na ocasião, também foi ressaltado que a participação dos sujeitos seria de forma voluntária, bem como a necessidade do preenchimento de um formulário com aspectos subjetivos acerca do seu trabalho como docentes, buscando atender aos critérios de seleção da pesquisa.

Assim, apresentamos e descrevemos as condições sob as quais ocorreu a experimentação, enfatizando-se a escolha dos instrumentos de coleta de dados na tentativa de organizar e analisar as produções dos sujeitos durante essa fase (ALMOULOU, 2007). Visando o cumprimento das etapas da Engenharia para atender aos objetivos da pesquisa, esta etapa refere-se ao segundo objetivo específico, que trata do processo de desenvolvimento da proposta de elaboração das situações de ensino.

A coleta de dados se deu por meio de gravação de vídeos e áudios em aparelhos *smartphones* do pesquisador, previamente autorizados pelos participantes, e por registros fotográficos dos sujeitos, de suas produções e capturas de telas com momentos no decorrer da experimentação.

O grupo criado no *Whatsapp* contou com a inserção de nove professores, porém destes apenas cinco estavam aptos a participarem da pesquisa, pois efetivamente atendiam aos critérios iniciais de seleção, ou seja, dentre os nove, quatro não eram professores das turmas de primeiros anos e/ou não trabalhavam diretamente com a disciplina de matemática.

Durante a fase de experimentação, em cada um dos cinco encontros para aplicação das situações didáticas foram utilizados outros materiais, como lápis, borracha, caneta, folhas de papel A4 ou cadernos para anotações, computadores com a versão 5.0 *classic* do GeoGebra previamente instalada, *smartphone*, um tripé e equipamento data show. Ressaltamos a importância de assegurar o desenvolvimento das situações, diante da impossibilidade ou dificuldade apresentada por algum dos sujeitos durante a resolução destas no ambiente GeoGebra. Assim, justificamos a presença de tais materiais além dos computadores com o *software*.

Conforme mencionado, o objetivo do *software* é dar suporte visual para a resolução e compreensão das situações didáticas, que em sua origem não oferecem esse recurso.

No primeiro encontro, após a definição e escolha dos sujeitos, foi apresentado e lido em conjunto o TCLE (ver APÊNDICE A), que após a leitura foi assinado por todos em duas vias, e encontra-se em conformidade com o parecer do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, *campus* Fortaleza (ver ANEXO A).

A TSD desempenhou um papel muito importante nessa fase pois, foi ela quem orientou cada um dos encontros com os sujeitos durante os momentos de interação destes com as situações elaboradas no sentido de instigar neles a participação efetiva e a troca de experiências, sendo essa interação na maioria das vezes crucial para a conclusão das atividades e o engajamento de todos.

Destacamos que a utilização da TSD inserida no contexto da ED em sala de aula quando da experimentação, nos permitiu observar quando os sujeitos transitavam entre as fases dialéticas e avançavam na construção de conceitos antes inexplorados. A seguir realizamos a caracterização do perfil do *lócus* e dos sujeitos da pesquisa, após sua escolha.

5.1 O perfil do *lócus* e dos Sujeitos

A pesquisa foi realizada nas dependências de uma Escola Estadual de Educação Profissional, no ambiente de multimeios, e contou com a participação de cinco professores de Matemática e Física que trabalham com a disciplina de Matemática na escola. A escola fica situada num bairro periférico da cidade de Fortaleza – CE e pertence à SEFOR 3 da Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC-CE).

A fim de se conhecer os sujeitos e traçar seu perfil profissional e acadêmico, foi elaborado um formulário e disponibilizado no grupo de comunicação, em que foi solicitado aos participantes seus nomes e endereços eletrônicos, além de declararem que a participação na pesquisa ocorria de forma voluntária. Ressalta-se que as informações referentes à identificação dos sujeitos não serão reveladas por motivos éticos previstos e aprovados pelo CEP através de parecer consubstanciado.

Em seguida, foi levantado o questionamento sobre seus conhecimentos acerca do *software* GeoGebra e se o utilizavam, mesmo que esporadicamente, em suas aulas. Essa informação revela um aspecto importante para a pesquisa a partir do momento em que todos demonstram uma certa familiaridade com a utilização da ferramenta. Dos cinco participantes,

apenas um nunca utilizou o *software* em suas aulas. Outro participante revelou que utiliza raramente. Ainda assim, a maioria demonstrou ter conhecimentos o suficiente para dispensar a necessidade de uma formação mais aprofundada antes da efetiva aplicação da pesquisa.

Dos cinco professores, dois são formados em Licenciatura em Física, dois são formados em Licenciatura em Matemática e um em Economia com segunda graduação em Matemática (em andamento). Essa informação revela uma possível falta de familiaridade com o tema dessa investigação por alguns dos sujeitos, devido ao fato de que esse assunto não é muito explorado no Ensino Médio e muito menos nos cursos de Física e Economia. No entanto, como os sujeitos atuam profissionalmente com a Matemática, é esperado que estes sejam levados à compreensão dos conceitos através da participação na pesquisa. O formulário também verificou que o tempo de experiência no magistério de quatro sujeitos está entre cinco e oito anos e um sujeito com mais de 10 anos. Além disso, todos têm diploma de formação inicial em universidades públicas.

Em relação aos resultados da escola junto ao IDEB, quatro relataram ter conhecimento sobre o índice e seus resultados, enquanto um disse que não conhecia, já em relação à situação do Brasil no PISA, eles relataram não acompanhar, pois se tratava de um resultado muito distante das suas realidades enquanto escola. Isso revela uma preocupação dos professores com a qualidade e a busca por melhorias no ensino de Matemática em relação às avaliações internas enquanto Brasil.

Foi ressaltada a importância do uso desse *software* no ensino de Matemática, bem como outras áreas do conhecimento, como as simulações de experimentos na Física. Outra observação interessante diz respeito a utilização da Janela de Cálculo Simbólico (CAS) do GeoGebra, que os professores disseram não conhecer e, conseqüentemente, nunca utilizaram.

Pode-se ilustrar a plataforma do GeoGebra.org e as possibilidades de interação com a comunidade *online*, onde é possível acessar diversas construções dos mais variados assuntos, tanto na área da Matemática como em outras, além de poder acompanhar páginas individuais de pessoas de renome que desenvolvem trabalhos com esse *software* visando o ensino.

Na ocasião o professor-pesquisador apresentou a utilização do ambiente *online* e suas construções, incluindo as que foram utilizadas nesta pesquisa, explicando que o acesso a esses arquivos poderia ocorrer via *links* compartilhados no grupo de mensagens, endereços das construções em arquivos de textos ou via códigos QR disponibilizados em cada aplicação. Reforçamos que tais construções poderiam ser modificadas e/ou adaptadas, de acordo com o interesse e objetivo proposto no planejamento de cada aula do professor em aplicações futuras.

A seguir apresenta-se o Quadro 8 acerca da formação dos sujeitos, com o intuito de esclarecer os aspectos formativos e relação com o tema abordado na fase de experimentação:

Quadro 8: Caracterização dos sujeitos participantes

Sujeitos	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅
Formação Inicial	Economia/Matemática	Matemática	Física	Matemática	Física
Nível Acadêmico	Superior Completo/Graduando	Graduando	Mestre	Superior Completo	Superior Completo
Tempo de experiência	5 anos	2 anos	10 anos	8 anos	8 anos
Conhece o GeoGebra	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Já trabalha com o GeoGebra	Sim	Não	Sim	Sim	Não

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

O Quadro 8 sintetiza os principais aspectos de caracterização dos sujeitos e abre a discussão para a seção seguinte, com a descrição da experimentação das cinco situações de ensino, discutidas e analisadas à luz dos teóricos que pautaram essa pesquisa.

Na ocasião, aconteceu um bate papo sobre o uso do GeoGebra pelos professores em suas práticas na sala de aula atualmente e durante a pandemia. O que se percebeu foi que alguns professores utilizaram bastante, porém após o retorno ao ensino presencial houve uma redução em seu uso. Dois dos professores alegaram que não chegaram a utilizar o *software* em suas aulas presenciais após o retorno da pandemia.

No próximo capítulo descreve-se como ocorreu o desenvolvimento de cada situação de ensino, seguindo as fases da TSD e sendo observados aspectos referentes às interações dos sujeitos com as situações. Neste caso, cada um dos participantes foi denominado por uma letra S numa sequência ordenada, a fim de preservação de suas identidades, sendo estes, S₁, S₂, S₃, S₄ e S₅.

Na seção seguinte é realizada a análise a posteriori das situações à luz do referencial teórico.

6 ANÁLISE A POSTERIORI DA EXPERIMENTAÇÃO

Esta é a última fase da ED, em que ocorreu a discussão e validação interna dos resultados a partir dos dados coletados na fase de experimentação. Estes dados integram um conjunto de informações sobre o desenvolvimento de cada situação trabalhada, sendo estes analisados para validar ou refutar as hipóteses levantadas na fase de análise *a priori*.

O processo de validação interna não recai sobre os esquemas normalmente utilizados em experimentos estatísticos, que se baseiam principalmente nas diferenças encontradas entre os modelos de grupo controle e grupo teste, mas sim para uma comparação e confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori* (ARTIGUE, 1995). Neste caso, realizamos uma análise *a posteriori* dos dados coletados, em que observamos a consonância entre o que foi previsto e o que de fato foi implementado. Cada situação foi analisada separadamente, pois acreditamos que isso pode facilitar o entendimento destas comparações.

Nessa fase, analisamos o conjunto de dados coletados, referentes aos registros produzidos pelos participantes e pelo pesquisador, como a gravação dos encontros, as fotos enviadas no grupo de mensagens, além de documentos, como formulários e demais registros. Daí a necessidade do confronto com a análise *a priori*, no sentido de validar ou não as hipóteses formuladas durante a investigação (ALMOULOU; SILVA, 2012).

6.1 Análise da Experimentação da Situação 1

Nessa fase da ED os dados foram apresentados à luz dos autores Almouloud (2007), Alves (2020) e Alves (2021). Nessa primeira situação, após o contato inicial, que ocorreu conforme quadro 7, deu-se início a fase de ação, em que o professor pesquisador apresentou a situação aos professores participantes utilizando uma projeção no *Datashow*, bem como compartilhando o arquivo com os participantes via grupo de mensagens. Todos os participantes utilizaram os seus computadores pessoais.

A experimentação da situação 1 aconteceu no segundo encontro, que consistiu na resolução do problema com o seguinte texto:

Observe a sequência de figuras geradas a partir do controle deslizante n . Considere que as figuras hachuradas estejam em PA Crescente e determine, quantos quadradinhos não hachurados terão na 10ª figura? E na 15ª figura? A expressão algébrica que determina quantos quadradinhos não hachurados terão na n ésima figura é: o suporte visual do problema pode ser visto na figura 5.

Mais uma vez foi realizada uma explanação geral sobre o uso do GeoGebra e sobre comandos, janelas e possibilidades no ensino. Essa primeira situação abordou o assunto de sequência com um problema de PA de segunda ordem, adaptada para uma manipulação pelo controle deslizante, na qual o participante poderia aumentar ou diminuir a sequência de quadrados na Janela de Visualização. A partir daí, há a possibilidade de chegar ao resultado esperado, seguindo uma sequência de passos pré-determinados por três comandos. No entanto, foi necessário realizar mais uma explicação sobre o uso do controle deslizante como instrumento de manipulação da construção.

Dando prosseguimento ao experimento, os participantes realizaram a leitura do problema e iniciaram a interação no ambiente do *software* GeoGebra *a priori*. A interação com o controle deslizante permitiu que os sujeitos atingissem o objetivo inicial do problema, que era determinar a quantidade de quadrados não hachurados na 10ª figura, onde eles aumentaram o valor do controle deslizante “ n ” até o valor correspondente e realizaram a contagem. Observou-se que todos os participantes apresentaram o desenvolvimento na fase de ação da TSD, ao compreenderem que, quando $n = 10$ a resposta seria 90 quadradinhos.

Foi verificado que o aspecto visual do problema trouxe uma melhor compreensão, aliado ao seu aspecto dinâmico, possibilitando que os sujeitos chegassem ao resultado apenas pela visualização da sequência de quadrados. Isso pode ser verificado na fala de S₁, que ao perceber que o GeoGebra facilitou a resolução, disse:

“eu tenho uma questão dessa no meu livro, relacionada com função, e o software facilitou porque tudo que a gente puder mostrar que está acontecendo eu acho que seja um agregado pra aprendizagem”.

A fala do sujeito S₁ ocorreu em um momento de mediação do professor-pesquisador, que agiu conforme Almouloud (2007, p. 201) orienta, ao instruir que “o professor tem o papel de mediador/observador, podendo intervir minimamente (professor como mediador) com o único propósito de incentivar e orientar o aluno na busca de soluções”. O participante S₁ completou sua fala dizendo que “a visualização desse problema traz muito mais compreensão do que a interpretação desses textos”. Isso corrobora ao que Alves (2020) traz, sobre o reforço que o professor pode dar ao processo investigativo, no qual o sujeito da pesquisa confronta os dados numéricos com os geométricos por meio da visualização.

Na sequência, houve uma intensa troca de informações entre os participantes. O sujeito S₂ indagou sobre qual seria a razão dessa PA. Nesse momento, houve o envolvimento de todos, configurando a dialética da formulação, como registrado na Figura 36:

Figura 36: Formulação da Situação 1.

Fonte: Registro do autor (2023).

Durante as discussões, o participante S3 comentou: “*eu estou achando que é uma PA de segunda ordem*”, demonstrando certa familiaridade com o tema. Em seguida, S3 indagou se a razão da PA de segunda ordem seria também uma PA? A dúvida foi dirigida ao pesquisador, que aproveitou o momento para instigar a participação dos demais participantes, que apresentaram suas incertezas e levantaram outras possibilidades para a sequência, como a possibilidade desta sequência ser uma PG.

O participante S4 indagou: “*a PA de segunda ordem é diferente da PA normal?*”. Assim, foi possível verificar que a PA de segunda ordem não era conhecida pelos participantes de forma clara. Embora alguns tenham apresentado o conhecimento da sua existência, nenhum deles foi capaz de elaborar uma explicação para o crescimento dessa sequência a princípio.

Esse momento de experimentação revelou a lacuna existente no ensino deste conteúdo, também presente nos livros didáticos mencionados, bem como na formação inicial dos sujeitos. Isso reforça o conceito trazido em Brousseau (1983), chamado de obstáculo didático, que embora para este represente um conhecimento, mostra-se também como uma epistemologia como o erro que pode ser um obstáculo que conduz ao acerto. o que vai de encontro a pergunta da pesquisa. Neste caso, o participante S5, que até então estava em silêncio, comentou sobre como o aluno poderia prosseguir na resolução desse problema, ampliando o seu grau de dificuldade para responder quando $n = 15$: “*aí ele teria que desenvolver o pensamento algébrico ou tentar visualizar o geométrico*”. Nessa passagem, ele se referia a visualização

geométrica proporcionada pelo GeoGebra como suporte do problema, porém não como uma sequência.

A partir de então, foi possível perceber a mudança na fase de formulação para a de validação, quando o participante S1 explicou que a visualização se daria por uma ampliação da figura. O participante S2 complementou que “*aí seria $n^2 - n$* ”, completando o seu raciocínio com a seguinte explicação: “*ele faria o mesmo raciocínio que eu fiz, que foi $10*10 - 10$ e agora vai ser $15*15 - 15$* ”.

Os dois participantes, S1 e S2, relataram que o auxílio visual do GeoGebra foi determinante para o entendimento do problema. No entanto, os participantes S3 e S4 não conseguiram chegar nesse raciocínio, apesar de ter chegado a mesma resposta. Já o participante S5 explicou que:

[...] se o aluno manipula o controle deslizante, facilita, porque quando ele vê só um, tipo o $n=10$, fica difícil do aluno pensar que é $n^2 - n$, mas, quando ele pega o GeoGebra e olha pro 9 e conta e olha pro 8 e conta, ele vai perceber o padrão e vai ver que talvez ele consiga achar o $n^2 - n$, quando ele consegue manipular ele vai ver quantos tem e vai contar e perceber o padrão (S5, 2022).

É preciso observar, em primeiro lugar, que nessa fase os participantes buscaram registrar seus raciocínios de acordo com o previsto em Almouloud (2007, p. 201), que aponta que “a dialética de formulação proposta por Brousseau é específica dos registros de ideias e concepções matemáticas mais ou menos formais, com possíveis diálogos e conversas com o *milieu*”. Isto reforça o que foi previsto na análise *a priori*.

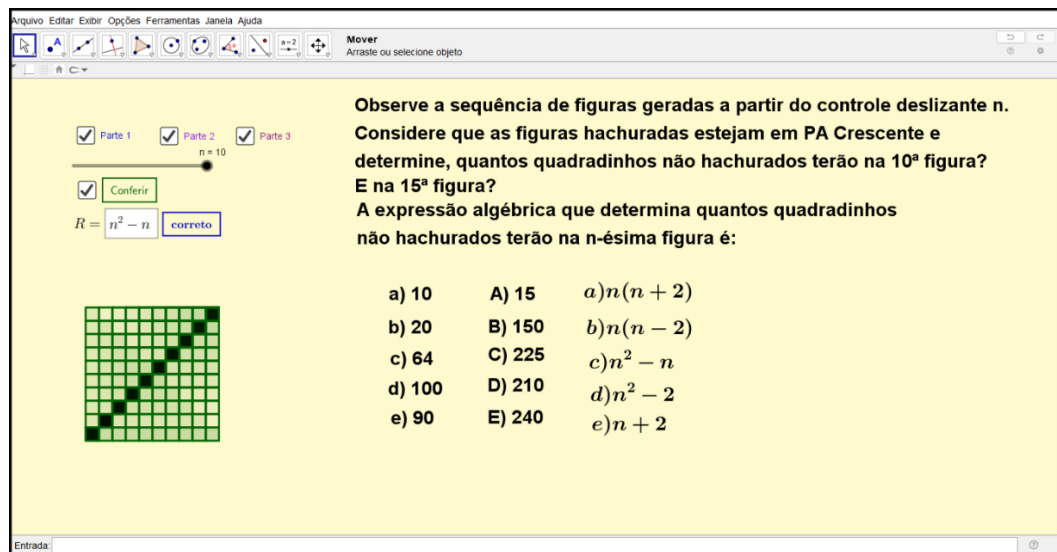
Nesse momento houve uma troca de informações, onde os participantes enfatizaram a importância do uso do controle deslizante e a visualização da sequência gerada por essa manipulação em forma de uma figura geométrica. Destacamos na fala do participante S4 uma passagem onde ele traz que: “*ele (aluno) consegue manipular a figura, e com essa manipulação, ele consegue visualizar, porque sem a ferramenta ele teria que imaginar e isso se tornaria mais difícil*”. Com isso, percebe-se que os participantes se apropriaram dos elementos básicos na construção do conceito referente a sequência mostrada no problema, tendo como fator fundamental para esse entendimento o suporte dinâmico proporcionado pela manipulação das ferramentas do *software* e pela visualização gráfica.

Nas discussões seguintes os participantes validaram o conhecimento de PA de segunda ordem, onde cada participante expôs sua linha de raciocínio. Segundo Almouloud (2007), isto corrobora como sendo válido que o sujeito se utilize da linguagem matemática para validar suas ideias, de forma oral ou escrita. Em complementaridade, Alves (2021, p. 131) afirma que numa

situação de validação “os dados são produzidos com origem nas interações dialéticas dos estudantes da fase anterior, com as informações e inferências empregadas a fim de obter a certeza das relações estabelecidas”.

Com base nos diálogos entre os participantes, foi possível perceber que a TSD aliada ao uso do GeoGebra contribuiu de forma preponderante para o entendimento do conceito de PA de segunda ordem, apresentada pela visualização gráfica, como se verifica na Figura 37 em que é possível perceber como os sujeitos interagiram com a situação após as discussões inserindo a resposta correta no campo R da Janela de Visualização do *software*:

Figura 37: Situação 1 resolvida pelos participantes na fase de validação.



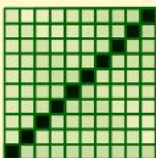
Fonte: Dados da pesquisa (2023)

A resposta apresentada somente é validada quando a solução $n^2 - n$ está inserida no campo R de resposta. Isso foi verificado pelo participante S2, ao observar que para a resposta da segunda pergunta, ou seja, na 15ª figura seria 210. No entanto, ao inserir o valor 210 no campo R, o retorno do *software* era o valor lógico “*incorreto*”, como mostra a Figura 38:

Figura 38: Registro do erro de configuração do controle deslizante.

☒ Parte 1 ☒ Parte 2 ☒ Parte 3
☒ Confirmar
 $R =$ Incorreto

Observe a sequência de figuras geradas a partir do controle deslizante n .
 Considere que as figuras hachuradas estejam em PA Crescente e determine, quantos quadradinhos não hachurados terão na 10ª figura? E na 15ª figura?
 A expressão algébrica que determina quantos quadradinhos não hachurados terão na n -ésima figura é:

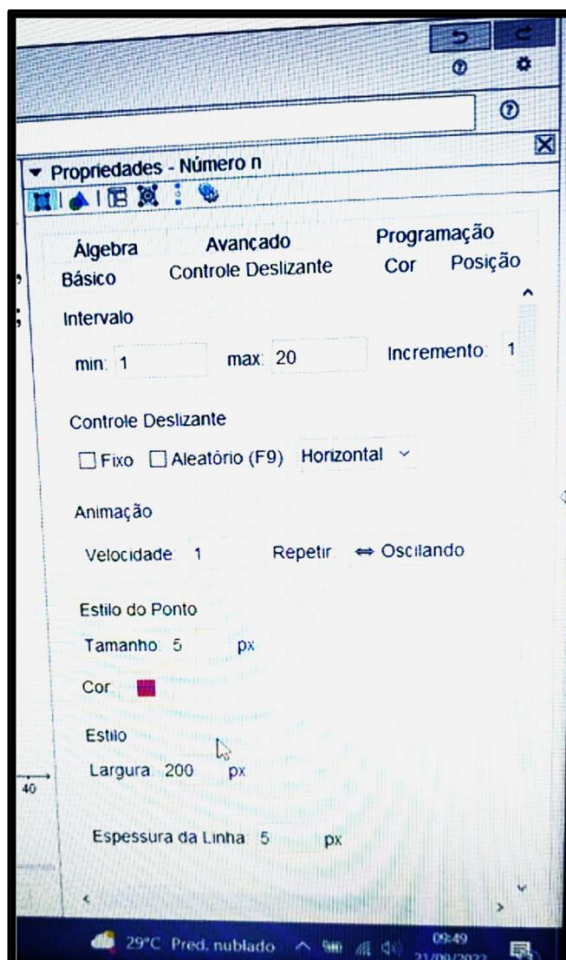


a) 10	A) 15	a) $n(n + 2)$
b) 20	B) 150	b) $n(n - 2)$
c) 64	C) 225	c) $n^2 - n$
d) 100	D) 210	d) $n^2 - 2$
e) 90	E) 240	e) $n + 2$

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Este detalhe observado pelo participante foi intencional. O intuito era verificar se os participantes, ao se depararem com uma limitação do *software*, buscariam outras soluções, que permitissem gerar essa autonomia do estudante dentro do mesmo ambiente, mediadas pela ação do professor. Como esclarece Alves (2021, p. 131), em relação ao papel do professor na mediação, este “será determinante no sentido de não permitir que os dados e conjecturas produzidas a partir da exploração do *software*, nas fases anteriores, não sejam desperdiçadas e, na fase final, possam concorrer para a avaliação final da evolução do grupo”. O participante S2 percebeu e, como previsto, sugeriu uma mudança nos parâmetros do controle deslizante, que pode ser verificada na Figura 39:

Figura 39: Configuração do controle deslizante.



