



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
IFCE *CAMPUS* FORTALEZA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA**

MESTRADO ACADEMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ANA MARIA SILVA GUEDES

**UMA ENGENHARIA DIDÁTICA PARA O ESTUDO DA SEQUÊNCIA
GENERALIZADA DE LUCAS**

FORTALEZA

2020

ANA MARIA SILVA GUEDES

UMA ENGENHARIA DIDÁTICA PARA O ESTUDO DA SEQUÊNCIA
GENERALIZADA DE LUCAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática e pesquisa apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), *Campus* Fortaleza, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre no Ensino de Ciências e Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Coorientador: Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal do Ceará - IFCE
Sistema de Bibliotecas - SIBI
Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- G924e Guedes, Ana Maria Silva.
Uma engenharia didática para o estudo da sequência generalizada de Lucas / Ana Maria Silva
Guedes. - 2020.
103 f. : il. color.
- Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática,
Campus Fortaleza, 2020.
Orientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.
Coorientação: Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira.
1. Engenharia Didática. 2. Teoria das Situações Didáticas. I. Título.

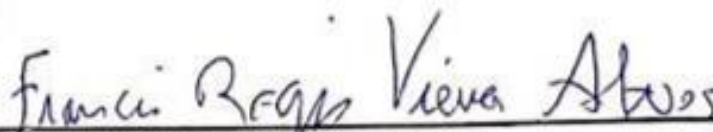
CDD 510.07

ANA MARIA SILVA GUEDES

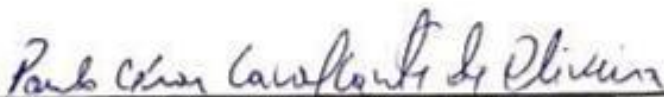
UMA ENGENHARIA DIDÁTICA PARA O ESTUDO DA SEQUÊNCIA
GENERALIZADA DE LUCAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática e pesquisa apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), *Campus* Fortaleza, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre no Ensino de Ciências e Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

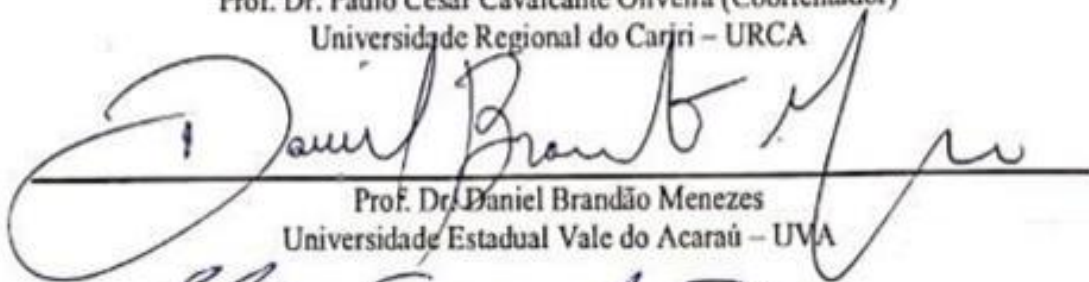
Aprovada em: 17/02/20



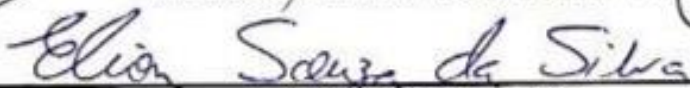
Prof. Dr. Francisco Regis Vieira Alves (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE



Prof. Dr. Paulo César Cavalcante Oliveira (Coorientador)
Universidade Regional do Cariri – URCA



Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes
Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA



Prof. Dr. Elion Souza da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE



Prof. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele
Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA

A Deus.

À minha mãe, Maria Geusa Pereira da Silva,
que sempre me apoiou e cuidou tão bem de
mim.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus pelo dom da vida e à Nossa Senhora por iluminar meus caminhos. Nos momentos mais difíceis, que eu enfrentei nessa caminhada, foram minhas orações que me fortaleceram e me deram forças para continuar. Não foi nada fácil, mas eu consegui finalizar minha pesquisa e obter bons resultados.

À minha mãe, Maria Geusa Pereira da Silva, que sempre me apoiou e me incentivou e que é a razão de tudo que eu faço. Agradeço seus conselhos e ensinamentos. Dedico mais essa conquista em minha vida a essa grande guerreira.