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Apesar da solução apresentada pelo professor S2 ser relativamente simples e viável, do ponto de vista da utilização do GeoGebra, outras soluções foram apresentadas, como por exemplo, o participante S1 sugeriu que o aluno deveria ampliar a imagem gráfica, reproduzindo-a em seu caderno para chegar ao resultado esperado.

Embora essa solução resolva o problema em si, ele demonstra que não compreendeu totalmente a proposta de utilização do *software* como S2, já que era esperado que ele utilizasse os recursos do GeoGebra para chegar ao resultado. Nesse caso específico, esperava-se que eles encontrassem a recorrência do termo geral $n^2 - n$, que é válida para todos os valores de n . Além disso, os demais professores concordaram com ambas as soluções.

Na última fase da TSD, foi observado pelo professor-pesquisador que o principal obstáculo encontrado na construção do conceito de PA de segunda ordem se deu pelo seu desconhecimento quase que total por parte dos participantes, sendo esse obstáculo superado pelo uso do *software* aliado à visualização gráfica da sequência. Vale ressaltar que, dos cinco participantes, apenas um (S2) demonstrou ter algum conhecimento sobre PA de segunda ordem, ainda que superficial e, ainda assim, todos chegaram ao mesmo resultado.

Dessa forma foi realizada a institucionalização do saber, em que o professor, segundo Almouloud (2007, p. 202) “faz observações a respeito da situação proposta e evidencia o conhecimento nela existente, que será retido.” Retomamos a construção da situação proposta e observações sobre como os participantes podem utilizá-la ou melhorá-la para uma aplicação futura em sala de aula, o professor pesquisador realizou uma explanação sobre a construção e mostrou outras possibilidades em seu uso.

A institucionalização se deu de acordo com o previsto na análise *a priori*, trazendo o conceito à luz de Nobre e Rocha (2018). Consideramos que o objetivo foi alcançado, tendo em vista que todos os participantes chegaram ao mesmo resultado apenas pela visualização gráfica do problema, o que confirma a hipótese de que a interpretação geométrica contribuiu para o entendimento de PA de segunda ordem.

6.2 Análise da Experimentação da Situação 2

Na segunda situação trabalhada, as análises foram discutidas sob a perspectiva da TSD apresentadas por Almouloud (2007), Pais (2002) e Alves (2021). Inicialmente, o professor-pesquisador reforçou os termos estabelecidos do contrato didático com os participantes. Em seguida, deu-se início ao momento de apresentação da situação 2, enfatizando-se a importância histórica dos números figurados no desenvolvimento da matemática. Também foi retomada a situação 1, onde foi possível perceber, além do conceito de PA de segunda ordem, que havia ali outros elementos não explícitos, a saber a presença dos números figurados representados pelos números quadrados.

A situação 2 trouxe um problema extraído do banco de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP, 2006), Nível 1. O problema foi repassado aos participantes via grupo de mensagens e trata especificamente sobre os números triangulares.

O diferencial aqui apresentado é o emprego da TSD associada ao *software* GeoGebra como um suporte visual na construção e desenvolvimento argumentativo dos conceitos. Assim, o GeoGebra serviu como meio para a transposição didática. Para Brousseau (1986), o professor deve organizar o ensino para a construção do conhecimento, transformando em saber por meio de uma transposição didática. Corroborando com isso, Almouloud (2007, p. 197) afirma que “o saber para a TSD se refere à questão de utilidade de uma noção matemática dentro das etapas de organização de situações didáticas, e o conhecimento está associado à etapa de ação e o saber está associado à etapa de validação deste conhecimento”. Assim, deu-se início situação de ação.

Na fase de ação, os participantes se depararam com o problema e, inicialmente, realizaram uma leitura atenta, considerando as possibilidades avaliativas de qual seria o melhor caminho em busca de uma solução.

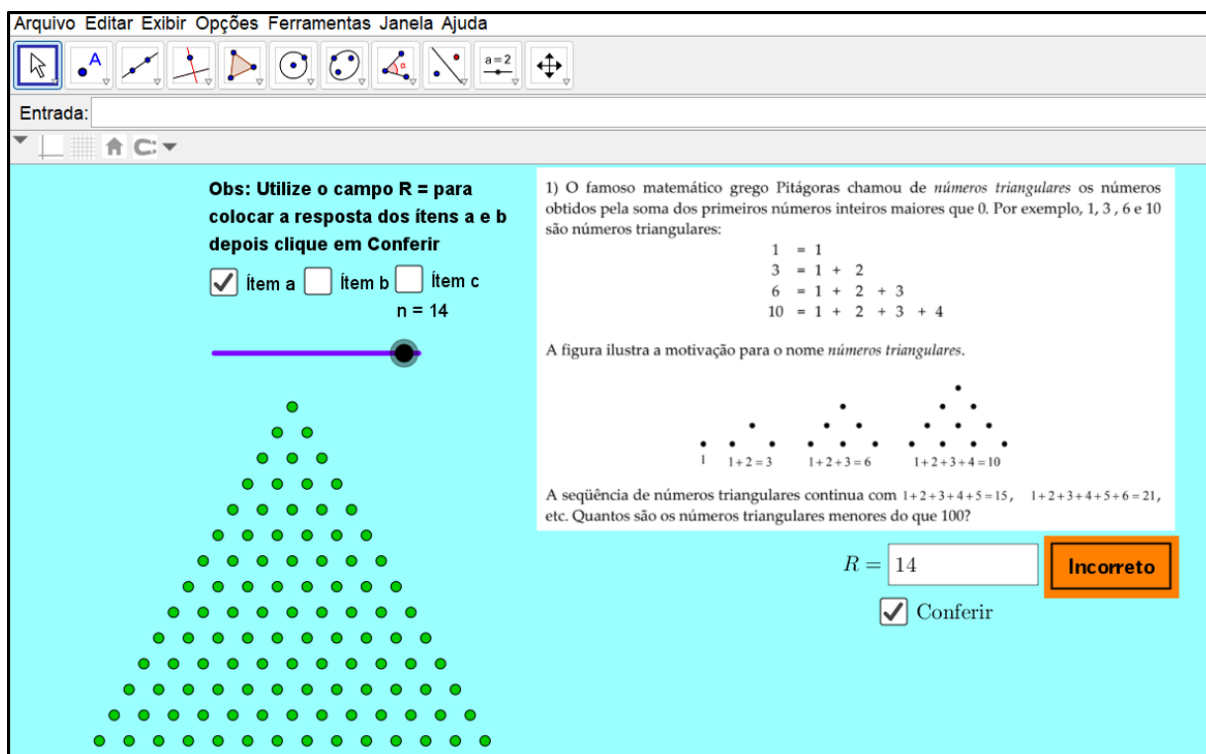
O participante S5 sugeriu que fosse realizada a contagem dos termos utilizando o GeoGebra visualmente (se referindo a manipulação do controle deslizante para realizar a contagem), conforme previsto na análise *a priori*. Sua fala foi complementada pelo professor S4, que sugeriu mover o controle deslizante até $n = 10$ e cometeu um equívoco, quando questionou que não seria uma solução viável “é até $n=100$!?”

O que marca uma passagem da fase de ação para a formulação é a troca de ideias entre os participantes S4 e S5, que dialogaram sobre a melhor estratégia de resolução do problema. Assim, reconhecendo o equívoco na fala de S4, o professor S5 explicou que o aluno poderia realizar a observação da sequência com o movimento do controle deslizante, até que obtivesse um número que resultasse numa soma próxima de 100. Esse momento foi o que Brousseau (1986) definiu como sendo aquele em que o aluno (sujeito, aqui representado pelo professor participante) torna-se um investigador do conhecimento.

O momento da formulação marca, segundo Almouloud (2007), a utilização de uma linguagem não-matemática, as trocas de informações, debates entre os sujeitos numa comunicação linguística não formalizada. Já para Pais (2002, p. 71) “o aluno é estimulado a superar, pelo seu próprio esforço, certas passagens que conduzem ao raciocínio necessário à aprendizagem em questão”.

Após intensa discussão sobre o melhor método para a busca da solução, o participante S2 respondeu que a resposta ao item a seria o número 14, cometendo um equívoco verificado com apoio do *software*, ao inserir o valor no campo “resposta”, conforme a Figura 40:

Figura 40: Constatação do erro pelo participante S₂



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

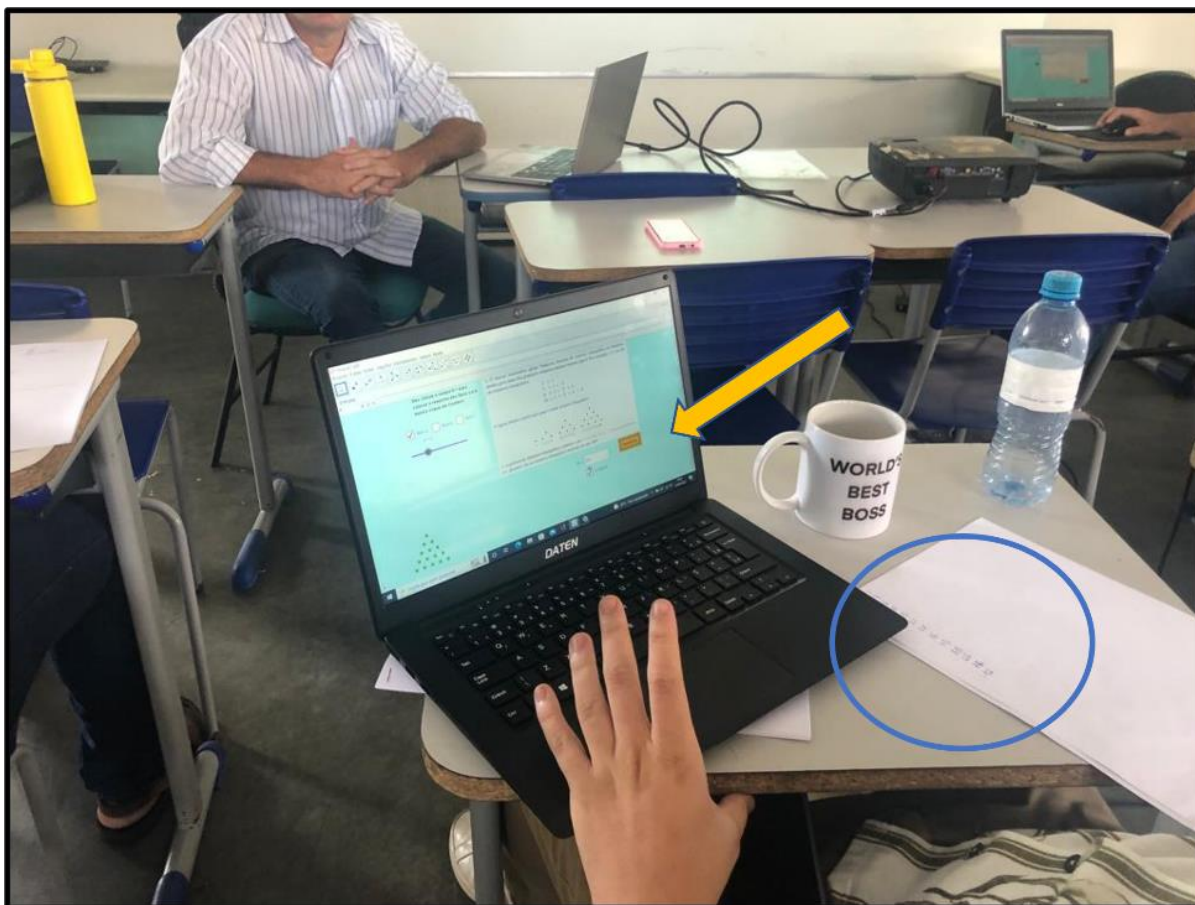
Em relação ao erro, Almouloud (2007, p. 130) discorre que:

o erro também deve ser evitado, mas, quando produzido, a causa não é a insuficiência de conhecimentos do aluno ("cabeça vazia" ou "massa mole"), mas a "progressão" proposta, que não previu que um dos passos necessários para a concretização da tarefa não era ainda acessível ao aluno. (ALMOULOU, 2007, p. 130).

Neste caso, entendemos que o erro pode ter ocorrido por falta de atenção na contagem dos números menores que 100, e não por falta de conhecimento de fato. Assumimos esta premissa pois com o *feedback* do *software*, o participante refez seus passos e percebeu onde havia errado, demonstrando que o conhecimento ali presente era acessível, ou por uma lacuna conceitual sobre o assunto que foi preenchida pela visualização gráfica como havíamos previsto.

Da mesma forma, o participante S5, que embora tenha realizado o raciocínio correto e registrado no papel, foi influenciado pela resposta do outro participante e induzido ao erro, conforme a Figura 41:

Figura 41: Registro do erro do participante S5.



Fonte: Registro do autor (2023)

Destaca-se que os participantes S2 e S5 demonstraram insegurança com a resposta correta. Presumimos que pode ter sido pelo fato de não conhecerem de modo aprofundado o conceito de números triangulares. Na tentativa de superar algumas dificuldades no manuseio do *software*, estes participantes tentaram realizar as operações no papel. Diante disso, acreditamos que uma possível explicação se daria pela necessidade de aproximação da realidade da sala de aula, ainda ligada aos materiais impressos e estáticos na maioria das vezes.

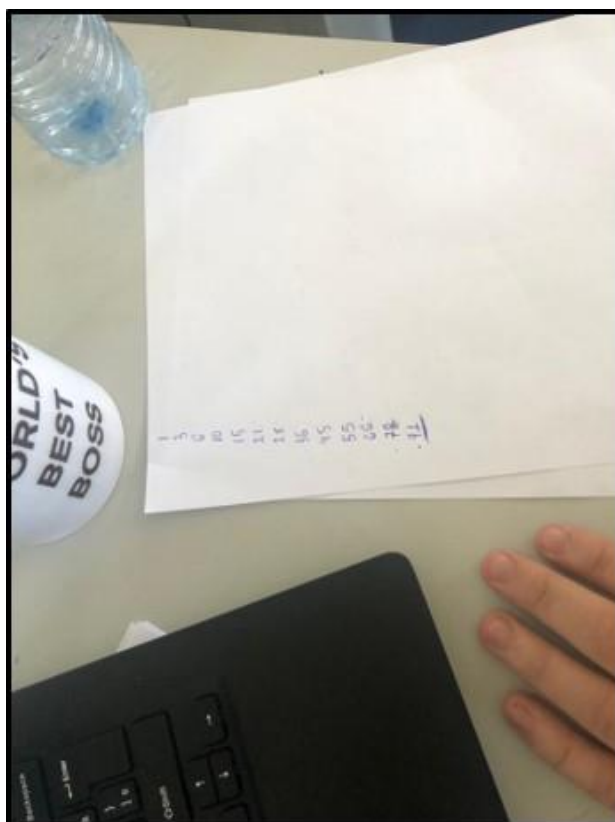
Reforçamos aqui que o desenvolvimento dessa situação buscou colocar os sujeitos em uma situação de ensino visando propiciar uma resolução pelo viés da análise gráfica, presente na tela do GeoGebra. Isso se mostrou desafiador em alguns momentos, pois não é um método usual para os sujeitos participantes, no entanto, mostrou-se eficaz à medida que ficou evidente para eles que a situação era dinâmica e fornecia *feedbacks* de acertos e erros.

Em relação ao erro, Almouloud (2007) esclarece ainda que eles são necessários para garantir a aprendizagem, revelando assim um saber em constituição. Assim, o erro não significa uma falta de conhecimento, mas sim a presença de algum obstáculo que o revelou. Os sujeitos analisaram o problema na perspectiva da aprendizagem para além desse contexto, ou seja,

buscaram características que pudessem lhes orientar quando estivessem no papel de professores.

Nessa visão, destacamos na Figura 42 um exemplo em que o participante S5 atingiu o objetivo do problema, que era determinar quantos são os números triangulares menores do que 100. Porém, salientamos que S5 não conseguiu demonstrar segurança suficiente para expressar sua resposta no ambiente do *software*, mesmo tendo realizado uma interpretação gráfica do problema bem como uma transposição didática para o papel:

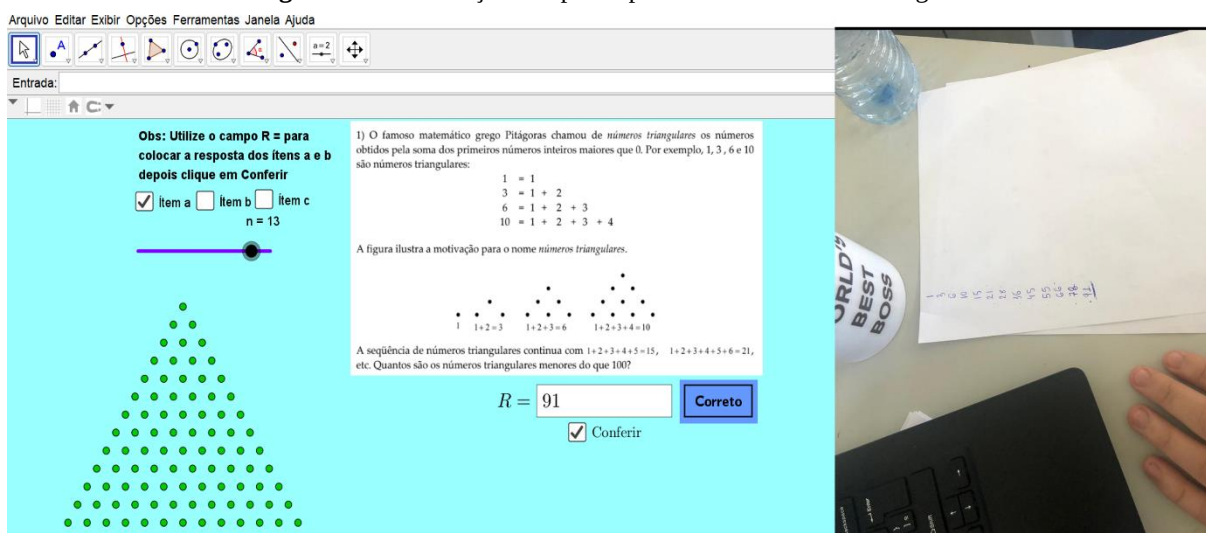
Figura 42: Registro da tentativa de resposta do Participante S₅.



Fonte: Registro do autor (2023)

Ao constatarem o *feedback* do erro no *software*, percebemos uma mudança de fase da TSD, em que os participantes entraram na situação de validação. Segundo Pais (2002, p. 73), o sujeito “já utiliza mecanismos de provas e o saber já elaborado por ele passa a ser usado com uma finalidade de natureza essencialmente teórica”. O que se percebe sobre o erro cometido e que levou os participantes ao resultado de que o 13º número triangular seria o número 91 é que a quantidade de números era expressada pelo valor *n* do controle deslizante, conforme figura 43:

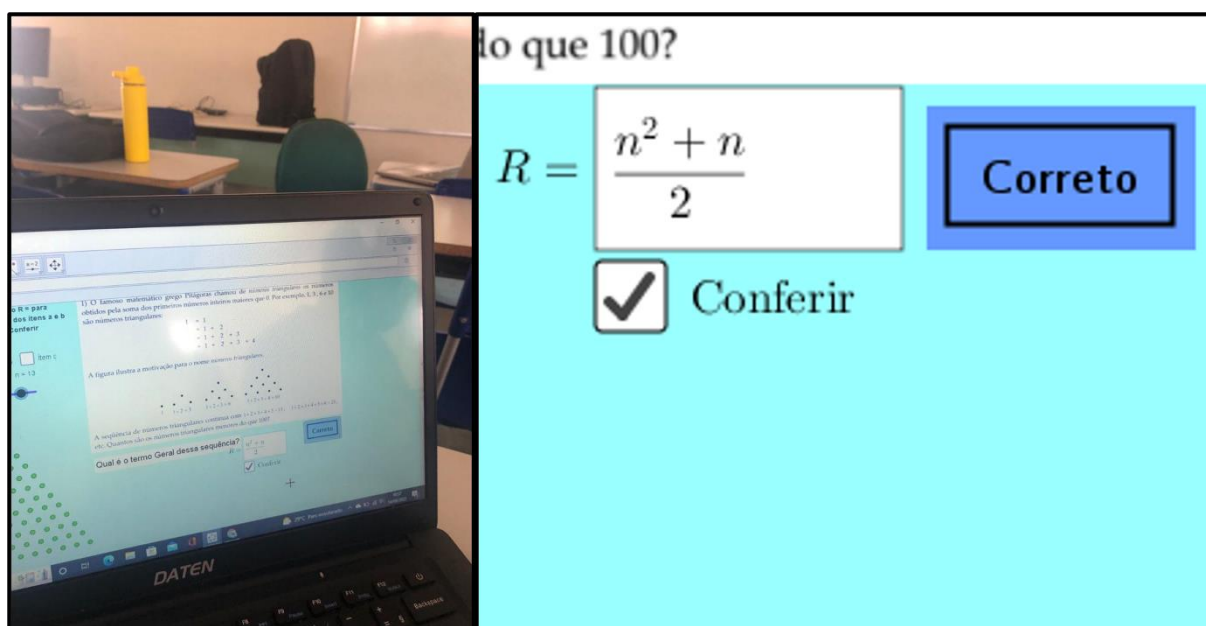
Figura 43: Constatação dos participantes do 13º número triangular



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

A fase de validação prosseguiu, com a sequência ao item b do problema, em que todos os participantes conseguiram realizar a aplicação do conceito, inserindo respostas assertivas. Vale ressaltar que o referido item pedia o termo geral da sequência e que foram respondidas conforme registros das Figuras 44 a 47:

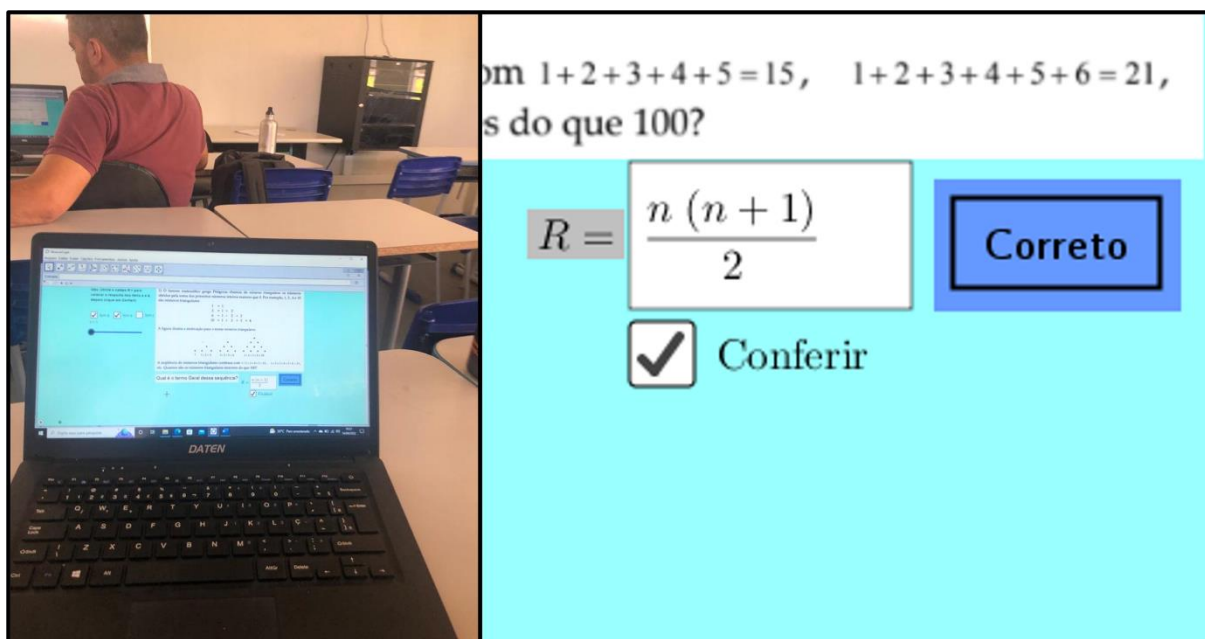
Figura 44: Resposta do participante S₅.



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Nota-se que houve mais de uma forma de inserir as respostas no campo R na Janela de Visualização do GeoGebra. Acreditamos que isso se deu pela grande versatilidade de interações que o *software* oferece, permitindo que as respostas sejam validadas, desde que tenham uma sintaxe verdadeira matematicamente. Com isso foi verificado que o participante S₅ preencheu com a resposta $\frac{n^2+n}{2}$.

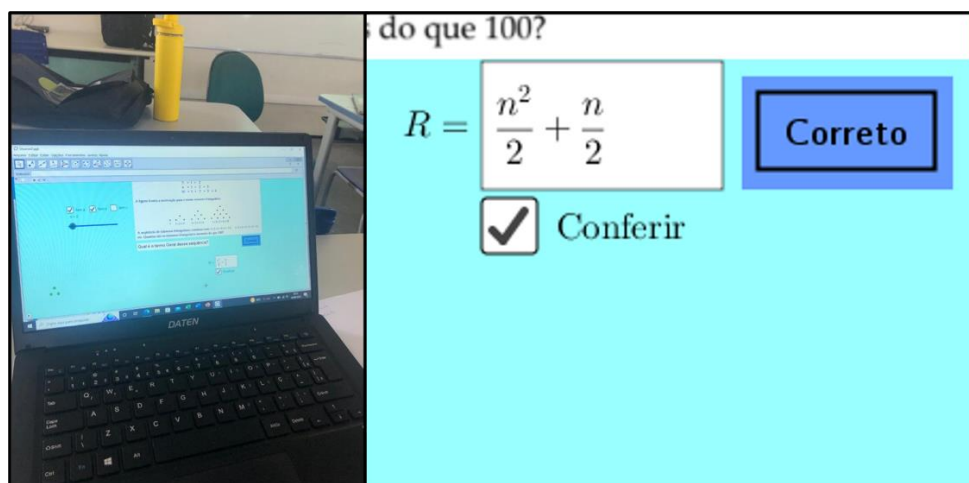
Figura 45: Resposta do participante S₃.



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

É válido ressaltar que não se deve considerar o aspecto matemático puro das respostas, visto que para um estudante do Ensino Médio que se depara com uma situação parecida, a resposta ao problema se mostra de certo modo plural na forma escrita. Isso é relevante, pois segundo Alves (2021, p. 135), os estudantes “devem encontrar suas propostas de solução da questão”.

Neste caso, a situação tornou-se viável do ponto de vista tanto do ensino quanto da aprendizagem, pois permitiu aos participantes imprimirem suas particularidades e ainda extrapolar para seus estudantes em uma situação de sala de aula. Assim, como é o caso das demais respostas dos outros participantes:

Figura 46: Resposta do participante S₁.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

As respostas, embora sejam matematicamente idênticas, são escritas de formas diferentes, implicando em um entendimento do conceito, bem como uma interpretação gráfica adequada da sequência, e proporcionando uma situação de ensino plural, do ponto de vista do professor que adotar esta situação em sala de aula. O participante S₃ escreveu $\frac{n(n+1)}{2}$ enquanto que S₁ escreveu $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$. Os demais participantes também responderam acertadamente como S₅. Por último, para o item c, que pedia a razão da PA de segunda ordem, todos responderam que $r = 1$, como previsto e mostrado na Figura 47:

Figura 47: Resposta do participante S₄.

Obs: Utilize o campo R = para colocar a resposta dos itens a e b depois clique em Conferir

☒ Item a ☒ Item b ☒ Item c

n = 13

Qual é o termo Geral dessa sequência? $R = \frac{n^2 + n}{2}$ **Correto**

Qual é a razão da PA de segunda ordem?

Utilize a caixa de texto abaixo para inserir os n primeiros termos da PA de segunda ordem do item c

PA = 2,3,4,5,6,7,8,9,10

☒ Conferir ☒ Solução $r = 1$

PA = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Embora o participante tenha registrado na caixa de texto da janela de visualização apenas os nove primeiros termos, foi possível determinar que houve a validação conforme previsto. De acordo com Alves (2020, p. 329), nessa fase “é necessário provar o que foi afirmado por intermédio da ação”, como mostraram as interações dos sujeitos no ambiente do *software* e que foram apresentadas nesse trabalho na forma de imagens.

Após essa fase, o professor-pesquisador retomou a discussão e trouxe a institucionalização da situação, onde realizou as observações sobre a construção que permitiram as interações no ambiente do *software*. Na ocasião, houve também uma discussão sobre as dificuldades encontradas durante a experimentação da situação, cujas falas dos sujeitos seguem nos parágrafos subsequentes.

S₅ – [...] eu ainda não compreendi como o aluno poderia chegar nessa conclusão para o termo geral dessa sequência. (Evidenciando que não havia compreendido completamente o conceito da sequência de números triangulares e a PA de segunda ordem ali presente) (Grifo nosso). Acreditamos que o sujeito se colocou na situação de estudante que irá se deparar diante do desafio de interagir com o problema no ambiente do software, tendo que resolver um problema de um assunto que tem pouca ou nenhuma familiaridade.

Essa fala revelou que a lacuna em relação às sequências de ordem superior, em especial as progressões, como os números triangulares, podem ser superadas com métodos inovadores e a interpretação gráfica pela visualização é um deles. Alves (2021) afirma que os estudantes podem se amparar na visualização para explorarem construções dinâmicas produzidas no GeoGebra e correlacionar o comportamento numérico, nesse caso das progressões, com o comportamento geométrico.

S₂ – [...] eu tentei fazer o raciocínio baseando meu cálculo num triângulo equilátero, mas aí quando encontrei uma raiz de três eu parei, porque percebi que não era assim.

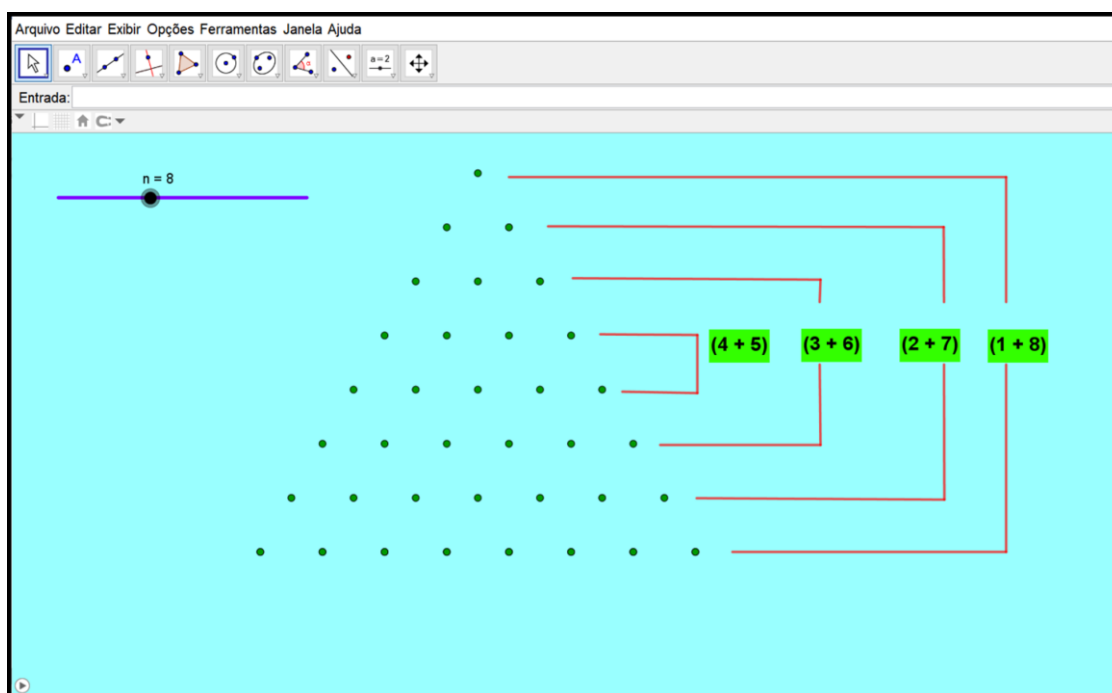
Embora o participante tenha utilizado a visualização da sequência na janela do *software* e tenha conseguido encontrar a solução, ao observar o movimento do controle deslizante, a falta de um conhecimento prévio do assunto foi um obstáculo para ele. Mais uma vez percebemos uma lacuna no conhecimento trabalhado, evidenciando o que foi levantado anteriormente e reforçando a hipótese de que a interpretação geométrica contribuiu com a superação desse obstáculo.

S₁ – [...] da mesma forma que podemos fazer o operador diferença para encontrar a PA, também podemos fazer uma soma para encontrar outra sequência e colocar como desafio para os alunos.

O participante demonstrou que assimilou o conceito e extrapolou o raciocínio para uma possível ampliação do problema, deixando a entender que pretendia utilizar essa estratégia em suas futuras aulas. Neste caso, o participante se referiu ao caminho oposto ao trabalhado na situação apresentada. Extrapolando o raciocínio, ele apresentou uma proposta a ser trabalhada em sua sala de aula, a partir do problema original. Essa interação revelou que a interpretação geométrica contribuiu de forma contundente, pois possibilitou ao professor participante criar uma estratégia de ensino baseado na visualização e interpretação gráfica.

Os participantes S3 e S4 não interagiram ativamente e se limitaram a observar os diálogos, talvez por não se sentir à vontade em assumir algumas de suas dificuldades e/ou demonstrar insegurança perante os seus pares. A institucionalização foi finalizada com o desenvolvimento do termo geral dos números triangulares no GeoGebra conforme mostrado na figura 48, destacando-se que matematicamente, todas as soluções apresentadas por eles também eram corretas e que o *software* permitia a utilização de suas respostas como corretas.

Figura 48: Institucionalização da situação 2 no GeoGebra



Fonte: Elaboração do autor (2023)

Foi mostrado que para a sequência 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78 e 91, por exemplo, tem-se que $A_1 = 1$, $A_2 = 3$, $A_3 = 6$, $A_4 = 10$, e assim sucessivamente. Além disso, tem-se também na estrutura do triângulo formado que:

$$A_1 = 1$$

$$A_2 = 1 + 2 = 3$$

$$A_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$A_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$A_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

o que resulta em $A_n = (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + (4 + n - 3)$, onde cada soma tem o mesmo valor e, portanto, são $\frac{n}{2}$ parcelas iguais, ou seja, para se chegar a um termo qualquer a_n dessa sequência basta que $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

6.3 Análise da Experimentação da Situação 3

A terceira situação trabalhada foi discutida e analisada sob a ótica dos autores Alves (2020), Souza *et al.* (2016), Andrade (2017) e Almouloud (2007). Iniciamos o encontro com a apresentação do problema aos sujeitos, onde foi realizada uma leitura prévia da situação e, em seguida, o arquivo do GeoGebra foi disponibilizado via App de mensagens Instantâneas.

Ao se deparar com o problema, os sujeitos passaram por um período contemplativo, talvez devido a sua característica puramente algébrica. Após alguns minutos, os participantes começaram a interagir com o *software*, iniciando a fase de ação da TSD. Houve um diálogo entre eles, onde foi possível perceber que as interações se centralizavam na tomada de decisões. Almouloud (2007) explica que o estudante, ao tentar iniciar a resolução, busca definir uma estratégia que traz clareza ao caminho escolhido.

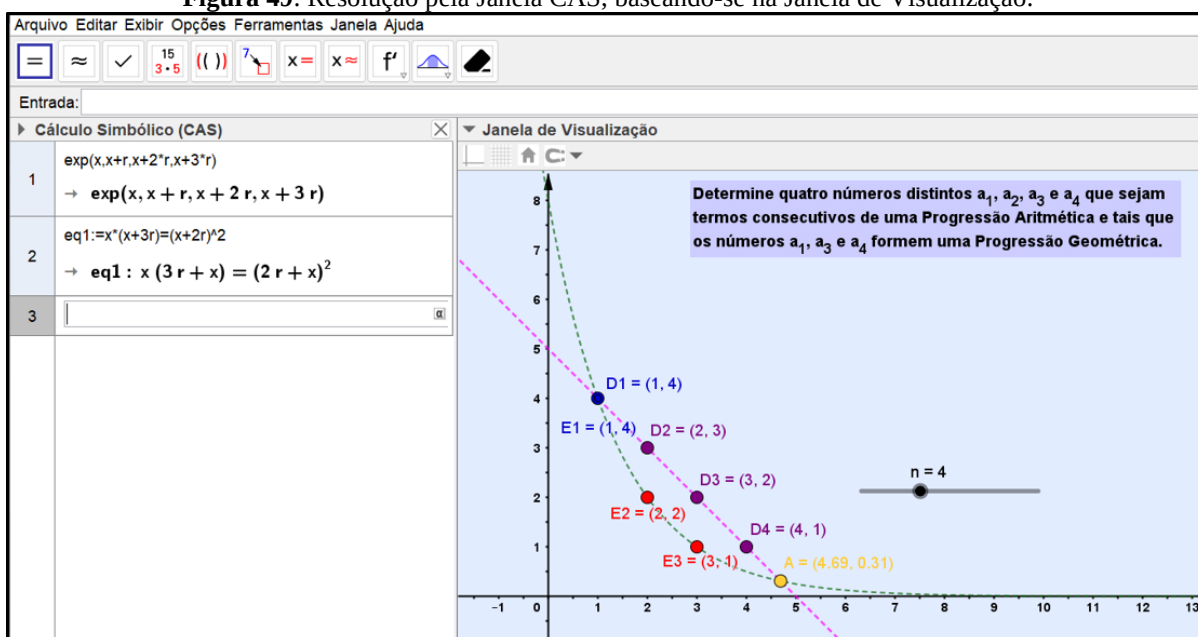
Nesse momento, o sujeito S1 sugeriu utilizar como modelo uma comparação dos termos da sequência com os lados de um triângulo, fazendo uso dos valores $(x, x + 1, x + 2)$ para representar esses termos. A observação do sujeito S1, embora incompleta, revela uma linha de raciocínio esperado, posto que na continuação de sua fala ele conclui que como são quatro termos tem-se $(x, x + 1, x + 2, x + 3)$, representando os quatro termos da sequência do problema.

Outra observação importante é a ideia do uso de funções para a solução do problema, embora não tenha ocorrido um fechamento dessa ideia. Nesse caso, houve o que Alves (2020) chamou de processo investigativo, com uma exploração dos gráficos e formulação de hipóteses para a obtenção da solução.

Foi possível perceber uma mudança da fase de ação para a formulação. No entanto, percebeu-se que os sujeitos insistiram na ideia dos termos com o valor da razão igual a 1 e não avançaram na resolução. Nesse momento, o professor tentou mediar a discussão e propôs uma nova abordagem do problema, trazendo a utilização do *software* e o aspecto visual gráfico.

Após isso, houve uma interação e troca de ideias entre os participantes e chegou-se à conclusão que seria preciso utilizar uma propriedade descrita em Ferreira, Alves e Santos (2021) para três números em PG. A partir daí, deu-se continuidade com a utilização da Janela CAS do GeoGebra, conforme a Figura 49, mostrando a evolução da resolução dos sujeitos:

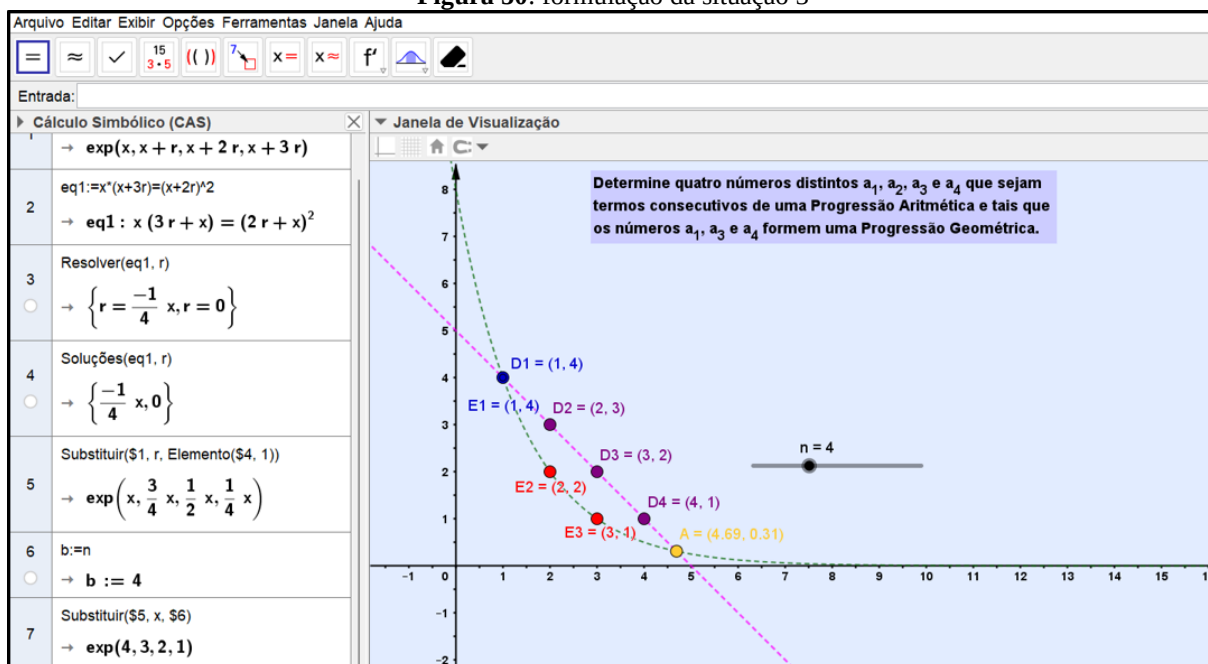
Figura 49: Resolução pela Janela CAS, baseando-se na Janela de Visualização.



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

A partir daí, foi possível perceber uma evolução no desenvolvimento da solução do problema, subsidiado pela interação com o *software*, que fornecia os elementos através da visualização gráfica para a correta interpretação deste. Conforme previsto em Alves (2020), os sujeitos utilizaram o conhecimento relacionado à definição de PG, que nessa situação se dá da seguinte forma: $\frac{(x+2r)}{x} = \frac{(x+3r)}{(x+2r)}$, ou o que está escrito na Janela CAS da Figura 49, como $x(x+3r) = (x+2r)^2$. Conforme esperado, os sujeitos concluíram que $r = \frac{-1}{4}x$, de modo que, para o valor do controle deslizante $n = 4$, os termos da PA seriam (4, 3, 2, 1) e os termos da PG seriam (4, 2, 1), conforme exposto na Figura 50:

Figura 50: formulação da situação 3



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

No entanto, houve um equívoco em relação ao valor da razão, pois os participantes assumiram o seu valor igual a 1 e não compreenderam de imediato que havia infinitos valores que satisfaziam o problema. Apenas os sujeitos S1 e S2 participaram ativamente nas sugestões e respostas contundentes para esse problema. Mesmo que em alguns momentos suas conjecturas fossem equivocadas, eles refletiam e retomavam a discussão em busca da resposta certa.

De acordo com Almouloud (2007), em estudos baseados em Brousseau (1983), o erro não é uma falta total do conhecimento, mas sim o reflexo de uma experiência anterior, que por vezes experimentada conduziu ao sucesso, porém, não sendo aplicada de forma correta se constitui como um obstáculo (ALMOULOU, 2007 apud BROUSSEAU, 1983).

Almouloud (2007) complementa que esses erros, cuja recorrência deriva de um mesmo sujeito, geralmente são relacionados a um fator comum, e estes podem ser em relação a uma forma de conhecer, um conceito característico ou um conhecimento anterior que foi experimentado e validado em um outro contexto.

Nesse sentido, as experiências vividas pelos sujeitos podem interferir em sua linha de raciocínio, quando diante de problemas parecidos. Evidenciou-se, então, a fase da validação da TSD, na qual os sujeitos mostraram suas tentativas de resolução. Para ilustrar esta etapa, apresenta-se na Figura 51 a tentativa inicial de resolução do problema pelo sujeito S2:

Figura 51: Tentativa inicial do sujeito S₂

The image shows handwritten mathematical work on a piece of paper. It includes several equations and boxed results, some of which are crossed out or corrected. The work appears to be an attempt to solve a problem involving sequences or algebraic relationships.

Key elements of the work include:

- Initial equations: $a_4 = a_1 + 3r$, $a_2 = a_1 + r$, $a_3 = a_1 + 2r$, and $a_4 = a_1 \cdot q^2$, $a_3 = a_1 \cdot q$.
- Derivation of r from $a_1 + 2r = a_1 \cdot q$: $2r = a_1(q-1)$, leading to $r = \frac{a_1(q-1)}{2}$.
- Derivation of r from $a_1 + 3r = a_1 \cdot q^2$: $3r = a_1(q^2 - 1)$, leading to $r = \frac{a_1(q^2 - 1)}{3}$.
- Equation $\frac{a_1}{2} = (q-1) = \frac{a_1}{3}(q^2 - 1)$.
- Equation $3 = 2(q+1)$, leading to $3 = 2q + 2$, $2q = 1$, and $q = \frac{1}{2}$.
- Final boxed results: $r = \frac{a_1}{4}$ and $a_1 = -4r$.

Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Vale ressaltar que o modelo apresentado na Figura 51 reflete as discussões entre os sujeitos na fase de formulação, em que apenas dois deles discutiam propostas enquanto os demais assistiam ou concordavam com ambos, em uma participação passiva, e dessa forma não há registros de suas tentativas.

Também foi percebido que os sujeitos não foram estimulados pelo problema a desenvolver o raciocínio conforme esperado na análise a priori. Embora dois deles tenham conseguido responder ao problema, não houve uma confirmação das hipóteses levantadas como previsto. Presumimos que podemos ter deixado escapar alguma observação necessária durante a elaboração da situação que direcionasse melhor os sujeitos durante a manipulação no ambiente do *software*, haja visto que era esperado que eles notassem que o valor da razão dependeria do a_1 e isso seria possível apenas pela visualização dos seus termos expostos diretamente no gráfico.

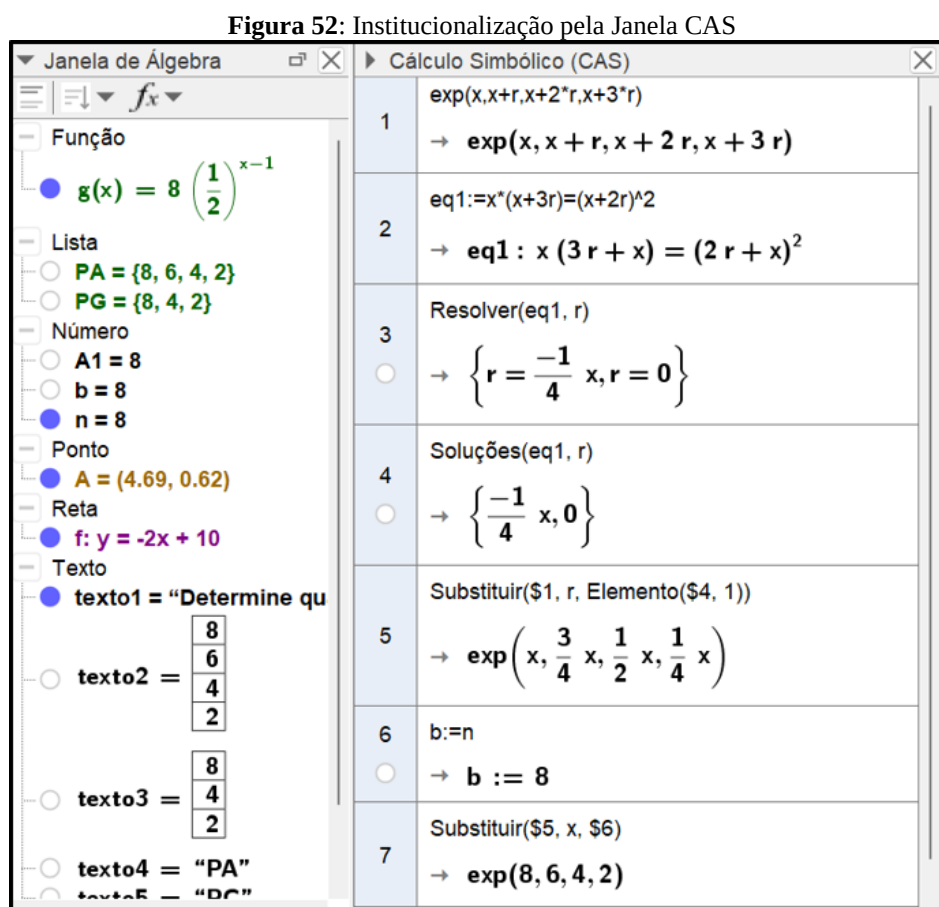
A validação ocorreu com as falas dos sujeitos S1 e S2, expondo suas linhas de raciocínio em relação aos gráficos das sequências e a manipulação do controle deslizante. Nesse instante, houve participação também do sujeito S5, que perguntou para S2, “*como você encontrou a razão? Porque a minha deu $x/4$!*”, e então houve a explicação do processo de forma oral.

As dificuldades encontradas durante a experimentação, revelaram um obstáculo previsto no referencial teórico, no tocante à carência conteudista em relação a este tópico das progressões. Isso foi evidenciado nas incertezas dos sujeitos e na insegurança das propriedades

da média geométrica da PG. Além disso, mostrou-se como lacuna os modelos de abordagem voltados para a visualização gráfica das sequências, sendo um grande desafio para os sujeitos na fuga de modelos puramente algébricos.

Mesmo sem uma comprovação das hipóteses, com a participação dos sujeitos, o professor assumiu o controle da situação e realizou a institucionalização. Assim, apresentou o passo-a-passo da construção e o seu resultado, como planejado na análise a priori, ampliando a explicação na forma algébrica e geométrica com a utilização do GeoGebra.

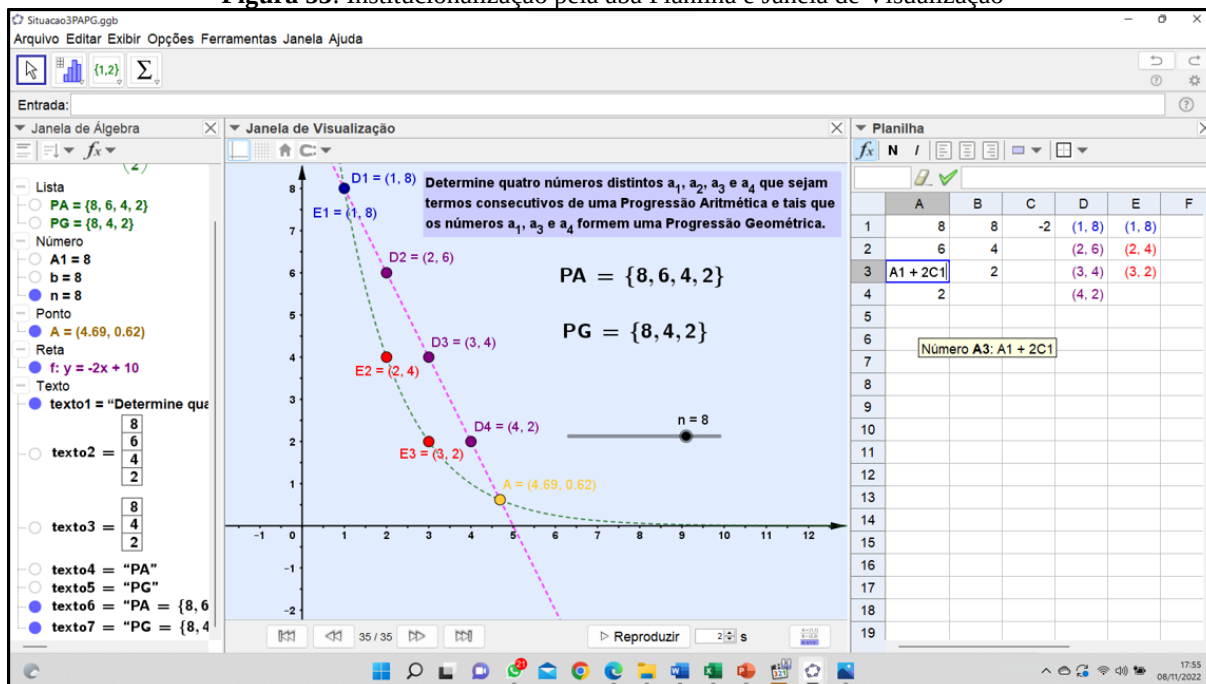
Na forma algébrica foi utilizada a aba Janela CAS, conforme a Figura 52, mostrando a evolução dos elementos da sequência:



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Além dessa maneira, na qual se percebe que o valor do controle deslizante é igual a 8, e como se percebe também que a PA é a sequência (8, 6, 4, 2) e a PG é (8, 4, 2), também foi realizada uma institucionalização, tanto algébrica quanto gráfica, com a utilização da aba Planilha do GeoGebra, conforme Figura 53:

Figura 53: Institucionalização pela aba Planilha e Janela de Visualização



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Destacam-se, na figura 53, os elementos utilizados nessa construção pela aba Planilha, em que foram utilizados conceitos básicos de PA e PG, como se percebe na linha 3, com a fórmula do terceiro termo, $a_3 = a_1 + 2r$, em que o valor de “r” está definido na célula C1.

Após a institucionalização, o sujeito S1 lembrou de que a propriedade da PG mencionada era apresentada no material didático com a sintaxe $b^2 = a * c$. Porém, este participante teve dificuldades em realizar a transposição didática no momento da experimentação. Nesse caso, considera-se que a aplicação dessa situação não cumpriu plenamente seu objetivo, já que apenas dois dos sujeitos foram capazes de utilizar o modelo geométrico para chegar ao conceito esperado. Ressalta-se que os demais sujeitos atingiram o conhecimento esperado para essa situação após a institucionalização, porém não era essa a hipótese prevista.

6.4 Análise da Experimentação da Situação 4

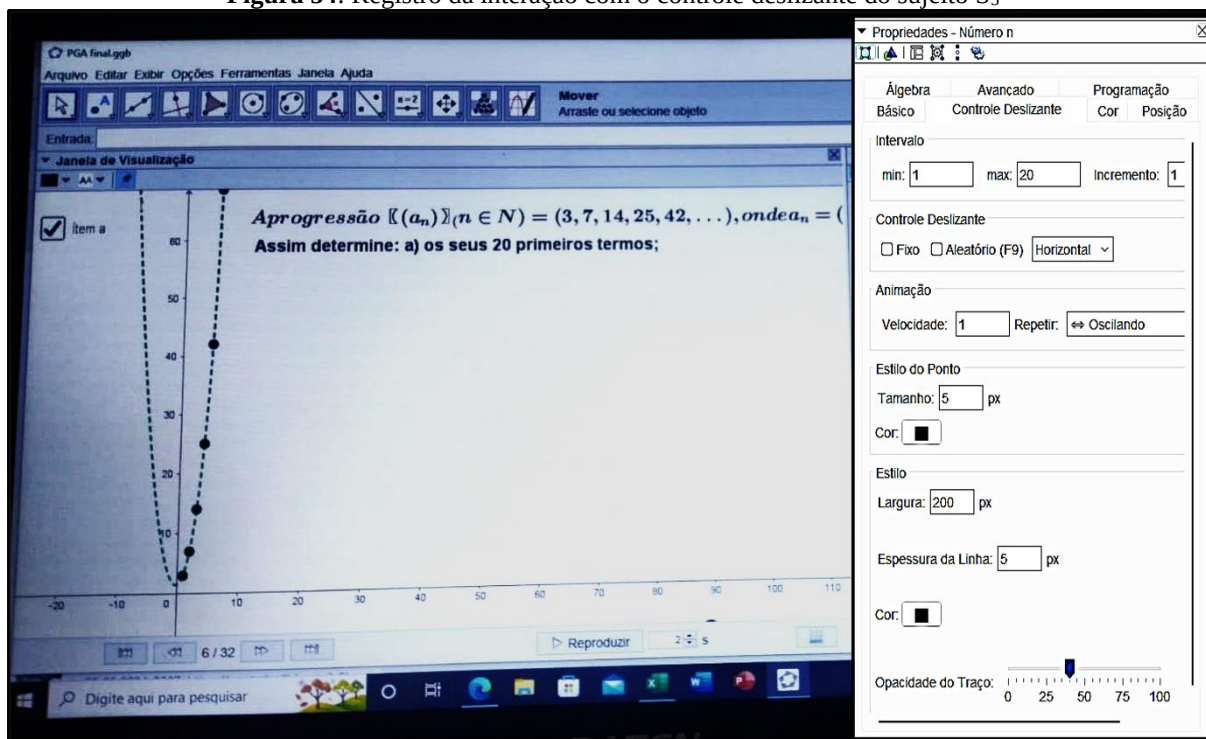
Nesta situação, o problema foi analisado à luz dos autores Rocha (2019), Alves (2020) e Almouloud (2007). Trata-se de um problema referente ao conteúdo de Progressões Geométrico-Aritméticas.

Iniciamos com a apresentação do problema via projeção no *datashow* e App de mensagens instantâneas, configurando assim o início da fase de ação da TSD. Houve um estado de contemplação do problema, em que os participantes relataram nunca ter visto este tipo de abordagem de sequências, o que causava certa insegurança ao desenvolver o raciocínio. Isso confirma a hipótese levantada na fase e ação dessa situação de acordo com Almouloud (2007).

Seguindo na perspectiva de Alves (2020), na fase de ação houve um confronto entre as informações dadas na forma algébrica e a geométrica, em que os participantes ficaram passaram alguns minutos em silêncio observando o enunciado do problema e tentando estabelecer um ponto de partida. Neste momento, o professor-pesquisador tentou instigá-los a iniciar o processo de investigação. Novamente confirmou-se a hipótese defendida por Alves (2020), de que na fase de ação o professor participa ativamente para instigar os sujeitos a se engajar com o problema.

Em seguida houve um diálogo entre os participantes e notou-se claramente uma mudança de postura. Percebeu-se uma interação entre os sujeitos S3, S4 e S5, em uma tentativa de responder ao item a do problema, que pedia os vinte primeiros termos da sequência inicial. Eles interagiram com o controle deslizante, que não estava configurado para atender o objetivo. Essa interação pode ser observada na Figura 54:

Figura 54: Registro da interação com o controle deslizante do sujeito S₅



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Também ocorreu nesse momento algo já esperado, em relação à compreensão e transposição do termo geral da sequência, para a função geradora do gráfico pelo sujeito S5 e os sujeitos S3 e S4. Porém, estes últimos não utilizaram os seus arquivos e preferiram interagir apenas em diálogos com o seu colega. Ainda assim, foi possível estabelecer que houve uma compreensão baseado no diálogo entre eles durante a resolução. Essa constatação se deu no momento em que foi possível estabelecer os vinte primeiros termos da sequência com a manipulação do controle deslizante reconfigurado e a visualização gráfica da sequência.

Nessa interação entre os sujeitos, foi possível perceber quando houve a transposição didática do termo geral da sequência para a lei de formação da função. Quando o sujeito S4 externalizou essa relação, o sujeito S1 complementou que a sequência seria representada pelos pares ordenados dos pontos gerados pelo controle deslizante. Resgatando a fala de Alves (2020) sobre o raciocínio intuitivo dos sujeitos na fase de ação, estes são mobilizados principalmente pela percepção dos elementos de natureza numérica, algébrica e geométrica.

Esse momento marcou uma mudança para a fase de formulação da TSD, pois como indica Almouloud (2007), há troca de informações entre os sujeitos. O participante S5 disse que *“esses pontos aí são esses valores aplicados na função”*, se referindo aos pontos plotados sobre o gráfico na Janela de Visualização. O sujeito S3 completou que *“esse termo geral dá a função exponencial”*, enquanto os sujeitos S2 e S1 argumentaram sobre os pares ordenados, usando como exemplo o par (3, 14).

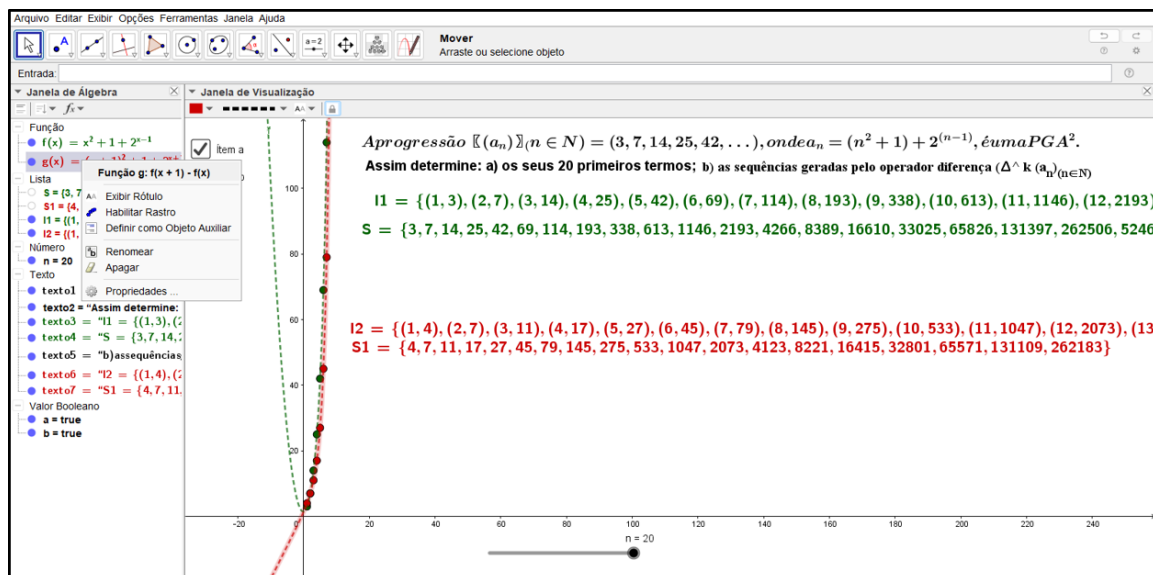
Na fala do participante S5, ele ponderou com os demais que *“é, dá muito trabalho aplicar de um por um”* e validado pelos demais. Ainda S5 completou que *“pelo gráfico podemos ver até o décimo quinto”*, abrindo novamente uma ideia de resolver pela visualização gráfica, conforme previsto anteriormente. Na discussão, o sujeito S5 associou a função ao termo geral da PGA e concluiu juntamente com S2, destacando que *“o gráfico não é contínuo e sim discreto, pois o valor do Domínio é Natural, ou seja, o gráfico são os pontos discretos”*. O sujeito S4, demonstrando que havia compreendido, continuou o raciocínio explicando que o gráfico não era de todos os pontos, somente de alguns.

O sujeito S3 fez uma comparação entre os valores de n , aplicados ao termo geral, e o resultado de a_n , com os pares ordenados, e lembrou dos conjuntos Domínio e Imagem em cada ponto representado no gráfico. Nessa troca de informações, houve a participação de todos os sujeitos, culminando na fala de S1, que propõe observar o comportamento dos pontos no gráfico quando o controle deslizante é manipulado até $n = 20$.

Esse momento está de acordo com o previsto e confirma o que era esperado dos sujeitos. Na Figura 55 temos a resposta do item a de um dos sujeitos:

Os passos para esse entendimento podem ser observados na Figura 56, onde é possível perceber a exploração tanto da parte visual (gráfica) quanto algébrica:

Figura 56: Fase de validação da situação 4



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

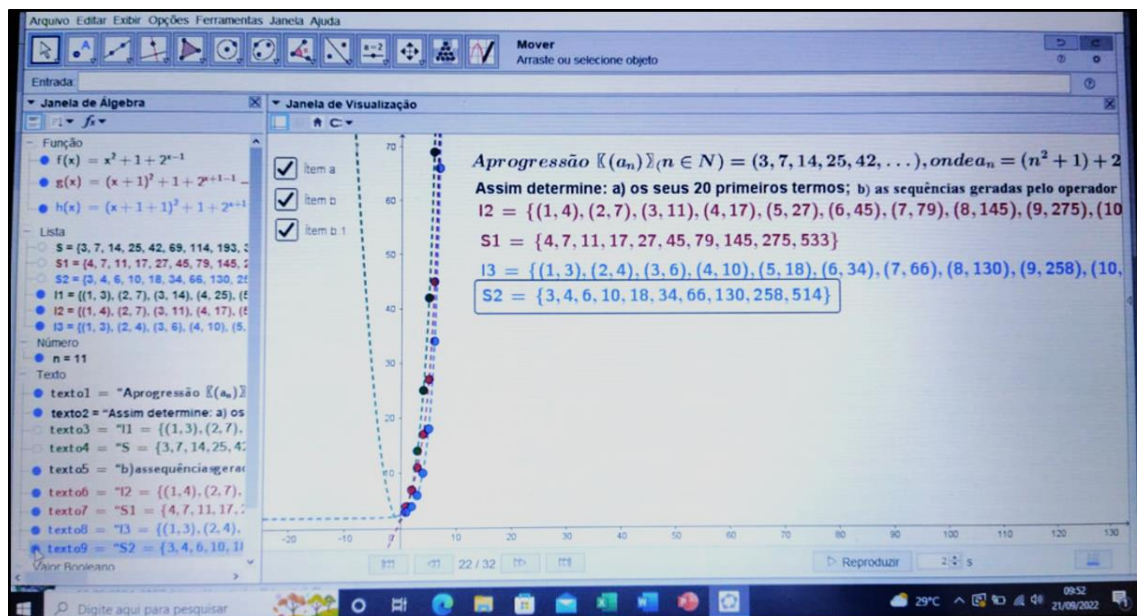
Durante a transposição didática realizada, o sujeito S2 comparou o valor $f(x + 1)$ com o número 25 da sequência S, para justificar que se $f(x + 1) = 25$, então $f(x) = 14$, e assim ele concluiu que o operador diferença seria dado por essa operação toda vez que fosse ela realizada, gerando a sequência S1. Ele foi seguido pelo sujeito S3, que completou o raciocínio explicando como fez para encontrar os termos da sequência S1, se valendo apenas da visualização dos elementos gráficos e numéricos da Janela do GeoGebra.

Esse momento marcou o início da fase de validação. Conforme Alves (2020, p. 334) “o professor deverá estimular a atividade de provas”. Neste caso, as provas foram apresentadas nas falas dos participantes S1, S2 e S5 imediatamente, que os termos seriam o resultado do operador diferença $f(x + 1) - f(x)$ aplicado na sequência anterior.

Outro aspecto observado foi que a abordagem das sequências, como elementos de uma função, facilitou a compreensão destas. Compreendendo que a próxima sequência seria plotada em uma função $h(x)$ tal que $h(x) = g(x + 1) - g(x)$, semelhante ao ocorrido para a função $g(x)$ acima. Isso está de acordo com o previsto na análise *a priori* e confirma a hipótese levantada, de que a interpretação geométrica da PGA se dará pela relação entre as funções e pela interação no ambiente do *software* GeoGebra, contribuindo para a melhor compreensão do assunto.