Aos dedicados professores, que proporcionaram uma crescente evolução acadêmica e pessoal. Em especial, ao meu orientador Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves, que tem me ajudado bastante e tem me ajudado a superar as dificuldades que surgiram ao longo desses dois anos.

Ao meu coorientador, Prof. Dr. Paulo César, que nunca hesitou em contribuir com o meu trabalho e me ajudou nos mínimos detalhes.

Ao meus tios, Aiêda e Adjacir, por me criarem como filha e por todo carinho.

Aos meus irmãos, Adnna por ser minha fonte de inspiração, Vladyna, Vladyson por sempre me apoiarem. Aos meus queridos avós, José Maria, que é meu grande admirador e minha querida vizinha, Maria Valderina, que hoje não se encontra aqui entre nós, mas que, com certeza está no céu, muito feliz por mim.

A todos os meus amigos, em especial, Natacha, Dani, Laura, Layane, Karol Thamires, Gabriela, Eduardo, Marcelo, Artur, por contribuírem para meu crescimento pessoal e profissional.

Aos meus amigos de trabalho, que contribuíram muito na minha evolução pessoal e, principalmente, profissional, em especial, ao Elves, que foi quem me deu uma grande oportunidade.

E, por último e não menos importante, ao meu querido namorado Carlos Renato, por ser um grande companheiro, por todo carinho e compreensão nos dias difíceis, por ter cuidado tão bem de mim.

E à minha sogra Eduwirges, que é uma mãe pra mim, ao meu sogro Renato que é um pai e à minha cunhada, Jéssica, por me acolherem tão bem em sua residência.

Todos vocês foram fundamentais nessa caminhada, amo cada um! Esses agradecimentos são uma forma de retribuir tudo que vocês fizeram por mim. Essa conquista é o resultado da confiança de cada um de vocês. MUITO OBRIGADA!

“Não temas, os sacrifícios valerão a pena e todas as noites mal dormidas serão histórias de sua vitória”. (O pequeno mestre)

RESUMO

No Brasil, muitas são as temáticas relativas à História da Matemática, que buscam utilizar o contexto histórico para contribuir no ensino. Um desses temas é a Sequência de Lucas, que trouxe grandes contribuições para a Matemática, incluindo ramos na matemática recreativa, como a construção da torre de Hanói e para conteúdos como a teoria dos números. Nesta pesquisa, objetivamos promover situações didáticas sobre o processo de generalização da Sequência de Lucas, envolvendo a identificação, a descrição e a exploração de propriedade. Para isso, baseamo-nos nas quatro fases da Engenharia Didática, a saber: *análises prévias, análise a priori, experimentação e análise a posteriori* e, por fim, a *validação interna*. E, seguindo o estilo de pesquisa multiteórica originada na França empregaremos a Teoria das Situações Didáticas, que é composta pelas fases de *ação, formulação, validação e institucionalização*. Com isso, conseguimos construir uma definição e propriedades importantes a partir dos autores consultados, como, também, aplicamos sete situações didáticas com os alunos da disciplina de História da Matemática, do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Ceará – IFCE, que possibilitaram o estudo da Sequência Generalizada de Lucas.

Palavras-chave: Sequência de Lucas. Engenharia Didática. Teoria das Situações Didáticas.

ABSTRACT

In Brazil, there are many themes related to the History of Mathematics, which seek to use the historical context to contribute to teaching. One of these themes is the Lucas Sequence, which brought great contributions to Mathematics, including branches in recreational mathematics, such as the construction of the Tower of Hanoi and to contents such as number theory. In this research, we aim to promote didactic situations about the generalization process of the Lucas Sequence, involving the identification, description and exploration of property. For this, we base ourselves on the four phases of Didactic Engineering, namely: previous analyses, a priori analysis, experimentation and a posteriori analysis and, finally, internal validation. And, following the style of multi-theoretical research originated in France, we will employ the Theory of Didactic Situations, which is composed of the action, formulation, validation and institutionalization phases. With this, we were able to build a definition and important properties from the authors consulted, as well as apply seven didactic situations with students of the subject of History of Mathematics, from the Federal Institute of Education, Science and Technology of Ceará - IFCE, which made it possible the study of the Generalized Sequence of Lucas.

Keywords: Lucas sequence. Didactic Engineering. Theory of Didactic Situations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Fases da Engenharia Didática.....	25
Figura 2 –	Triângulo Didático.....	29
Figura 3 –	Fases da Teoria das Situações Didáticas.....	30
Figura 4 –	Édouard Anatole Lucas.....	34
Figura 5 –	Conteúdos relacionados com a Sequência de Lucas.....	35
Figura 6 –	Descrição dos valores de Lucas.....	47
Figura 7 –	Estudante 2 descrevendo o comportamento da Sequência de Lucas (em fase de ação.....)	69
Figura 8 –	Estudante 3 descrevendo o comportamento da Sequência de Lucas (em fase de ação e formulação).....	69
Figura 9 –	Determinação de um termo a partir da relação de recorrência (fase de validação).....	70
Figura 10 –	Determinação de um termo a partir da relação de recorrência (fase de validação).....	70
Figura 11 –	Descrição da relação entre as sequências de Lucas e Fibonacci.....	71
Figura 12 –	Descrição da relação entre as sequências de Lucas e Fibonacci	72
Figura 13 –	Relato sobre seu conhecimento em relação à Sequência de Lucas ...	72
Figura 14 –	Estudante 2, obtenção dos elementos da Sequência de Lucas estendida aos inteiros.....	74
Figura 15 –	E1, obtenção dos elementos da Sequência de Lucas para extensão dos inteiros pela relação $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$	74
Figura 16 –	Momento de ação para encontrar a relação da sequência $(L_{-n})_{n \in \mathbb{Z}}$	75
Figura 17 –	Descrição do comportamento da sequência $(L_{-n})_{n \in \mathbb{Z}}$	76
Figura 18 –	Utilizando a relação entre a SL e a SF para chegar à $L_{-n} = (-1)^n \cdot L_n$..	77
Figura 19 –	Momento de ação e formulação.....	77
Figura 20 –	Momento de validação $L_n = \alpha^n + \beta^n$	79
Figura 21 –	Relações entre α e β	80
Figura 22 –	Utilizando as relações para validar a relação.....	82
Figura 23 –	Validação da representação matricial.....	83

Figura 24 –	Momento de validação das propriedades da Matriz de Lucas.....	84
Figura 25 –	Validação das somas de matriz.....	85
Figura 26 –	Validação da multiplicação matriz.....	85
Figura 27 –	Momento de ação para matriz com $n \in \mathbb{Z}$	86
Figura 28 –	Validação das relações $\alpha^{-n} = (-1)^n \cdot \beta^n$ $\beta^{-n} = (-1)^n \cdot \alpha^n$	87
Figura 29 –	Validação das relações α e β	87
Figura 30 –	Validação da relação de recorrência $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ para $n \in \mathbb{Z}$	88
Figura 31 –	Validação da equação característica dos polinômios de Lucas.....	91
Figura 32 –	Validação da fórmula de Binet para SPL.....	92
Figura 33 –	Validação da SPL estendida com subscrição negativa.....	92
Figura 34 –	Validação dos quatérnios da Sequência de Lucas.....	93

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Elementos da Sequência de Lucas.....	42
Tabela 2	Valores para razão $\frac{L_{n+1}}{L_n}$	44
Tabela 3	Elementos da Sequência de Fibonacci e Sequência de Lucas.....	49
Tabela 4	Elementos da Sequência Polinomial de Lucas.....	52
Tabela 5	Elementos da Sequência Polinomial de Lucas estendida aos inteiros.....	53
Tabela 6	Sequência dos números de k-Lucas.....	55
Tabela 7	Categorização dos momentos de resolução das situações didáticas.....	95

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DM	Didática da Matemática
ED	Engenharia Didática
TSD	Teoria das Situações Didáticas
SL	Sequência de Lucas
SPL	Sequência Polinomial de Lucas
SF	Sequência de Fibonacci
HM	História da Matemática
OEIS	On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
		
2	ENGENHARIA DIDÁTICA E TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS.....	22
2.1	Engenharia Didática	23
2.1.1	Análises Prévias	25
2.1.2	Concepção e análise a priori	26
2.1.3	Experimentação	27
2.1.4	Análise a posteriori e validação	28
2.2	Teoria das Situações Didáticas	29
2.2.1	Ação	31
2.2.2	Formulação	31
2.2.3	Validação	32
		