Em seguida ocorreram trocas de informações sobre o próximo passo, necessário para determinar a sequência a ser suportada sobre uma outra função dependente de $h(x)$, como mostra a Figura 57:

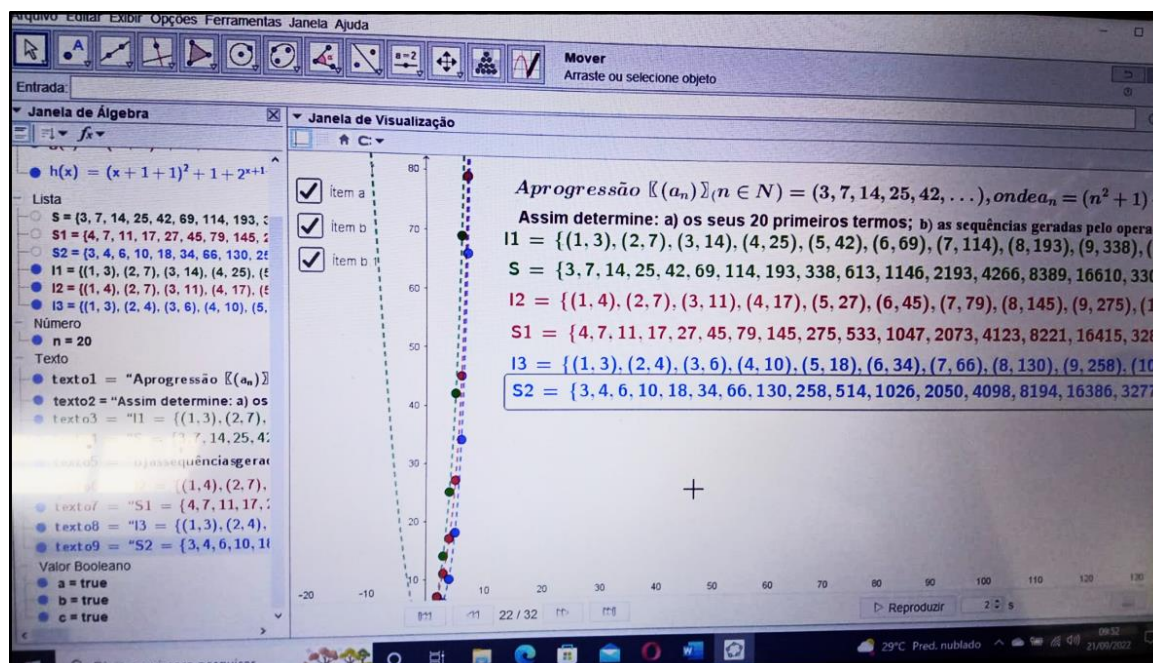
Figura 57: Desenvolvimento da fase de validação da situação 4



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Na Figura 57, o sujeito participante S1 mostra o desenvolvimento da situação encontrando, pela definição do operador diferença, a sequência S2 na função $h(x)$ em azul. Na Figura 58 temos o mesmo processo do sujeito S2:

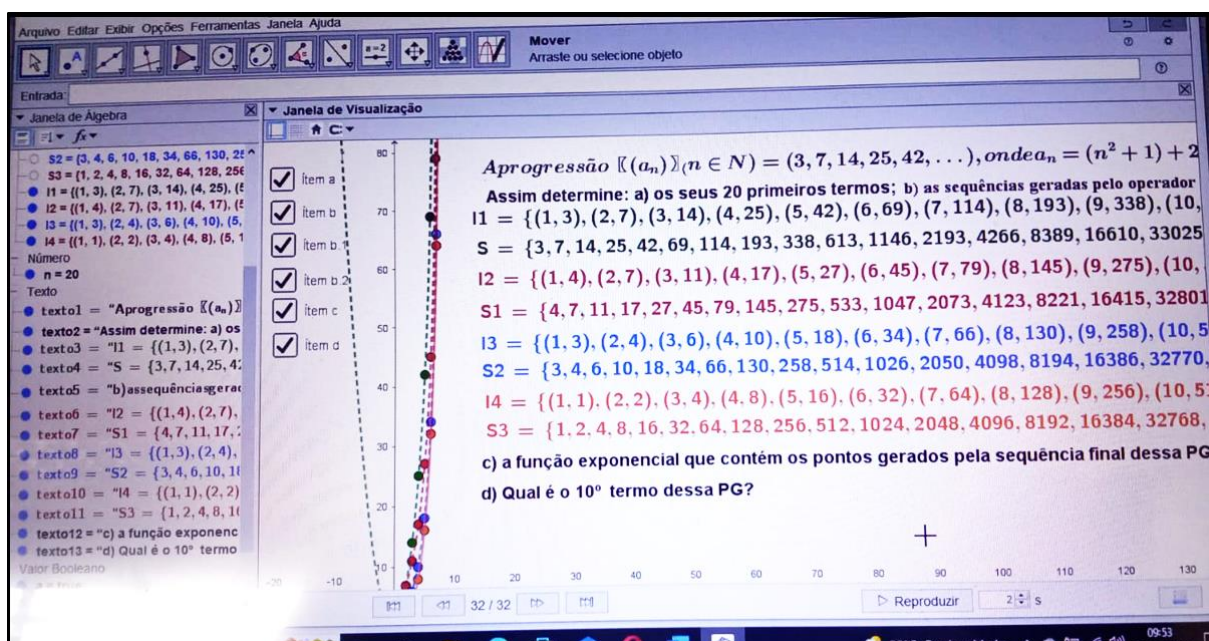
Figura 58: Validação do sujeito S2 da situação 4



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Por fim, a Figura 59, do sujeito S5, com mais um passo no desenvolvimento dessa situação:

Figura 59: Validação do sujeito S5 da situação 4



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Percebeu-se durante a experimentação da situação 4 que os participantes, ao aplicar sucessivamente o operador diferença, não tiveram dificuldade em perceber a definição da PGA

ao encontrarem a sequência S3 e perceberem que ela era uma PG. Essa constatação se deu nas falas do sujeito S3, que explicou que *“se você aplicar o operador diferença de novo nessa sequência ela ainda vai ser do tipo 2^x ”*. Esse raciocínio foi seguido e complementado pelo sujeito S2, que disse *“2-1 dá 1, 4-2 dá 2, aí fica 1, 2, 4, 8, 16, 32 e a próxima também”*. Isso justifica a fala de Almouloud (2007), sobre a busca das certezas e o fato de os sujeitos tentarem explicar a validação de suas respostas.

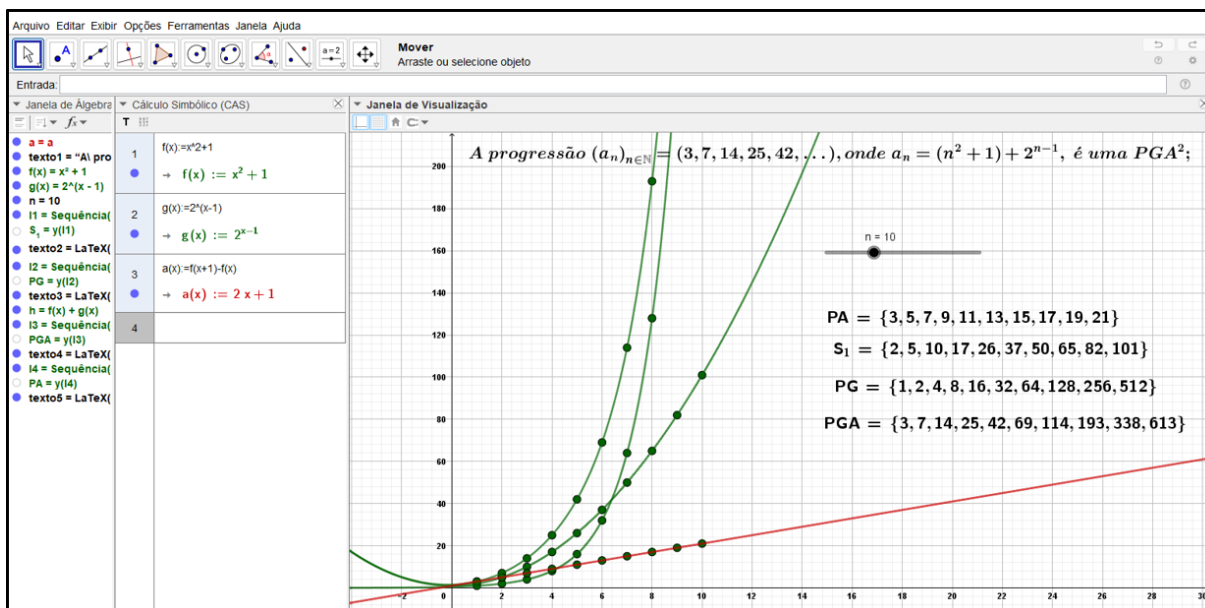
Para explorar ainda mais a situação, foram acrescentadas algumas indagações sobre o problema como por exemplo: no item d, qual seria o décimo termo dessa PG dada pela sequência S3? A resposta foi dada de forma rápida, mostrando que houve um entendimento do problema. O professor-pesquisador insistiu em verificar com os participantes a relação entre o resultado do décimo termo e o controle deslizante. A explicação do sujeito S5 aponta que para o décimo termo o valor seria $n = 11$, e o sujeito S2 complementou que *“porque esse um já está pegando o a_2 menos o a_1 ”* se referindo ao primeiro termo da PG.

Após esse momento, deu-se início a institucionalização da situação, na qual o professor-pesquisador assumiu o controle do problema e mostrou outro arquivo, que continha uma abordagem diferente da anterior, a fim de exemplificar o conceito de PGA.

Durante a apresentação do problema o professor-pesquisador demonstrou como se dá o surgimento da PGA, baseado na definição apresentada em Rocha (2019, p. 41) que diz: *“considere $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma PA de ordem k e $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma PG onde, $c_n = dq^{n-1}$, sendo $d \neq 0$ e $q \neq 1$. A progressão Geométrico-(Aritmética de ordem k), denotada por PGA^k , e associada à $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e à $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, é a progressão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde $a_n = b_n + c_n = b_n + dq^{n-1}$ ”, explicando que o valor de k nesse problema é igual a 2, pois a PA em questão é de segunda ordem.*

A institucionalização prosseguiu com o professor-pesquisador mostrando no GeoGebra, tanto numericamente quanto geometricamente e algebricamente, a relação entre as sequências PA e PG para gerar a PGA, conforme Figura 60:

Figura 60: Institucionalização da situação 4 mostrando o conceito de PGA.



Fonte: Elaboração do autor (2023)

Destacou-se principalmente as possibilidades de abordagem do problema nas várias formas viabilizadas pelo uso do *software*, que mostra na Janela CAS a função $f(x) = x^2 + 1$ e na Janela de Visualização o seu gráfico exponencial com os pontos da sequência $S_1 = \{2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, 101\}$ que representa a PA^2 .

Novamente na Janela CAS, mostrou a função $g(x) = 2^{x-1}$ com o seu gráfico na Janela de Visualização também exponencial e a sequência $PG = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512\}$ representada por pontos no gráfico de $g(x)$. Conforme Rocha (2019), mostrou-se na Janela de Álgebra a função $h(x) = f(x) + g(x)$ cujo gráfico exponencial é mostrado na Janela de Visualização com os pontos da sequência $PGA = \{3, 7, 14, 25, 42, 69, 114, 193, 338, 613\}$.

A fim de detalhar melhor as sequências, mostrou-se também que aplicando o operador diferença uma vez na sequência S_1 , resultaria na $PA = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$, cujo gráfico está representado na Janela de Visualização por uma reta, com sua função representada na Janela CAS pela equação $a(x) = 2x + 1$. Ressaltou-se nessa institucionalização que a quantidade de termos mostrados estão limitados pelo controle deslizante e optou-se por enfatizar apenas os 10 primeiros de cada sequência, como verificado na Figura 60 para $n = 10$.

6.5 Análise da Experimentação da Situação 5

A quinta e última situação trabalhada nessa pesquisa foi analisada de acordo com Alves (2021), Almouloud (2007) e Paiva (2010). A fase de ação ocorreu com a apresentação do

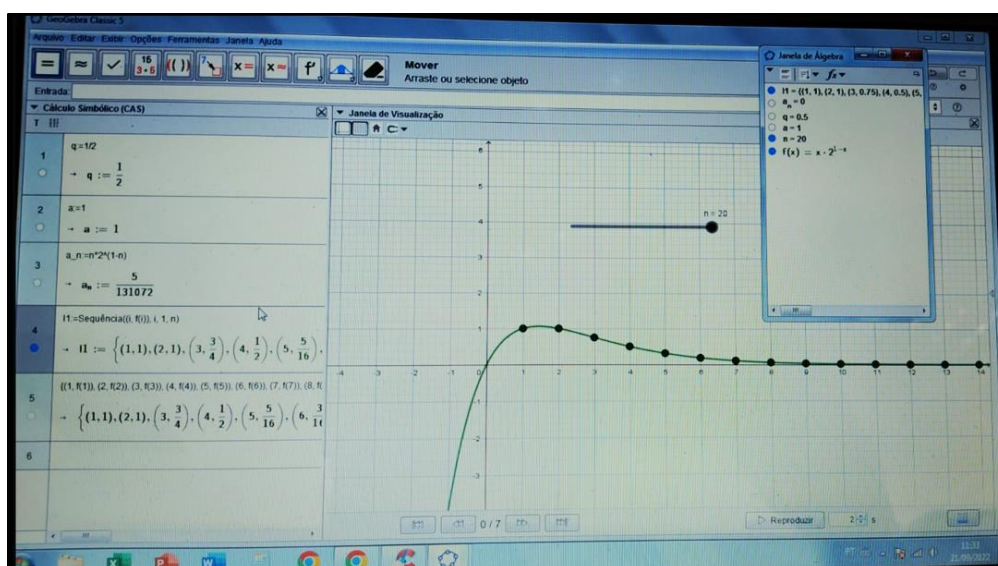
problema aos professores participantes, que inicialmente mostraram insegurança com o assunto, dado o fato de que é um assunto novo para os participantes.

Neste caso, devido à falta de conhecimentos prévios dos participantes sobre o assunto, era esperada essa primeira reação. Conforme previsto em Almouloud (2007, p. 193), nessa fase “a ação está relacionada a conhecimentos já incorporados pelos alunos, mas também nas estratégias de tentativa e erro”, configurando a dificuldade encontrada na carência prévia do assunto abordado.

Em seguida, houve uma tentativa de entendimento da sequência pelo participante S3, que percebeu uma característica familiar e comentou “o numerador é uma PA e o denominador é uma PG”, dando início ao primeiro momento de reflexão sobre os conhecimentos prévios necessários na obtenção da resposta. Para Alves (2021), na busca pela solução o sujeito poderá produzir uma ação que levará a criação de um conhecimento novo.

Conforme previsto para a fase de ação, os sujeitos tiveram uma primeira interação com o controle deslizante na busca por uma estratégia que explicasse a sequência. Ao serem indagados pelo professor-pesquisador sobre o comportamento do gráfico da sequência, eles disseram que separando a PA seria possível visualizar o seu gráfico em uma reta, o que iria facilitar o entendimento do problema. Na Figura 61 temos a tela do computador do sujeito S1 interagindo com o gráfico na tentativa de entender o problema:

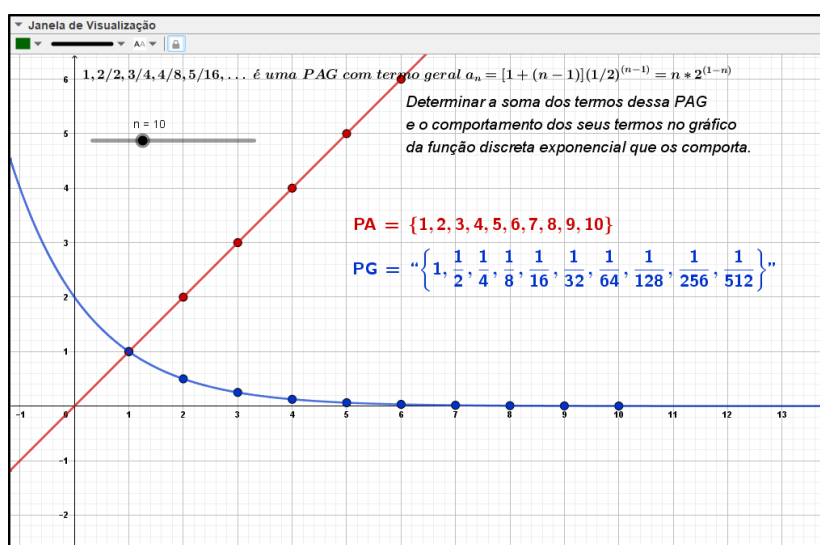
Figura 61: Tela do sujeito S₁ interagindo com o problema na fase de ação



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Na Figura 61 podemos perceber o sujeito manipulando o controle deslizante até $n = 20$, enquanto busca mais informações nas Janelas de Álgebra e Janela CAS. Nesse momento ocorre a situação de formulação. No entanto, percebeu-se uma insegurança dos sujeitos em avançar no entendimento do problema e foi preciso uma interação do professor-pesquisador, levantando perguntas norteadoras, no sentido de facilitar a clareza do objetivo do problema. Por exemplo, foi perguntado: baseado na visualização dos gráficos e das sequências mostradas nas janelas do GeoGebra como elas poderiam interagir entre si para gerar a sequência mostrada no enunciado? A Figura 62 mostra a tela com os elementos durante esse momento:

Figura 62: fase de formulação com a participação do professor pesquisador

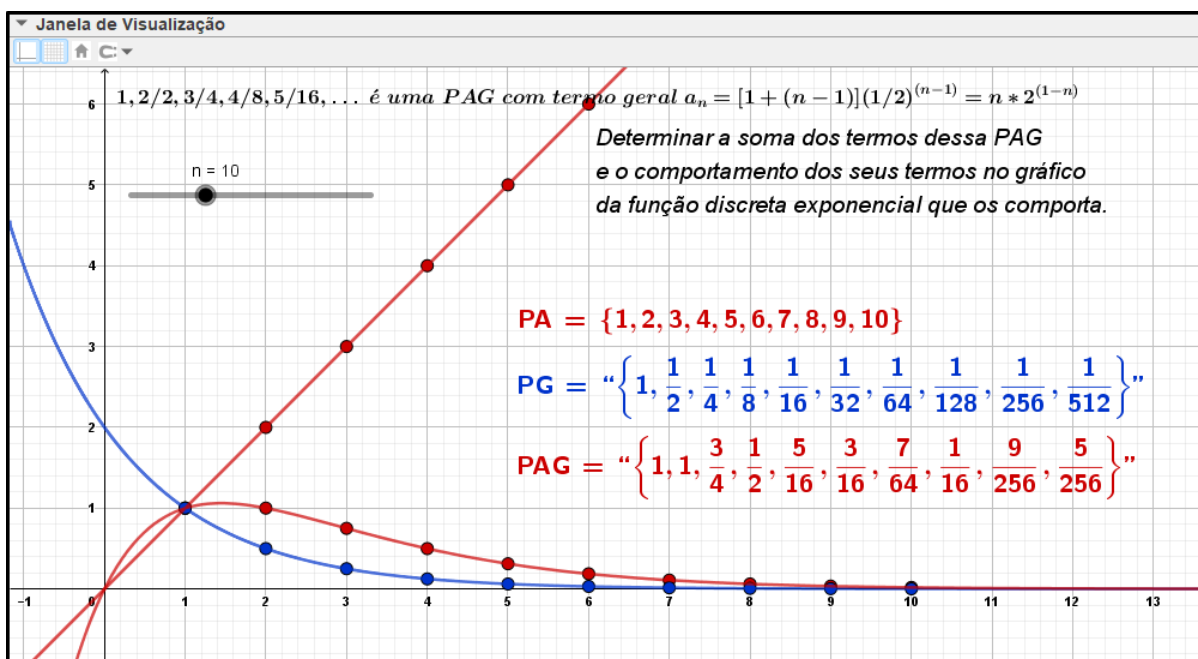


Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Diante dessa tela, o sujeito S3 respondeu que “a sequência inicial é a multiplicação dessas duas”. Com esta resposta, ele mostrou que a compreensão está de acordo com o previsto na análise *a priori* e, assim como ele, os demais chegaram a mesma conclusão. Outra observação foi levantada pelo sujeito S2, de que a outra função seria o produto de $f(x)$ por $g(x)$ e mais uma vez se percebe que essa constatação se deu a partir da visualização exposta.

Com essa constatação, iniciou-se a fase de validação, onde passaram a discutir as estratégias utilizadas. Foi então mostrado na Janela de Visualização do GeoGebra o resultado dessa multiplicação com a sequência PAG, para dar continuidade a segunda parte do problema, conforme a Figura 63:

Figura 63: Resultado da primeira parte do problema concluído



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Após esse momento, o professor novamente perguntou: como poderia ser resolvido no GeoGebra a segunda parte do problema que pedia a soma dos termos da PAG? Como previsto anteriormente, a maioria deles utilizou a Janela CAS para realizar os cálculos e, dos cinco sujeitos participantes, apenas dois não chegaram à resposta certa de imediato.

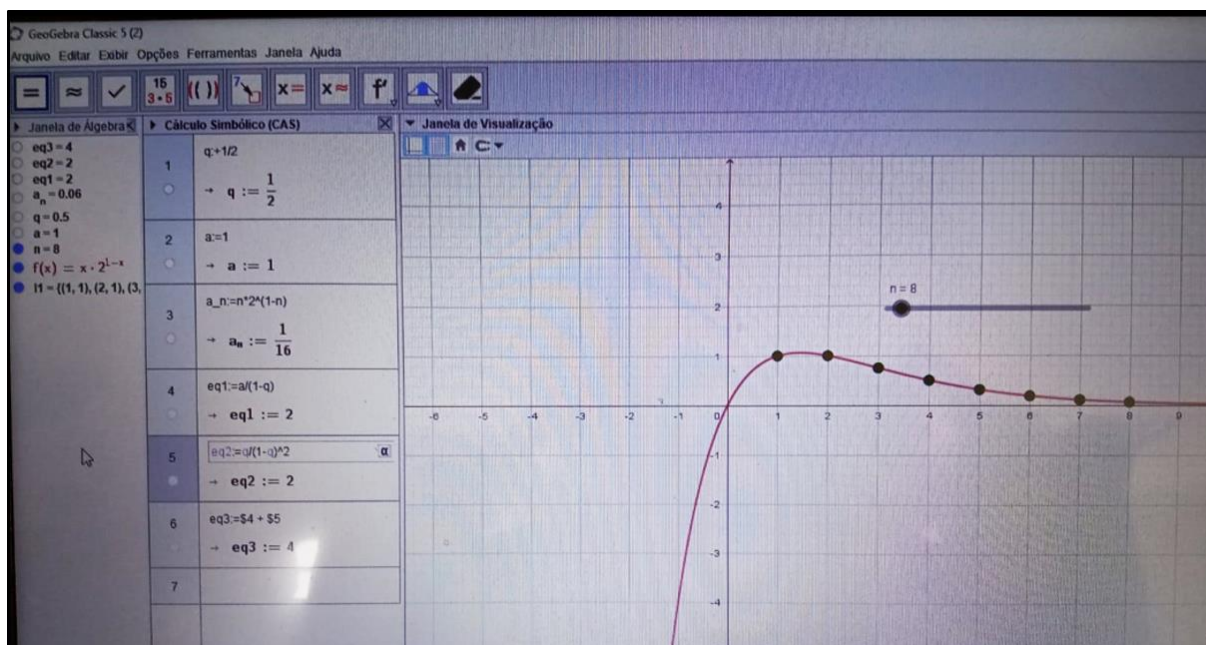
Diante dessa segunda parte do problema, houve discussões sobre as estratégias possíveis. O sujeito S2 revelou que em suas tentativas chegou ao resultado igual a três. Em suas palavras “*eu pensando aqui testei só com os dois primeiros termos, mas acho que não está certo*”, e quando o professor interrogou sobre o resultado, ele respondeu “*Somando separadamente na PA e na PG eu encontrei três mas, somando na PAG só dá dois*”. Claramente ele está cometendo um equívoco e instintivamente sabe disso, o que não inviabiliza de todo seu raciocínio. Considera-se que ele apenas esqueceu de aplicar o conceito a pouco descoberto.

Para Almouloud (2007), na TSD é perceptível durante essa fase uma preocupação do sujeito em utilizar rigorosamente uma linguagem matemática, na busca pela veracidade das afirmações. Durante a troca de informações entre eles, eles chegaram à conclusão de que o erro se dava em considerar apenas os dois primeiros termos para a verificação, dado que estes eram valores inteiros, enquanto os termos seguintes eram frações.

Após discussão, concluíram que a sequência era infinita e que estava limitada apenas ao controle deslizante. Nesse caso, ao serem questionados sobre qual seria o resultado da soma dos termos da PG, o sujeito S2 respondeu de imediato que era 2. Demonstrando que havia um

conhecimento da soma dos termos de uma PG infinita, a Figura 64 abaixo ilustra o raciocínio desenvolvido pelo sujeito S1 para o cálculo da soma dos termos da PAG:

Figura 64: Tentativa de solução (validação) do sujeito S₁.



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

O sujeito S1 conseguiu realizar o cálculo e chegar à resposta do problema, bem como os sujeitos S2 e S4. Já o sujeito S3 tentou, mas não conseguiu concluir e S5 apenas observou os outros numa postura de aprendizagem, e embora não tenha realizado o cálculo, ficou claro que houve compreensão. Basicamente S1 decompôs o problema conforme esperado e fez os seguintes passos nas linhas da Janela CAS de um a seis, conforme Figura 65:

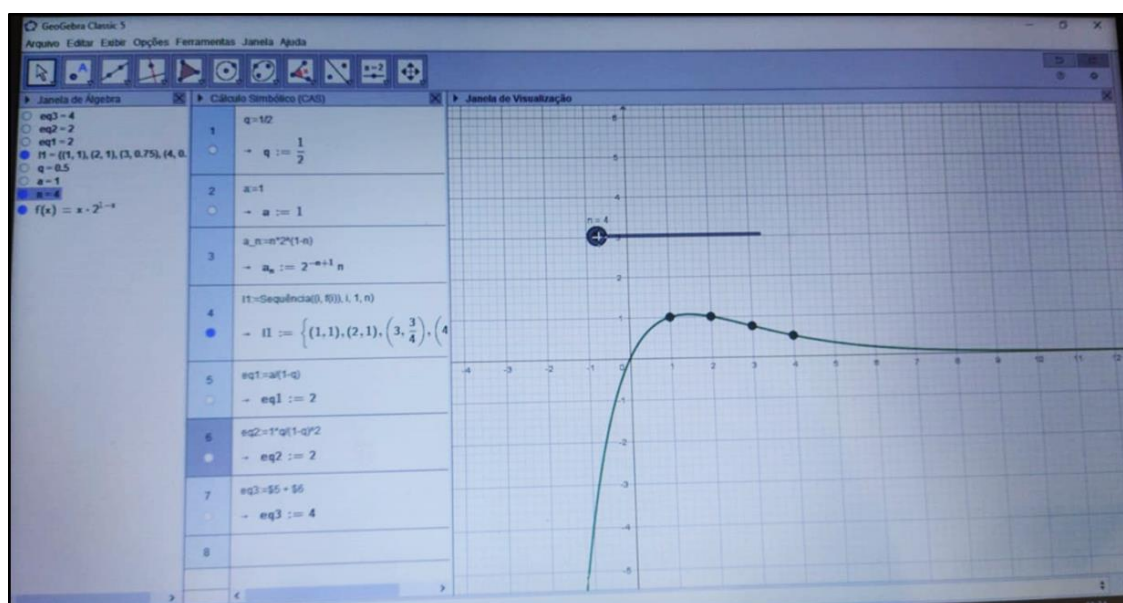
Figura 65: Validação do sujeito S₁ na Janela CAS.

Cálculo Simbólico (CAS)	
1	$q:=1/2$ $\rightarrow q := \frac{1}{2}$
2	$a:=1$ $\rightarrow a := 1$
3	$a_n:=n*2^{(1-n)}$ $\rightarrow a_n := \frac{1}{16}$
4	$eq1:=a/(1-q)$ $\rightarrow eq1 := 2$
5	$eq2:=q/(1-q)^2$ $\rightarrow eq2 := 2$
6	$eq3:=\$4 + \5 $\rightarrow eq3 := 4$
7	

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Nos passos apresentados pelo sujeito S1, notamos que ele deixou de representar o valor de “r” na equação, talvez por achar desnecessário, já que seu valor é igual a 1. Ainda assim, consideramos que ele atingiu o objetivo proposto e compreendeu o conceito como esperado. Já o sujeito S2, apesar de ter feito quase tudo igual ao S1, na linha 5 da Janela CAS representou o valor da razão r na eq2. Sua resposta foi registrada na Figura 66:

Figura 66: Validação do sujeito S₂ da segunda parte da situação 5



Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Para uma melhor compreensão da Figura 66, mostramos um recorte apenas da Janela CAS do sujeito S2 na Figura 67:

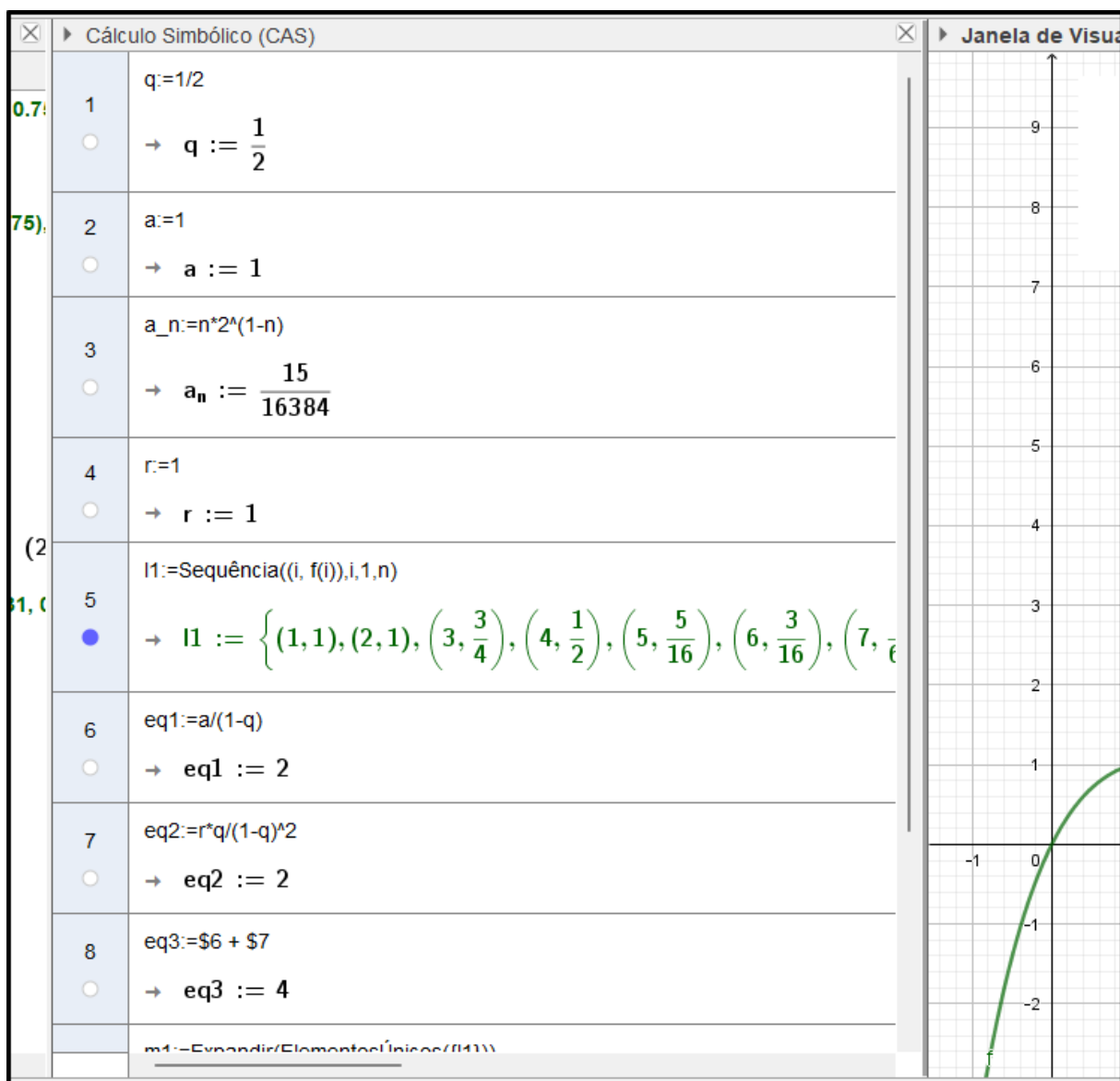
Figura 67: Janela CAS da validação do sujeito S2

Cálculo Simbólico (CAS)	
T	
1	$q:=1/2$
☐	$\rightarrow q := \frac{1}{2}$
2	$a:=1$
☐	$\rightarrow a := 1$
3	$a_n:=n*2^{(1-n)}$
☒	$\checkmark a_n := n \cdot 2^{1-n}$
4	$l1:=Sequência((i, f(i)), i, 1, n)$
☒	$\rightarrow l1 := \left\{ (1, 1), (2, 1), \left(3, \frac{3}{4} \right) \right\},$
5	$eq1:=a/(1-q)$
☐	$\rightarrow eq1 := 2$
6	$eq2:=1*q/(1-q)^2$
☐	$\rightarrow eq2 := 2$
7	$eq3:=\$5 + \6
☐	$\rightarrow eq3 := 4$

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Além de ter feito diferente na eq2, ele também inseriu na linha 4 uma sequência de pontos referentes à PAG. Nesse sentido, o sujeito S2 também atingiu o objetivo do problema e encontrou o valor da soma dos termos igual a 4.

Já o sujeito S4, apesar de ter conseguido também, não encontramos o registro de sua atividade. Quanto ao sujeito S3, na figura 68 podemos observar sua tentativa, que embora não tenha conseguido concluir o raciocínio, foi possível perceber que houve apropriação de parte do conceito:

Figura 68: Validação do sujeito S₃.

Fonte: Dados da pesquisa (2023)

Como vemos, ele utilizou a Janela CAS, porém não conseguiu desenvolver o mesmo raciocínio dos demais colegas. No entanto, percebemos que mesmo assim houve uma evolução do conhecimento da sequência, ao considerarmos a complexidade do assunto e o ineditismo deste no contexto da experimentação. O professor-pesquisador notou que o sujeito evoluiu no conhecimento e compreendeu o assunto em relação ao objetivo, que era encontrar a soma dos termos. Para Alves (2021, p. 123-124) “O professor consegue perceber o que ele quer ensinar apenas interpretando as formas e condições dessas produções”, sendo o conhecimento do *software* o maior obstáculo encontrado para atingir o objetivo do problema.

$$PAG = \left\{1, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{16}, \frac{3}{16}, \frac{7}{64}, \frac{1}{16}, \frac{9}{256}, \frac{11}{1024}, \dots\right\},$$

na linha 3, foi escrito $g(x) = x$, e a sequência “Sequência((i, g(i)), i, 1, n)” retornando a $PA = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}$, e seguindo, foi escrito na linha 4, a função $h(x) = 2^{(1-x)}$ que o GeoGebra plotou com a sintaxe $h(x) = 2^{-x+1}$ e a sequência “Sequência((i, h(i)), i, 1, n)” retornando a sequência:

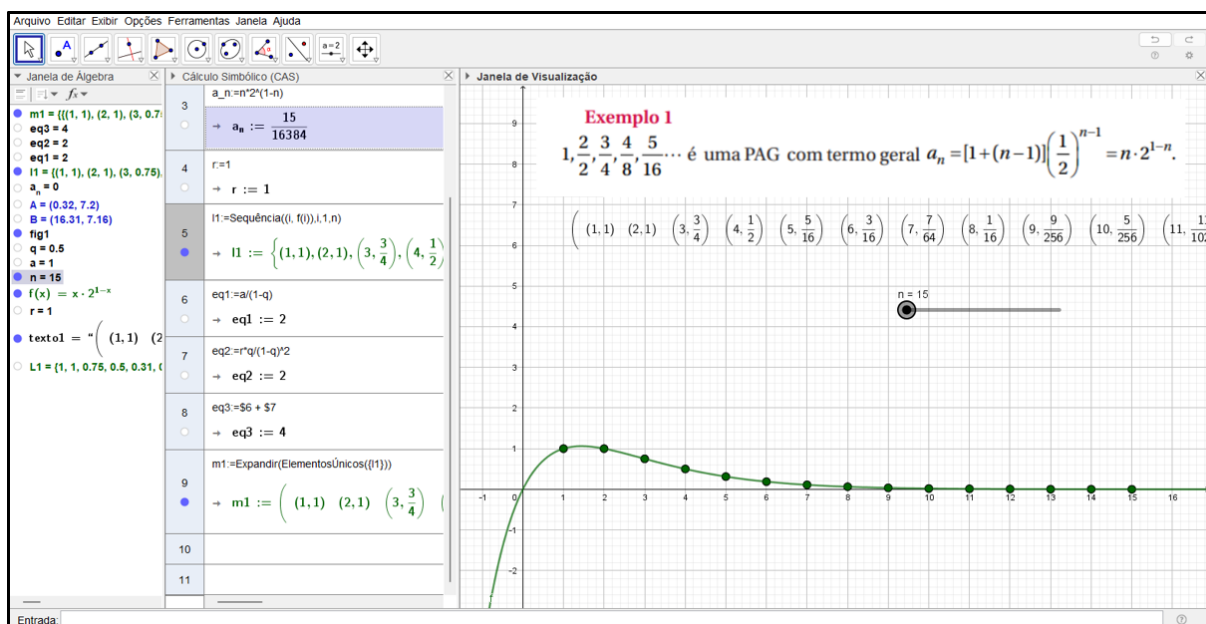
$$PG = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \frac{1}{1024}, \dots\right\}.$$

Daí o próximo passo foi estabelecer a relação entre essas duas funções e mostrar que a sequência gerada pelo produto das duas, era exatamente igual a sequência original.

Na linha 5, foi escrita a função $p(x)$ como $p(x) = g(x) * h(x) = 2^{-x+1} * x$, como queríamos demonstrar, com a função $p(x) = f(x)$. O registro visual gráfico foi possível pela Janela de Visualização, o registro algébrico pela Janela CAS e Janela de Álgebra e o numérico pelas sequências expostas em forma de textos também na Janela de Visualização.

Ainda na institucionalização, utilizamos a Janela CAS, onde foi realizado o cálculo da soma dos termos da PGA de acordo com a fórmula $s = \frac{a}{1-q} + \frac{rq}{(1-q)^2}$, como na Figura 70:

Figura 70: Institucionalização da soma dos termos da PAG



Fonte: Elaboração própria no GeoGebra (2023)

Foi utilizada a fórmula da soma de acordo com o desenvolvido em Paiva (2010). Seja a $PA = (a, a + r, a + 2r, \dots, a + (n - 1) * r, \dots)$, infinita, sendo “a” o primeiro termo dessa PA e “r” a razão e seja a $PG = (1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots)$, também infinita com o primeiro termo

igual a “1” e razão igual a “q”, assim uma PAG é uma sequência cujo termo geral é dado pela multiplicação ordenada dos termos dessa PA com a PG da seguinte forma $PAG = a, (a + r) * q, (a + 2r) * q^2, \dots, [a + (n - 1) * r] * q^{n-1} \dots$, ou seja, o seu termo geral pode ser escrito como $a_n = [a + (n - 1) * r] * q^{n-1}$ em que a, q e r são constantes não nulas e $q \neq 1$.

Para o desenvolvimento da fórmula da soma dos termos, temos o seguinte:

$$\text{Seja } S_n = a + (a + r) * q + (a + 2r) * q^2 + \dots + [a + (n - 1) * r] * q^{n-1}$$

$$\text{Fazendo } qS_n = q * a + q^2 * (a + r) + q^3 * (a + 2r) + \dots + q^n * [a + (n - 1) * r]$$

Subtraindo $S_n - qS_n$ temos:

$$S_n(1 - q) = a + rq(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2}) - aq^n - (n - 1)rq^n \text{ ou seja,}$$

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{(1 - q)} + \frac{rq[\frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} - (n - 1)q^{n-1}]}{(1 - q)}$$

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{(1 - q)} + \frac{rq[1 - nq^{n-1} + (n - 1)q^n]}{(1 - q)^2}$$

De acordo com Paiva (2010, p. 49), como as sequências acima são infinitas e $|q| < 1$ “o limite, quando n tende a infinito, de q^n é zero. Usando esse fato, temos: O limite da soma S_n dos n primeiros termos de uma PAG de primeiro termo “a”, razão aritmética “r” e razão geométrica “q”, com $|q| < 1$, quando n tende a infinito é igual a $s = \frac{a}{1 - q} + \frac{rq}{(1 - q)^2}$ ”. Isso posto, concluiu-se a institucionalização para o valor da soma como realizado na Janela CAS.

Após finalizada a experimentação e análise dos dados coletados, consideramos que o objetivo geral foi alcançado, pois os sujeitos relataram que a abordagem teórica empregada com a TSD na interpretação geométrica das progressões estudadas proporcionou uma experiência nunca vivida por eles, permitindo assim que eles pudessem experimentar o conhecimento de algo novo sem, contudo, ter tido um contato direto com o assunto previamente.

Os professores relataram que nunca ouviram falar da TSD nem especificamente sobre as progressões de ordem superior. Também nunca tiveram contato com as outras progressões estudadas nesse trabalho como a PAPG da situação 3, a PGA da situação 4 e a PAG da situação 5. Isso confirmou a hipótese de que existe uma lacuna conteudista e metodológica dentro do Ensino Médio, reforçando a ideia de que a TSD contribuiu para o ensino pela interpretação geométrica das progressões, subsidiadas pelo suporte tecnológico do GeoGebra, que atuou nas situações como meio para a transposição didática dos conteúdos trabalhados.

Nessa análise ocorreu uma validação interna referente às situações trabalhadas de acordo com ED em suas quatro fases, buscando a verificação das hipóteses pelos dados encontrados. Sendo assim, a análise *a posteriori* foi realizada paulatinamente ao longo do

desenvolvimento de cada situação didática, à luz dos teóricos elencados inicialmente, bem como quanto ao objetivo definido para cada uma delas.

Em relação à pergunta que norteou esta pesquisa, consideramos que foi respondida parcialmente pois, embora tenhamos percebido que houve contribuições, elas se limitaram pela falta de um conhecimento prévio por parte dos participantes. Isto foi relatado no formulário de avaliação final, após a experimentação da última situação. Nesse formulário, ao serem perguntados se consideravam o tema abordado interessante para utilização em suas aulas, todos responderam que sim, porém apenas um respondeu que já havia trabalhado esse assunto e que já havia utilizado o GeoGebra na ocasião.

Em relação ao uso do GeoGebra como ferramenta para o trabalho com progressões, todos responderam que o recurso facilitou o entendimento, no tocante aos gráficos. Outro relatou que esse aspecto trabalhado aumenta o nível didático da aula, outro enfatizou o aspecto da visualização e do entendimento do problema e outro respondeu que *“Utilizando o geogebra você pode associar o conteúdo de progressão com funções, e a mesmo tempo construir gráficos utilizando a ferramenta”* (S₄).

Também se percebeu que o aspecto da novidade, tanto da teoria de ensino utilizada quanto do conteúdo, representou um obstáculo a ser superado, principalmente nas duas últimas situações que tratavam da PGA e da PAG, gerando respostas como a de S₁, cuja principal dificuldade foi *“O conhecimento mesmo desse tipo de sequência... A primeira vez que vi...”* (S₁) ou *“As dificuldades da novidade. Mas até às dificuldades foram benéficas, no sentido de induzirem à experimentação”* (S₂). Aqui o sujeito S₂ reafirma a fala de S₁ e reforça o resultado de que superou a dificuldade. Para finalizar, o sujeito S₃ respondeu que sua maior dificuldade foi *“Basicamente na última questão”* (S₃), mais uma vez reforçando a falta de conhecimento do assunto mencionado pelos outros sujeitos.

Quando perguntados sobre que sugestões eles apontariam na busca por superar essas dificuldades, as respostas recaíram basicamente em uma melhor capacitação com uma carga horária maior. Contudo, relataram também que o uso do GeoGebra ajudou a superar, mesmo que o conhecimento do *software* ainda seja básico. Já quando questionados sobre os benefícios que a pesquisa trouxe para eles e se pretendiam utilizar o conhecimento adquirido em suas aulas, eles responderam que sim, e completaram nessa ordem com seus argumentos que usariam nos *“Terceiros anos... Pois já tem uma bagagem maior de conceitos!”* (S₁), e *“Certamente utilizarei em sala de aula. O GeoGebra me trouxe um leque maravilhoso de exposição de conteúdo”* (S₂), ou com *“Sim, principalmente nos aulões da OBMEP”* (S₃). Já a resposta do sujeito S₄ foi *“Sim, pois com a utilização do geogebra fica mais fácil a visualização de*

progressões de segunda ordem para os educandos” (S₄) e, por fim, “*Sim! vejo grande oportunidade de melhorar a compreensão do assunto*” (S₅). Todos avaliaram o suporte do *software* como positivo no decorrer da experimentação.

Já em relação a metodologia adotada, todos relataram não ter embasamento teórico suficiente para tecer uma crítica, mas que se sentiram confortáveis durante a aplicação da pesquisa e que acreditam que o método de aplicação foi satisfatório. Relataram também que, embora nunca tivessem ouvido falar sobre a TSD, entendiam que as situações se desenvolveram de forma a favorecer as interações entre eles durante as resoluções e que isso foi importante para que eles conseguissem responder os problemas de um assunto nunca visto antes.

Nesse caso, entendemos que a TSD se desenvolveu nas suas fases, favorecendo a interação entre os sujeitos. Isso proporcionou um resultado satisfatório para o alcance dos objetivos metodológicos, ou seja, foi possível afirmar que a TSD empregada como modelo teórico de ensino contribuiu para a superação das dificuldades durante o desenvolvimento das situações, caracterizando essas interações como sua principal contribuição.

Finalmente, eles elogiaram a escolha do tema de pesquisa pela sua relevância, tanto no ensino de Matemática, quanto por ser um assunto pertinente no Ensino Médio e pouco abordado e a escolha dos problemas apresentados. Demonstraram também um interesse particular em aprofundar o conhecimento sobre a TSD e o GeoGebra como suporte em suas aulas. Por tudo isso, consideramos que essa pesquisa atingiu plenamente seu objetivo.

Com isso finalizamos a análise *a posteriori* e partimos para a próxima seção, onde trazemos as considerações finais.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho de pesquisa apresentou uma nova abordagem para o estudo das progressões. Em específico, foram trabalhadas as PA, as PG, as PGA e as PAG, sob a perspectiva da TSD com o suporte tecnológico do uso do *software* GeoGebra. Nessa abordagem, foram explorados os aspectos visuais dessas sequências, priorizando a visualização gráfica, numa comparação com o estudo das funções. Dessa forma, foi possível observar a interação dos sujeitos com o objeto de estudo mediados pela utilização do *software*, perpassando pelas fases dialéticas da TSD.