2.2.4	Institucionalização	33
		
3	SOBRE O ESTUDO DO PROCESSO DOS MODELOS DE GENERALIZAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE LUCAS	34
3.1	Sequências	35
3.2	Indução matemática	37
3.2.1	Indução Forte.....	38
3.3	Recorrência.....	39
3.3.1	Recorrência de Primeira Ordem.....	39
3.3.2	Recorrência de Segunda Ordem.....	39
3.4	Função geradora da Sequência de Lucas	40
3.5	Binet para Sequência de Lucas	48
3.6	Relação entre a Sequência de Lucas e Sequência de Fibonacci	49
3.7	Polinômio de Lucas	52
3.8	Número k-Lucas	54
3.9	Matriz de Lucas	57
3.10	Quatérnios de Lucas	62

4	UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO DO MODELO GENERALIZADO DE LUCAS EM UM CURSO DE LICENCIATURA	67
4.1	Aplicação das Situações Didáticas	67
4.1.1	Construção e Descrição da primeira Situação Didática	68
4.1.2	<i>Construção e Descrição da segunda Situação Didática</i>	73
4.1.3	<i>Construção e Descrição da terceira Situação Didática</i>	78
4.1.4	<i>Construção e Descrição da quarta Situação Didática</i>	83
4.1.5	<i>Construção e Descrição da quinta Situação Didática</i>	84
4.1.6	<i>Construção e Descrição da sexta Situação Didática</i>	86
4.1.7	<i>Construção e Descrição da sétima Situação Didática</i>	93
5	ANÁLISE DE DADOS	95
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	99
	REFERÊNCIAS	101

1 INTRODUÇÃO

Com o potencial de apresentar o processo de desenvolvimento e conservação dos conteúdos, a História da Matemática está cada vez mais evidente nas discussões do atual cenário da Educação Matemática no Brasil. No entanto, ainda, percebemos algumas dificuldades para trabalhar História da Matemática em sala de aula, seja como metodologia ou como componente curricular.

A grande preocupação dos professores é de qual método utilizar e como o aluno vai assimilar os conhecimentos, pois, assim como as outras disciplinas, a Matemática requisita que o professor tenha um grande conhecimento sobre a mesma e requer, também, na mesma proporção, a atenção dos alunos.

Dessa forma, quanto mais experiência o professor tiver e levar para a sala de aula, melhor. A necessidade de transpor o conhecimento científico, para a realidade da escola e dos alunos, proporciona, aos discentes, uma aproximação com o conhecimento e essa visão de transposição, de conduzir suas aulas e associá-la com outras disciplinas, pertence à Didática, isto é, uma relação entre o ensino e a aprendizagem.

Neste sentido, vale destacar que a Didática da Matemática contempla as pesquisas que investigam sobre a existência e o surgimento de obstáculos presentes na construção epistemológica de conceitos matemáticos em situação de ensino.

Um dos grandes problemas enfrentados nas escolas é a falta de atenção dos alunos, acarretando um desgaste para os professores, ocasionando, assim, que os mesmos busquem e adicionem à sua prática alternativas para tornar suas aulas mais atrativas, chamando, dessa forma, a atenção dos alunos.

Portanto, a História da Matemática proporciona aos alunos respostas às indagações pertinentes deles, como, por exemplo, para que serve uma fórmula? Quem a criou? Qual a importância de estudar esse conteúdo? Dessa forma, podemos perceber que, ao responder esses e muitos outros questionamentos, a História da Matemática possibilita compreender a própria Matemática. Nesse contexto, Alves (2016, p. 62) preconiza que

O uso da História da Matemática - HM pode representar importante instrumento de uso didático e metodológico em sala de aula. Sua exploração adequada no ensino de Matemática pode instigar a curiosidade do estudante, na medida em que este

compreende a evolução/sistematização do pensamento e das ideias matemáticas desde sua gênese, até um patamar de maior complexidade, abstração e consistência formal. Com efeito, sublinhamos que as ideias matemáticas sempre nos remetem a conceitos e, que, determinados conceitos matemáticos, podem surgir antes ou depois do estabelecimento de uma definição formal, nomenclatura ou simbologia, que servem, entre outras coisas, para designar, distinguir e, mormente caracterizar um novo objeto conceitual.

Nessa perspectiva, vale ressaltar a importância da disciplina de História da Matemática para a formação inicial do professor de Matemática. Logo, destacamos essa notoriedade da referida disciplina com o pensamento de Guedes (2017), em seu trabalho de conclusão de curso, na graduação em Licenciatura em Matemática, intitulado “Visão panorâmica da disciplina de História da Matemática no atual movimento da educação matemática no Ceará”, em que ela apresenta um panorama de como está a situação dessa disciplina em seis¹ instituições cearenses, assim, a autora conclui:

A disciplina de História da Matemática seja ela voltada para sala de aula ou para o currículo configura-se como instrumento de pesquisa. Pois ela possibilita compreender o processo de desenvolvimento e conservação da Matemática, além de intervir de forma direta na construção e na evolução de conceitos (GUEDES, 2017, p. 46).

À vista disso, percebe-se que muitas são as temáticas relativas à História da Matemática, que buscam utilizar o contexto histórico para contribuir no ensino. Um desses temas é a Sequência de Lucas, o qual recebe esse nome em homenagem ao matemático francês Edouard Anatole Lucas, que trouxe grandes contribuições para a Matemática, incluindo ramos na matemática recreativa, como a construção da torre de Hanói e os anéis chineses e, também, teve contribuição com a teoria dos números. Desse modo, esse assunto é uma fração da história da Matemática que vamos expor, apresentando sua origem, desenvolvimento, contribuições e relação com outros conteúdos.

Vale ressaltar que, no Brasil, nas pesquisas realizadas é mais comum encontrar referências sobre a sequência de Fibonacci, mas, pelo fato de existirem relações e propriedades comuns a esses tópicos, em algumas investigações, encontramos notas ou seções que fazem alusão à Sequência de Lucas e suas características.

Sendo assim, temos como base alguns trabalhos que contribuem para o desenvolvimento de nossa pesquisa. Destacamos a plataforma *The Fibonacci Quartely*, em que encontramos

¹ As seis instituições foram: Universidade Estadual do Ceará (UECE), Universidade Federal do Ceará (UFC), Universidade Estadual do Vale do Acaraú (UVA), Universidade da Integração Internacional da Lusofonia AfroBrasileira (UNILAB), Universidade Regional do Cariri (URCA), Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE).

desde livros e artigos antigos, como, por exemplo, livros falando dos números de Fibonacci e números de Lucas, até os anais da décima oitava Conferência Internacional sobre Números de Fibonacci e suas aplicações, que ocorreu de 1º a 7 de julho de 2018, na Universidade de Dalhousie Halifax, Nova Escócia, Canadá. O objetivo da conferência foi reunir estudiosos de todos os ramos da Matemática e da ciência com interesse em sequências de recorrência, suas aplicações e generalizações e outras sequências numéricas especiais, ou seja, temos muitos materiais internacionais que contribuíram para o desenvolvimento desta pesquisa.

Quanto aos trabalhos nacionais, temos o trabalho de Astroline (2017), intitulado “Número de Fibonacci e Número de Lucas”, em que traz um relato sobre a vida de cada matemático que contribuiu para o desenvolvimento dessas duas sequências, bem como as propriedades de cada uma e sempre relacionando uma com a outra.

Também, encontramos outra dissertação, cujo título é “Engenharia Didática sobre o estudo e ensino da fórmula de Binet como modelo de generalização e extensão da Sequência de Fibonacci”, em que o foco principal é a Sequência Fibonacci, do autor Santos (2017). Ele descreve um pouco a Sequência de Lucas no quarto capítulo de sua dissertação.

O trabalho de Oliveira (2018), intitulado “Engenharia Didática sobre o modelo de complexificação da sequência generalizada de Fibonacci: relações recorrentes n-dimensionais e representações polinomiais e matriciais” fala sobre a Sequência de Fibonacci e faz algumas relações com a Sequência de Lucas. Da mesma forma, temos alguns artigos que serão expostos ao longo do trabalho.

Desse modo, apresentaremos um percurso que oferece elementos que caracterizam a sistematização e generalização da Sequência de Lucas. Com esse intuito, descreveremos, em seções posteriores, o modelo da SL, a partir de sua relação de recorrência, fórmula de Binet, que permite a descrição de muitas propriedades.

À vista disso, essa pesquisa tem como pergunta norteadora: como desenvolver um estudo sobre o processo de generalização da Sequência de Lucas, que promova situações didáticas envolvendo a identificação, a descrição e a exploração de propriedades do seu modelo generalizado e seus aspectos evolutivos? Por conseguinte, com o intuito de solucionar esse questionamento, o objetivo geral é: desenvolver elementos de um estudo relativo aos modelos de generalização da Sequência de Lucas, que promovam situações didáticas que levem à identificação, descrição e exploração de suas propriedades.