Metodologicamente, este estudo foi embasado na ED, que nos permitiu organizar cada etapa com um embasamento teórico que proporcionou o desenvolvimento da pesquisa de acordo com as suas quatro fases, bem como nos orientou no caminho do desenvolvimento das situações didáticas que foram pensadas seguindo as fases da TSD.

Assim, nesse trabalho buscamos trabalhar o ensino das progressões de uma forma não trivial, já que não é usual nos livros didáticos a abordagem pelo viés da visualização gráfica, nem tampouco se percebeu em nossos estudos qualquer outro trabalho que utilizasse o estudo das progressões na forma geométrica.

Ao nos basearmos nessa característica sobre o ensino das progressões, geramos o seguinte questionamento: quais as contribuições da interpretação Gráfica na perspectiva da TSD a partir da resolução de problemas no ensino médio com o auxílio do GeoGebra para o ensino das progressões aritméticas e geométricas de segunda ordem? Diante de tal questionamento foi gerada a hipótese de que a TSD, como proposta metodológica aliada a um artefato tecnológico, como o GeoGebra, contribuiu proporcionando uma melhor prática docente no ensino das progressões aritméticas e geométricas.

A partir daí foram gerados os objetivos, geral e específicos como guias orientadores para o desenvolvimento dessa pesquisa, cujo delineamento consiste em analisar as contribuições da Teoria das Situações Didáticas e Engenharia Didática para o ensino de interpretação geométrica dos gráficos das Progressões Aritméticas e Geométricas de ordem superior, subsidiadas pelo *software* GeoGebra.

Seguindo as fases da ED, e atendendo ao objetivo específico um, foi desenvolvido na análise preliminar um estudo investigativo nos livros didáticos de matemática do ensino médio, sobre os recursos metodológicos e didáticos utilizados no ensino de progressões, bem como um estudo conceitual sobre as Progressões Aritméticas e Geométricas. Além disso, buscamos

apresentar os aspectos da TSD e a sua importância para este estudo, como teoria de ensino, assim como a ED como metodologia de pesquisa.

Para atender o objetivo específico dois, foram desenvolvidas cinco situações didáticas de ensino, que foram aplicadas durante a experimentação com os sujeitos aptos de acordo com os critérios de inclusão estabelecidos. E por fim, na análise a *posteriori* das situações, verificamos as hipóteses levantadas na análise a *priori*, concluindo o objetivo específico três.

Em relação aos objetivos, essa pesquisa os atingiu satisfatoriamente, pois foi possível perceber que a abordagem do objeto de estudo pelo viés da visualização, com a interpretação gráfica das progressões, trouxe uma nova perspectiva para o ensino desse componente curricular. Além disso, acrescentou possibilidades de interação entre o conteúdo e o uso da tecnologia pelo *software* GeoGebra. Ressaltamos que nos relatos dos sujeitos, ficou evidente que a interpretação gráfica foi fundamental para o entendimento das situações, que em sua maioria tratavam de um assunto pouco explorado e, portanto, de difícil compreensão quando abordado pelo viés comumente apresentado nos livros didáticos.

Compreendemos que o experimento ocorreu dentro do que era esperado e seguiu o cronograma como planejado. No entanto, poderia ter tido um resultado melhor se tivéssemos optado por um pequeno curso introdutório de utilização das ferramentas do *software*, pois, embora eles o tenham utilizado durante a pandemia, somente lançaram mão dos conhecimentos básicos, e nenhum deles relatou uma utilização nos moldes ao qual esta pesquisa se propõe.

Quanto às dificuldades relatadas pelos participantes, destacamos o pouco tempo para a realização da pesquisa, pois os professores são atarefados e preferem realizar atividades que gerem algum certificado. Outra dificuldade foi a falta de conhecimentos prévios sobre o assunto, gerando insegurança nos participantes, sendo esta possível de ser superada a partir do desenvolvimento das situações.

Na primeira situação, foi verificado que o aspecto visual do problema trouxe uma melhor compreensão aliado ao aspecto dinâmico do *software*, possibilitando aos sujeitos chegar ao resultado apenas pela visualização da sequência de quadrados, mesmo se considerarmos que o problema em questão era inédito em todos os aspectos. Isso também nos levou a perceber que foi possível verificar que o conceito de PA de segunda ordem não era conhecido pelos participantes, revelando assim a confirmação de uma das hipóteses levantadas anteriormente sobre a existência de uma lacuna conteudista em relação ao ensino de progressões.

Ainda nessa situação, percebemos que a utilização do GeoGebra aliado a TSD contribuiu de forma determinante para o entendimento do problema, segundo os relatos dos sujeitos, que normalmente se deparam com problemas estáticos nos livros didáticos. Também

verificamos que, embora a utilização do *software* tenha sido importante, em alguns momentos os sujeitos sentiam a necessidade de utilizar materiais não digitais como papel e lápis/caneta, revelando mais uma lacuna, dessa vez sobre a confiança tecnológica de utilização dos recursos digitais disponíveis, como o GeoGebra.

Também foi observado pelo professor pesquisador que o principal obstáculo encontrado na construção do conceito de PA de segunda ordem se deu pelo seu desconhecimento quase que total pelos participantes, sendo esse obstáculo superado pelo uso do *software* aliado à visualização gráfica da sequência, sendo essa a principal contribuição encontrada nessa situação de ensino.

Os sujeitos observados não conheciam a teoria de ensino utilizada na experimentação e isso foi importante para validar as hipóteses sobre a TSD, que coloca o sujeito num papel ativo diante das situações de ensino elaboradas. Nesse sentido, notou-se que a utilização da teoria contribuiu na autonomia desses sujeitos proporcionando uma interação e cooperação mútua nas discussões e tentativas de resolução dessas situações.

Na segunda situação, foi possível perceber que a utilização do *software* trouxe uma importante contribuição para a compreensão do problema, pois sem ele não seria possível perceber de imediato alguns equívocos durante a resolução do mesmo, como quando o sujeito participante errou a resposta e obteve um *feedback* de erro.

Aliado a isso, outra contribuição foi a visualização da sequência estudada, que ao ser manipulada, proporcionava aos participantes uma interação de forma intuitiva e clara. Mais uma vez se constatou uma insegurança dos participantes em relação ao uso da tecnologia, quando um deles ao realizar o cálculo no papel conseguiu desenvolver uma linha de raciocínio razoável, porém, deixou-se levar pelo erro do outro e não conseguiu realizar a transposição para o ambiente do *software*. Contudo, após o *feedback*, este compreendeu que seu pensamento estava de acordo com o esperado e acertou a resposta.

Nesse sentido, entendemos que além da visualização gráfica, foi importante a compreensão do conceito o *feedback* de “correto” e “incorreto” durante a resolução do problema. Não obstante, também foram observados alguns obstáculos que dificultaram o entendimento pleno do problema e um deles recai novamente na falta de familiaridade com o tema estudado, mais uma vez revelando a lacuna nesse conteúdo.

Aqui mais uma vez, a TSD foi fundamental para superar o obstáculo da falta de conhecimentos prévios dos sujeitos sobre o tema das situações. Com isso, foi possível verificar que os momentos de interação entre os sujeitos geraram discussões que direcionaram o

raciocínio em direção à solução correta, inclusive na fase de validação, em que se verificou uma característica individual de cada sujeito, embora as discussões tenham ocorrido de forma geral.

Na terceira situação, observamos uma dificuldade maior, talvez devido ao ineditismo do problema, se mostrando um dos maiores obstáculos até o momento. Foi preciso uma orientação do professor-pesquisador. No entanto, após esse momento, foi possível perceber o desenvolvimento das fases da TSD, que ocorreram após intensa discussão e tentativas. Devido a essa característica, consideramos que o objetivo foi alcançado de forma parcial, embora percebamos também que a TSD contribuiu, tendo como suporte a visualização gráfica que serviu de parâmetro nas discussões e orientou em alguns momentos a validação das asserções.

As situações quatro e cinco representaram o ponto alto dessa experimentação, pois embora sejam o assunto mais inédito de todos, tiveram um importante papel e despertaram um interesse muito grande nos sujeitos, que se empenharam em realizar a interpretação gráfica e se envolveram profundamente nas discussões. Consideramos que a TSD atuou em suas fases dialéticas como um guia norteador, pois dado o caráter especial do assunto nesse nível de ensino, que quando se apresenta não traz esse viés, atingiu plenamente o objetivo proposto.

Tais resultados corroboram as hipóteses levantadas e evidenciam a presença das lacunas conteudistas mencionadas no decorrer dessa pesquisa, abrindo um vasto campo de investigação a ser explorado em outras oportunidades. Por tudo isso, consideramos que essa pesquisa obteve sucesso em relação aos seus objetivos.

Reforçamos a importância do GeoGebra como suporte tecnológico, pois sem ele não seria possível realizar com tanta eficiência algumas dessas situações, principalmente no aspecto da dinamicidade. O GeoGebra também atuou como um dos instrumentos de coleta de dados, pois a partir de suas janelas interativas, foi possível coletar informações importantes nas inferências aqui apresentadas. Além disso, também foram utilizados outros meios que tiveram importante papel nessa coleta, como por exemplo, o grupo de mensagens instantâneas criado exclusivamente para a comunicação e realização da experimentação, bem como os computadores, *Datashow* e por fim, os *smartphones* utilizados para as gravações e registros fotográficos.

Algumas dificuldades foram encontradas na realização dessa pesquisa. Uma delas foi encontrar uma intersecção entre os horários de planejamento dos sujeitos, para que os encontros ocorressem com todos os participantes, o que atrasou em alguns dias o início da pesquisa. No entanto, tudo foi solucionado e superamos com um pouco de empatia e um bom diálogo. Outra dificuldade foi em relação à escolha do locus da pesquisa, que inicialmente deveria ocorrer em uma escola regular da SEFOR 3. Porém, esta foi integralizada durante o período em que se

pretendia realizar a implementação do curso, o que inviabilizou a escolha conforme estabelecido. Resolvemos esta dificuldade com uma outra escola nas mesmas condições iniciais e também pertencente à SEFOR 3, na qual foi possível realizar o planejado superando as expectativas iniciais quanto às escolhas dos sujeitos e do lócus.

Finalmente, esperamos que esse estudo possa contribuir com pesquisas futuras que busquem diminuir essa lacuna em relação ao conteúdo de progressões e, em especial, às de ordem superior. Ainda esperamos que os dados aqui apresentados sejam relevantes para outros pesquisadores que resolverem se aventurar no aprofundamento do estudo com as PAG e as PGA sob o viés da visualização gráfica, já que este ainda é um assunto pouco explorado.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S.; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p22>. Acesso em 03 jan. 2023.

ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para a s-Sequência Generalizada de Jacobsthal e a (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal: análises preliminares e a priori. **Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 51, dez 2017.

ALVES, F. R. V. A vertente francesa de Estudos da Didática Profissional: implicações para a atividade do professor de Matemática. **Vidya**, v. 39, n. 1, p. 255-275, jan./jun., 2019.

ALVES, F. R. V. Situação Didática Olímpica (SDO): aplicações da teoria das situações didáticas para o ensino de olimpíadas. **Revista Contexto & Educação**, v. 36, n. 113, p. 116–142, 2021.

ALVES, F. R. V; BORGES NETO, H.; BARRETO, M. C. Uma Aplicação da Sequência Fedathi no Ensino de Progressões Geométricas e a Formação do Professor no IFCE. **Conex. Ci. e Tecnol.** Fortaleza/CE, v. 5, n. 1, p. 9-24, 2011.

ARTIGUE, M. Ingeniería Didáctica. In: Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L.; Gomez, P. **Ingeniería didáctica em Educacion Matemática**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995, cap. 4, p. 33-59.

AZERÊDO, M. A. de; RÊGO, R. G. do; Linguagem e Matemática: A importância dos diferentes registros semióticos. **Revista Temas em Educação**, v. 25, Número Especial, p. 157-172. 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufpb.br/index.php/rteo/article/view/25270>. Acesso em: 10 jan. 2021.

BACICH, L.; MORAN, J. **Metodologias Ativas para uma Educação Inovadora**: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

BARBOSA, A. J. L., ALVES, F. R. V. Avaliação do Laboratório GeoGebra (LABGG) como ferramenta TIC para o ensino de matemática: prática na escola de ensino médio público em Fortaleza. In: SANTOS, Maria José Costa dos; MATOS, Fernanda Cíntia Costa; MAGALHÃES, Elisângela Bezerra(org.). **As dimensões epistemológicas do saber matemático**: ensino e aprendizagem. Curitiba: Editora CRV, 2016. p.81-94.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2006.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP). **Resultados das avaliações externas**. Brasília: MEC, 2019. Disponível em: <http://www.inep.gov.br>. Acesso em: 20 abr. 2021.

BROUSSEAU, G. **Théorie des situations didactiques** (pp. 115-160). Grenoble: La Pensée Sauvage, 1998.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 7, n. 2, p. 16-33, 1986.

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante Matemática. 1º ano: ensino médio**/ Eduardo Chavante. Diego Prestes. (ed). São Paulo: Edições SM. 2016.

CHEVALLARD, Y. Sobre a teoria da transposição didática: algumas considerações introdutórias. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v. 3, n. 2, 2013.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto & Aplicações: ensino médio** / Luiz Roberto Dante. – 3. ed. São Paulo: Ática, 2017.

FONSECA, A. G.; VILELA, D. S. Livros Didáticos e Apostilas: o currículo de matemática e a dualidade do ensino médio. **Bolema**, v. 28, n. 49, p. 557-579, 2014.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática Completa**/ José Ruy Giovanni, José Roberto Bonjorno. – 2. ed. renov. – São Paulo: FTD, 2005.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas. 2008.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas da Pesquisa Social**. 5.ed. São Paulo: Atlas. 1999.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

LIMA, M. L. O. **Situações didáticas olímpicas para o ensino de sequências numéricas**: um contributo da engenharia didática. 2019. 87 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

LIMA, M. L. O.; AZEVEDO, I. F.; ALVES, F. R.V. Situações Didáticas Olímpicas: Uma Proposta De Ensino Amparada Com O Geogebra. **Trilhas Pedagógicas**, v. 10, n. 12, Ago. 2020, p. 342-361

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio** - v. 2. 6. ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio** - v. 1. 6. ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

PAIS, L. C. Didática da Matemática: Uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: **Autêntica**. 2002.

PRODANOV, C. C; FREITAS, E.C. **Metodologia do trabalho científico**: Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

NOBRE, J. F. F. **Progressões Aritméticas**: abordando as ordens superiores. Dissertação (PROFMAT-UFT), Palmas - TO. 2018.

NÓBRIGA, J. C. C. SIPLE, I. Z. Livros dinâmicos de matemática. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 9, n. 2, p. 78-102, 2020.

OLIVEIRA, M. M. **Ensino de funções por meio da videoanálise**: um contributo da engenharia didática. 2019. 135 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

PAIVA, R. E. B. Progressões Aritmético-Geométricas e Geométrico-Aritméticas. **Revista do Professor de Matemática**, v. 73, p. 47-49, 2010.

PASTRÉ, P. A análise do trabalho em didática profissional. Tradução de Olivier Allain e Crislaine Gruber. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 98, n. 250, p. 624-637, set./dez. 2017. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbeped/v98n250/2176-6681-rbeped-98-250-624.pdf>. Acesso em: 04 mar. 2023.

POMMER, W. M. **A Engenharia Didática em sala de aula**: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as equações Diofantinas Lineares, São Paulo, 2013.

POMMER, W. M. Brousseau e a idéia de Situação Didática. SEMA – **Seminários de Ensino de Matemática**/ FEUSP – 2º Semestre, 2008. Coordenação: Prof. Dr. Nilson José Machado. Disponível em: <https://www.nilsonjosemachado.net/sema20080902.pdf>. Acesso em: 20 set. 2021.

QUEIROZ, J. C. S. Livros Didáticos De Matemática Do Ensino Médio: Um Estudo Sobre As Demonstrações. **Revista Sertão Sustentável**. v. 2 n. 1, dez. 2020. Disponível em: <https://sertaosustentavel.com.br/index.php/home/issue/view/3>. Acesso em: 1 set. 2021.

ROQUE, T. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROCHA, R. A. Progressões Geométrico-Aritméticas e Aritmético-Geométricas Generalizadas. **Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática**, v. 7, n. 1, 2019.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. de S. V. **Matemática** - ensino médio - Volume 1 - 1ª série/ Kátia Cristina Stocco Smole, Maria Ignez de Souza Vieira Diniz - 5. ed. - São Paulo: Saraiva, 2005.

SOUZA, J. R. **Novo Olhar Matemática**. 2. ed. São Paulo: FTD. 2013.

SOUZA, J. R.; GARCIA, J. S. R. **#Contato matemática, 1.º ano**. 1.ed. São Paulo: FTD - Coleção #contato matemática. 2016.

SOUZA, R. C.; ALVES, F. R. V.; FONTENELE, F. C. F. Engenharia didática de formação (EDF): uma proposta de situação didática do ENEM com o uso do software GeoGebra para professores de matemática no Brasil. **Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología**, n. 26, p. 90-99, 2020.

APÊNDICE A – TCLE



**INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA**
Ceará

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

A INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DOS GRÁFICOS DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA: UMA PROPOSTA FORMATIVA

Pesquisador: ARNALDO DIAS FERREIRA

Orientador: Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e outra com o pesquisador.

Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com o pesquisador. Se preferir, pode levar este Termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

Justificativa e objetivos:

Esta pesquisa visa identificar os obstáculos epistemológicos existentes no ensino de progressões de segunda ordem no nível médio a partir da análise dos livros didáticos a fim de se elaborar uma sequência didática formativa sobre o ensino de progressões, a partir da sua interpretação geométrica subsidiada pelo GeoGebra e pela Teoria das Situações Didáticas, para se descrever o processo formativo e as principais transformações ocorridas a partir do uso do GeoGebra como ferramenta pedagógica para melhoria da compreensão dos conceitos de progressões.

O trabalho está dividido em sete seções que se subdividem conforme as fases da ED, nas quais serão abordados na fase de Análises Preliminares os conceitos referentes às progressões aritméticas e geométricas, já mencionados anteriormente, bem como uma análise dos Livros didáticos de matemática utilizados por professores do ensino médio, levando-se em conta o conteúdo das sequências numéricas trabalhadas, seguindo-se critérios de análises que permitirão identificar aspectos metodológicos e cognitivos.

Assim, na primeira seção deste trabalho apresenta-se o referencial teórico que serviu de base para a investigação deste tema, bem como amparou as discussões pertinentes para os argumentos que justificam o interesse. Para isso faz-se nesta seção um desenvolvimento de definições sobre as progressões e, além disso, uma análise sobre os aspectos metodológicos presentes nos livros didáticos do ensino médio a partir de quatro categorias levantadas segundo a análise de conteúdo de Bardin (1977): mídias sugeridas, a visualização matemática dos problemas como recursos semióticos sugeridos pelos autores, e a disposição dos conteúdos na distribuição dos capítulos e a abordagem metodológica dos conceitos referentes ao assunto das progressões. Conforme será estabelecido mais adiante na análise dos livros didáticos.

Ainda na primeira seção, aborda-se o tema da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (1988) como teoria de ensino a qual servirá de apoio para a abordagem do assunto na fase de experimentação da Engenharia Didática de Artigue (1995) que será a metodologia de pesquisa empregada neste trabalho.

Na segunda seção, apresenta-se a metodologia de pesquisa que é a Engenharia Didática da vertente francesa da Didática da Matemática, difundida por Artigue. Na terceira seção é realizada a primeira fase da ED que é a Análise Preliminar, na qual se realiza um estudo epistemológico do ensino de progressões e seus principais obstáculos, bem como um apanhado teórico sobre a TSD.

Na quarta seção planeja-se a elaboração do momento formativo a ser aplicado com os sujeitos em um momento posterior, nesse momento serão utilizadas as fases dialéticas da TSD sobre as impressões dos sujeitos e o levantamento de hipóteses acerca do que se espera em relação à interpretação dos gráficos das progressões nas suas quatro fases, que são: ação, formulação, validação e institucionalização. Esta é a fase de Análise a priori da ED.

Na quinta seção, ocorrerá a descrição da formação, referente à fase de experimentação, conforme planejamento anterior, a fim de se registrar o processo de coleta de dados para posterior análise na fase de análise a posteriori e, por fim, será realizado o confronto das hipóteses levantadas com os dados coletados a fim de se verificar ou não as hipóteses.

Nas próximas seções que se seguem serão realizadas as demais etapas da ED e as considerações conforme previsto e que possam ou não serem verificadas durante essa pesquisa. A fim de identificar lacunas de abordagem desses assuntos referentes à interpretação geométrica das progressões aritméticas e geométricas nesse nível de ensino, conforme Meireles e Junqueira (2020) “Conteúdos como Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas são apresentados desvinculados de outros processos, como a generalização de padrões ou relação com funções, que poderiam favorecer o processo cognitivo e articulação com a realidade”.

No intuito de tentar resolver a questão norteadora faz-se necessário elencar-se a seguir os objetivos, geral e os específicos, conforme se verifica.

Objetivo Geral

Analisar as contribuições da Teoria das Situações Didáticas e da Engenharia Didática para o ensino de interpretação geométrica dos gráficos das Progressões Aritméticas e Geométricas de ordem superior, subsidiadas pelo *software* GeoGebra.

Objetivos Específicos

1. Identificar nos livros de matemática do ensino médio, os recursos metodológicos e didáticos usados para o desenvolvimento do ensino das PA e PG;
2. Propor uma sequência didática formativa sobre o ensino de progressões, fundamentada na TSD e ED, subsidiada pelo GeoGebra;
3. Apresentar as contribuições da TSD e ED, subsidiadas pelo GeoGebra para o ensino da PA e PG por meio de uma sequência didática formativa.

Procedimentos:

Participando do estudo você está sendo convidado a: conhecer em um primeiro momento os aspectos teóricos e práticos do GeoGebra. Em um segundo momento, serão apresentadas cinco situações didáticas envolvendo questões a partir do conteúdo de progressão aritmética e geométrica. Serão solicitados, no decorrer desta pesquisa, o preenchimento de formulários com aspectos subjetivos, bem como a gravação de imagens e áudios, porém ressalta-se que todas as informações serão tratadas sob sigilo e não haverá sob nenhuma hipótese divulgação desses dados que possam prejudicar qualquer um dos participantes.

Os momentos formativos ocorrerão em etapas que serão definidas de acordo com a disponibilidade do grupo, podendo ocorrer em horário de planejamento para não interferir no

tempo pedagógico de direito dos alunos, e cada momento formativo terá duração máxima de duas horas, perfazendo um total máximo de 20 horas entre o presencial (ou síncrono) e à distância. Após a coleta e análise dos dados estes serão arquivados para não expor os participantes a riscos de qualquer natureza. Podendo estes dados serem retidos pela instituição por um prazo máximo de cinco anos.

Os momentos formativos ocorrerão preferencialmente nas dependências de uma escola estadual pertencente à SEFOR 3 da Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC), conforme disponibilidade mencionada acima. Ressalta-se que no caso de no período da formação ainda existir restrição de proximidade devido à crise epidemiológica do Covid-19, esses momentos síncronos ocorrerão no modelo online e assim oferecerão risco mínimo no ambiente online e à saúde dos participantes porém, caso contrário, serão tomadas medidas preventivas de distanciamento e procedimentos básicos de higiene com o fornecimento de máscaras descartáveis e álcool em gel para os participantes a fim de se garantir o risco mínimo à saúde, conforme orientação dos órgãos competentes.

Destaca-se também que a coleta de dados, através de gravações de áudio, vídeos e registros fotográficos somente ocorrerão após as devidas autorizações de todos os participantes e que após esses registros, somente serão acessados pelo pesquisador e seu orientador para fins de análises.

Desconfortos e riscos:

Você **não** deve participar deste estudo se não concordar com qualquer das informações aqui mencionadas ou se sentir qualquer desconforto conforme mencionado abaixo. Esclarece-se que os riscos aparentes à integridade física ou psíquica a qualquer participante que se voluntariar, podem ser classificados como de risco mínimo.

Você também não deve participar se em caso de a formação ocorrer presencialmente, no ambiente físico da escola, não se sentir à vontade diante do computador ou por algum motivo se sentir constrangido em manusear o *software* GeoGebra que demanda certa habilidade específica. Mesmo sendo mínimos os riscos nessa pesquisa envolvem:

- 1 – Desconforto em demonstrar falta de habilidade em manusear o *software*.
- 2 – Receio em responder a algum questionamento mesmo que seja específico sobre o objeto de estudo.
- 3 – Medo de ser constrangido em público por expor seus pensamentos e ser considerado errado.
- 4 – Ser considerado incapaz por não saber responder a alguma pergunta, além de medo em ter seus dados violados por uma possível quebra de sigilo e de identificação.
- 5 – Risco de quebra de sigilo *online* devido a possibilidade de a pesquisa acontecer nesse ambiente suscetível a ataques cibernéticos.

Nesse sentido, reforça-se que nesta pesquisa serão considerados tais aspectos e o esforço para garantir a plena liberdade de escolha e autonomia, para participar de forma esclarecida sobre os termos de risco e, que os participantes poderão se negar a fornecer quaisquer informações que julgarem desnecessárias e constrangedoras. É de inteira responsabilidade do pesquisador manter o sigilo e a privacidade dos participantes bem como a preservação da imagem e dos dados coletados dos participantes envolvidos nesta pesquisa.

Benefícios:

Espera-se com essa pesquisa, ampliar o campo de ação docente sobre esse componente curricular, viabilizando assim, melhoria em seus índices de proficiência junto ao IDEB, prestigiando a ambos os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem e instigando pesquisas futuras na perspectiva de inovação educacional através do conhecimento de teorias contemporâneas. Ressalta-se ainda que os benefícios adquiridos por meio de pesquisas dessa natureza refletem diretamente numa mudança de postura em relação às práticas educacionais.

Acompanhamento e assistência:

Durante a pesquisa não haverá qualquer cobrança de valores ou de responsabilidade dos participantes e caso a pesquisa seja interrompida por motivos de força maior não haverá prejuízos a qualquer um dos voluntários. Após o término da pesquisa os participantes não terão qualquer responsabilidade ou ônus proveniente dela.

Sigilo e privacidade:

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome não será citado. Reforça-se que os dados coletados durante a pesquisa serão arquivados e mantidos em posse do pesquisador por até 5 anos e após esse período serão eliminados.

Ressarcimento e indenização:

Você terá direito ao ressarcimento das despesas diretamente decorrentes de sua participação na pesquisa e à indenização pelos danos resultantes desta, nos termos da Lei.

Contato:

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com os pesquisadores Arnaldo Dias Ferreira, Rua 717, Sn 3ª Etapa– Conjunto Ceará, Fortaleza – CE, CEP: 60531-700, ou pelo telefone (85) 98794 - 9374, e-mail: arnaldo.ferreira@prof.ce.gov.br. Ou Francisco Régis Vieira Alves, Av. Treze de Maio, 2081 – Benfica, Fortaleza – CE. 60040 – 531, Coordenação do Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática (PGECEM, sala 141).

Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) do IFCE das 08:00hs às 12:00hs e das 13:00hs às 17:00hs no IFCE Reitoria - R. Jorge Dumar, 1703 - Jardim América, Fortaleza - CE, 60410-426; fone (85) 34012332 e-mail: cep@ifce.edu.br

Consentimento livre e esclarecido:

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar e declaro estar recebendo uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas:

Nome do(a) participante:

Contato _____ telefônico _____ (opcional):

e-mail _____ (opcional):

(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Data: ____/____/____.

Responsabilidade do Pesquisador:

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 466/2012 CNS/MS e 510, de 07 de abril de 2016 e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado e pela CONEP, quando pertinente. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

Nome do(a) pesquisador(a):

[Assinatura do(a) pesquisador(a)]

Data: ____/____/____.

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO DE INICIAL DOS SUJEITOS PARTICIPANTES DA PESQUISA

A INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DOS GRÁFICOS DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA: UMA PROPOSTA FORMATIVA

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Esta pesquisa visa identificar os obstáculos epistemológicos existentes no ensino de progressões de segunda ordem no nível médio. A fim de se elaborar uma sequência didática formativa sobre o ensino de progressões, a partir da sua interpretação geométrica subsidiada pelo GeoGebra e pela Teoria das Situações Didáticas, para se descrever o processo formativo e as principais transformações ocorridas a partir do uso do GeoGebra como ferramenta pedagógica para melhoria da compreensão dos conceitos de progressões. Participando do estudo você está sendo convidado a: conhecer em um primeiro momento os aspectos teóricos e práticos do GeoGebra. Em um segundo momento, serão apresentadas cinco situações didáticas envolvendo questões a partir do conteúdo de progressão aritmética e geométrica. Espera-se com essa pesquisa, ampliar o campo de ação docente sobre esse componente curricular, viabilizando assim, melhoria em seus índices de proficiência junto ao IDEB, prestigiando a ambos os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem e instigando pesquisas futuras na perspectiva de inovação educacional através do conhecimento de teorias contemporâneas. Ressalta-se ainda que os benefícios adquiridos por meio de pesquisas dessa natureza refletem diretamente numa mudança de postura em relação às práticas educacionais. Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos resultados desse estudo, seu nome não será citado. Reforça-se que os dados coletados durante a pesquisa serão arquivados e mantidos em posse do pesquisador por até 5 anos e após esse período serão eliminados.

**Obrigatório*

1 - Você tem interesse em participar como voluntário nessa pesquisa? Caso sua resposta seja sim, prossiga. *

- ☐ Sim
- ☐ Não

2 - Você conhece o *software* GeoGebra? *

☐ Sim

☐ Não

3 - Se sim, já utilizou o *software GeoGebra* em suas aulas presenciais ou remotas? *

☐ Sim

☐ Não

☐ Raramente

4 - Você já utilizou algum recurso educacional digital em suas aulas presenciais? *

☐ Sim

☐ Não

☐ Raramente

5 - Se você respondeu "Sim" ou "Raramente", cite quais são os recursos que costuma utilizar. Caso tenha respondido "Não" escreva um pouco sobre como realiza suas aulas de forma bem geral. *

6 - Qual a sua formação inicial? *

7 - Em qual instituição de nível superior você concluiu a sua formação inicial? *

8 - Qual é o seu nível acadêmico? *

9 - Há quanto tempo você é professor (a)? *

- ☐ Menos de 3 anos
- ☐ Entre 3 e 5 anos
- ☐ Entre 5 e 8 anos
- ☐ Mais de 10 anos

10 - Em quais séries(anos) você atua? *

- ☐ Somente 1ª série do Ensino Médio
- ☐ Somente 2ª Série do Ensino Médio
- ☐ Somente 3ª Série do Ensino Médio
- ☐ Em todo o Ensino médio

11 - Qual(ais) disciplina(s) você leciona nesta unidade escolar? *

12 - Você tem conhecimento sobre a situação do Brasil no Ranking do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) em sua última edição? *

- ☐ Sim
- ☐ Não

13 - Você tem conhecimento sobre a situação da escola em relação ao IDEB? *

- ☐ Sim
- ☐ Não

14 - Você trabalha em mais de uma unidade escolar? *

- ☐ Sim
- ☐ Não

15 - Durante as aulas remotas no período da pandemia, quais recursos pedagógicos digitais você utilizou com seus alunos para auxiliar o seu trabalho e facilitar a compreensão do conteúdo por eles? *

Este conteúdo não foi criado nem aprovado pelo Google.

Google Formulários

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO FINAL

A INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DOS GRÁFICOS DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA: UMA PROPOSTA FORMATIVA

Esse formulário tem a finalidade de avaliar a aplicação da pesquisa e os aspectos metodológicos utilizados, para isso serão observadas as respostas objetivas e subjetivas dos sujeitos, no intuito de coletar dados relevantes e sugestões de melhoria que serão utilizadas para a análise a posteriori. Desde já agradecemos sua participação e colaboração e nos colocamos à disposição para quaisquer esclarecimentos sobre a pesquisa.

*Obrigatório

1 - Você considera que o tema abordado na pesquisa foi interessante para uma possível utilização em sua sala de aula? *

☐ Sim

☐ Não

2 - Você já havia trabalhado esse conteúdo com essa abordagem no *software* GeoGebra? *

☐ Sim

☐ Não

3 - Você considera que a utilização do *software GeoGebra* facilitou o entendimento do conteúdo de progressões de segunda ordem em quais aspectos? *

4 - Você sentiu alguma dificuldade de compreensão do conteúdo abordado em algum momento da pesquisa? *

☐ Sim

☐ Não

☐ Outro:

5 - Quais foram as principais dificuldades que você sentiu ao participar dessa pesquisa? *

6 - Que sugestões você apontaria no intuito de superar essas dificuldades? *

7 - Você pretende utilizar os conhecimentos adquiridos durante a pesquisa em suas turmas do Ensino Médio? Por quê? *

Este conteúdo não foi criado nem aprovado pelo Google.

Google Formulários

ANEXO – A

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: A INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DOS GRÁFICOS DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA: UMA PROPOSTA FORMATIVA

Pesquisador: ARNALDO DIAS FERREIRA

Área Temática:

Versão: 1

CAAE: 53327821.0.0000.5589

Instituição Proponente: INSTITUTO FEDERAL DE EDUCACAO, CIENCIA E TECNOLOGIA DO CEARA

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 5.151.810

Apresentação do Projeto:

Determinados conteúdos matemáticos do ensino médio, têm sido motivo de discussão devido aos baixos índices de aprendizagem, como exemplo, as progressões aritméticas e geométricas demandando a necessidade de busca por novas estratégias de ensino, que proporcionem a aprendizagem desses objetos de conhecimento, esses assuntos têm permeado as pesquisas em educação matemática.

Objetivo da Pesquisa:

Apresentar as contribuições do GeoGebra para o ensino geométrico dos gráficos das Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas de segunda ordem fundamentados na Teoria das Situações Didáticas, Engenharia Didática e observando os aspectos da Teoria dos Registros de Representações Semióticas.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Riscos:

Você não deve participar deste estudo se não concordar com qualquer das informações aqui mencionadas ou se sentir qualquer desconforto conforme mencionado abaixo. Esclarece-se que os riscos aparentes à integridade física ou psíquica a qualquer participante que se voluntariar, podem ser classificados como de risco mínimo. Você também não deve participar se em caso de a formação ocorrer presencialmente, no ambiente físico da escola, não se sentir à vontade diante do computador ou por algum motivo se sentir constrangido em manusear o software GeoGebra que demanda certa habilidade específica. Mesmo sendo mínimos os riscos nessa pesquisa envolvem:

- 1 – Desconforto em demonstrar falta de habilidade em manusear o software.
- 2 – Receio em responder a algum questionamento mesmo que seja específico sobre o objeto de estudo.

- 3 – Medo de ser constrangido em público por expor seus pensamentos e ser considerado errado.
- 4 – Ser considerado incapaz por não saber responder a alguma pergunta, além de medo em ter seus dados violados por uma possível quebra de sigilo e de identificação.
- 5 – Risco de quebra de sigilo online devido à possibilidade de a pesquisa acontecer nesse ambiente suscetível a ataques cibernéticos.

Nesse sentido, reforça-se que nesta pesquisa serão considerados tais aspectos e o esforço para garantir a plena liberdade de escolha e autonomia, para participar de forma esclarecida sobre os termos de risco e, que os participantes poderão se negar a fornecer quaisquer informações que julgarem desnecessárias e constrangedoras. É de inteira responsabilidade do pesquisador manter o sigilo e a privacidade dos participantes bem como a preservação da imagem e dos dados coletados dos participantes envolvidos nesta pesquisa.

Benefícios:

Espera-se com essa pesquisa, ampliar o campo de ação docente sobre esse componente curricular, viabilizando assim, melhoria em seus índices de proficiência junto ao IDEB, prestigiando a ambos os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem e instigando pesquisas futuras na perspectiva de inovação educacional através do conhecimento de teorias contemporâneas. Ressalta-se ainda que os benefícios adquiridos por meio de pesquisas dessa natureza refletem diretamente numa mudança de postura em relação às práticas educacionais.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

A pesquisa traz um conhecimento estimulante para docentes no uso de novas ferramentas para o ensino aprendizagem.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Todos os termos se apresentam minimamente adequados ao bom andamento da pesquisa.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

O projeto não apresenta pendências ou outros que possam de forma decisiva afetar negativamente os membros participantes.

Considerações Finais a critério do CEP:

"Parecer consubstanciado de aprovação disponível na pasta (ou diretório) “Pareceres”.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1843312.pdf	12/11/2021 14:17:31		Aceito
Declaração de concordância	declaracao_de_compromisso_de_apresentacao_dos_resultados.pdf	08/11/2021 17:35:50	ARNALDO DIAS FERREIRA	Aceito
Declaração de Pesquisadores	declaracao_de_garantia_de_regresso_dos_beneficios_da_pesquisa.pdf	08/11/2021 17:33:57	ARNALDO DIAS FERREIRA	Aceito

Cronograma	Cronograma.pdf	08/11/2021 17:31:49	ARNALDO DIAS FERREIRA	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE.pdf	08/11/2021 17:30:23	ARNALDO DIAS FERREIRA	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	TERMO_DE_AUTORIZACAO_E_EXISTENCIA_DE_INFRAESTRUTURA.pdf	08/11/2021 17:27:20	ARNALDO DIAS FERREIRA	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	Projeto_de_Qualificacao_Arnaldo_CEP.docx	22/10/2021 11:45:23	ARNALDO DIAS FERREIRA	Aceito
Orçamento	Orcamento.pdf	22/10/2021 11:25:30	ARNALDO DIAS FERREIRA	Aceito
Folha de Rosto	Folha_de_rostoassinada.pdf	22/10/2021 11:23:00	ARNALDO DIAS FERREIRA	Aceito

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

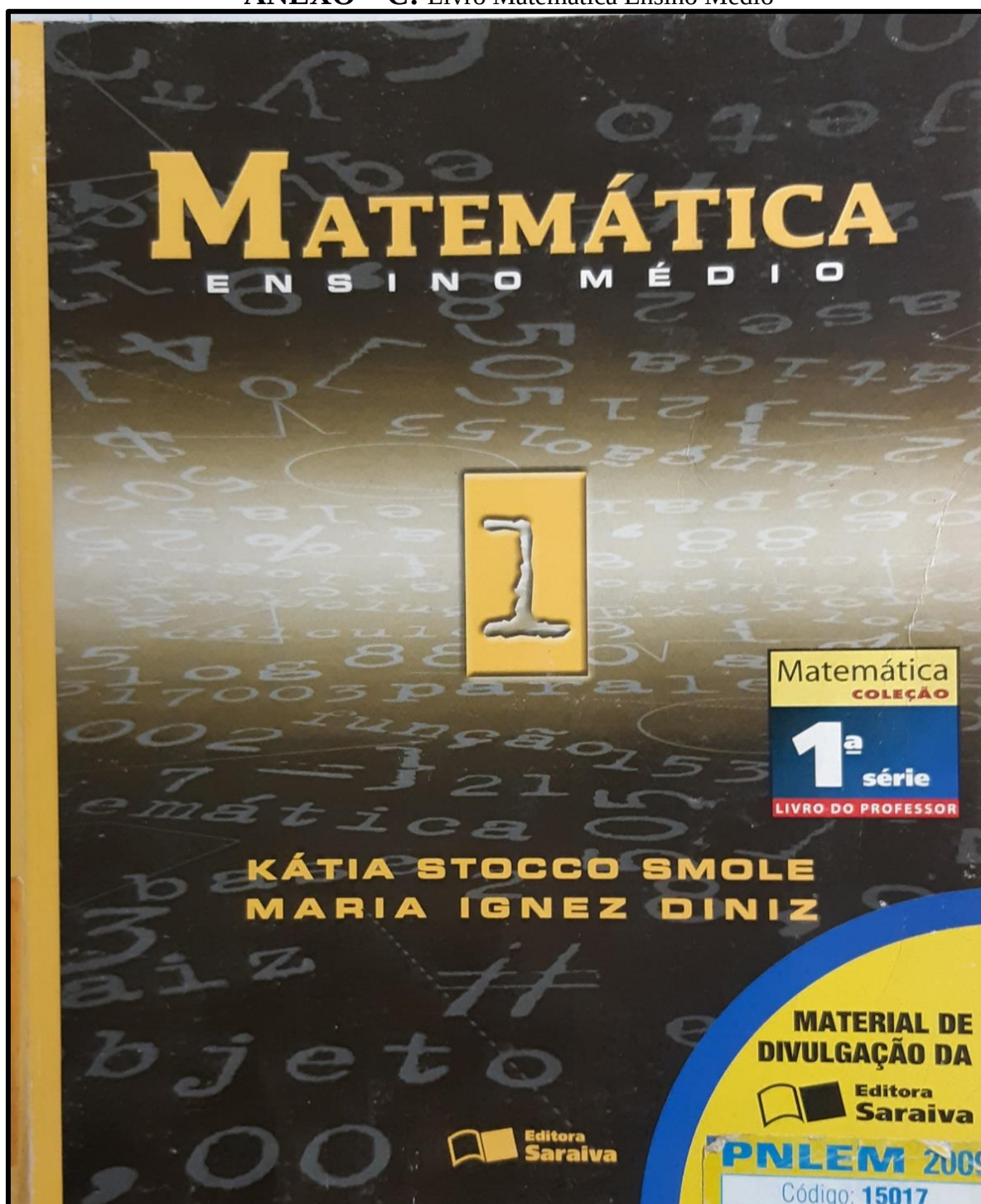
FORTALEZA, 07 de Dezembro de 2021

Assinado por:
Emmanuel Alves Carneiro
(Coordenador(a))

ANEXO – B: Livro Matemática Completa



ANEXO – C: Livro Matemática Ensino Médio



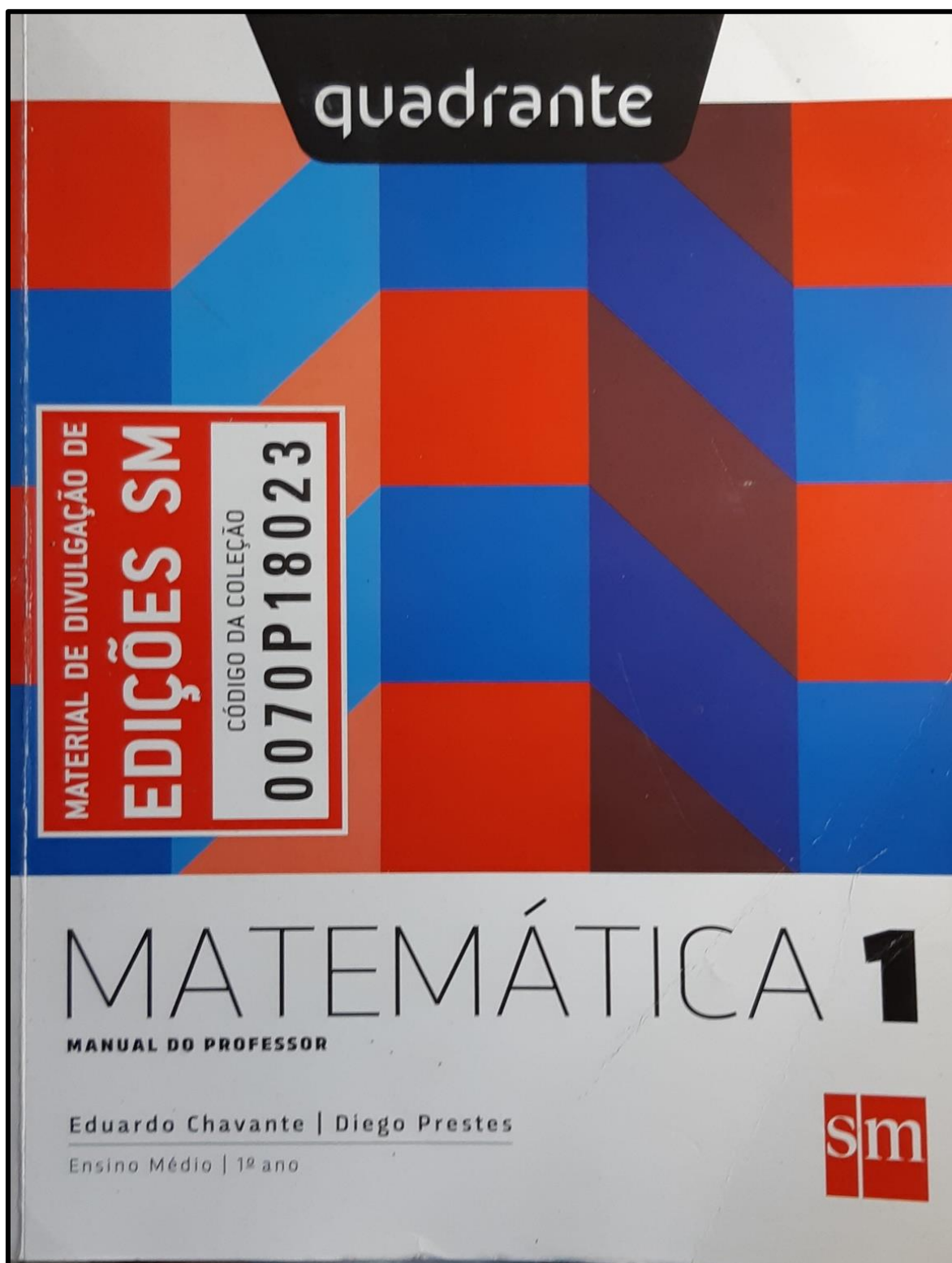
ANEXO – D: Novo Olhar Matemática



ANEXO – E: Livro #Contato Matemática



ANEXO – F: Livro Matemática 1



ANEXO – G: Matemática Contexto & Aplicações