Consequentemente, nessa perspectiva, para atingir nosso objetivo geral, nosso caminho será seguido diante dos seguintes objetivos específicos:

- Analisar o desenvolvimento matemático dos modelos de generalização da Sequência de Lucas;
- Descrever situações didáticas envolvendo o modelo de generalização da Sequência de Lucas, desconsiderados pelos autores de livros de HM.
- Aplicar uma metodologia de ensino na organização de atividades do modelo de generalização da Sequência de Lucas, voltadas à sala de aula, tendo em vista o estabelecimento ou formulação de definições.

Dessa forma, justificamos a importância do estudo da Sequência Generalizada de Lucas pelo fato de que a Matemática, ainda hoje, é um dos principais percalços educacionais e analisar uma metodologia que possa facilitar o ensino e a aprendizagem dos alunos é algo de forte impacto para a Educação. Então, estudar a Sequência de Lucas nos dá a coragem e a motivação de pesquisar e trabalhar a Matemática de forma ampla, consistente e envolvendo vários conteúdos para contribuir e enaltecer a educação brasileira.

No que diz respeito aos procedimentos metodológicos, adotamos a Engenharia Didática para desenvolver e organizar esta pesquisa, que, segundo Artigue (1995), esse método tem quatro fases, a saber: análises preliminares, que é a fase inicial, em que foi feita a análise epistemológica dos conteúdos planejados no ensino; análise *a priori*, que é o momento de confeccionar situações didáticas e atividades; experimentação, essa fase é o momento de pôr em prática tudo que foi abordado nas fases anteriores e, como última fase, temos a análise *a posteriori*, que é o momento de analisar o que foi feito na experimentação e comparar com o cenário inicial.

Temos, ainda, a Teoria das Situações Didáticas, que, de acordo com Brousseau (2007), organiza a aplicação das atividades, constituída pelas situações de: ação, quando na prática do aluno, ele se relaciona com o *milieu* (ambiente, meio) para resolver um determinado problema proposto; formulação, momento de escolhas e tentativas de uma linguagem comum para a interação entre os alunos e para organizar as ideias; validação, fase de convencimento, utilizando uma linguagem mais formal para provar o que foi feito; institucionalização, nessa fase, o professor retoma a situação proposta, com a intencionalidade de identificar, sistematizar e reconhecer o saber construído por meio da sua formalização e generalização.

Inicialmente, fizemos uma revisão bibliográfica sobre a Sequência Generalizada de Lucas, destacando os autores: Hoggat e Bicknell (1973), Horadam (1993), Koshy (2001), Bicknell (2013), sobre a ED, TSD e no contexto da Educação Matemática. Nesse contexto, destacam-se os autores: Brousseau (1976; 2008), Artigue (1995), Pais (2002), Almouloud (2007), Almouloud & Silva (2012), Almouloud (2016), Alves (2016a) e Silva e Almouloud

(2018), que investigam as situações de ensino, orientando-se pela vertente francesa da DM, em uma abordagem teórica e metodológica.

Posteriormente, escolhemos o local de aplicação e as pessoas envolvidas, dessa forma, aprofundamo-nos no estudo sobre a matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), também, analisamos a ementa da disciplina de História da Matemática, que é obrigatória na formação inicial de professor e abrange os conteúdos necessários para a aplicação da pesquisa sobre a Sequência Generalizada de Lucas.

Assim, o público escolhido para participar da pesquisa foram os alunos matriculados na disciplina de História da Matemática, do semestre 2018.2, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE).

Após a escolha do público, elaboramos as hipóteses e, em seguida, as atividades didáticas, com o intuito de verificar como está o ensino envolvendo o modelo de generalização da Sequência de Lucas. Subsequentemente, as situações didáticas foram aplicadas e realizamos as análises dos dados coletados com a aplicação das atividades. A seguir, descrevemos a divisão dos capítulos que compõem este trabalho.

No capítulo dois, realizamos a caracterização da Engenharia Didática, que foi a metodologia que nos orientou para organizar as etapas da pesquisa e da Teoria das Situações Didáticas, como referenciais teóricos e metodológicos. Atentamo-nos em descrever cada metodologia e suas etapas.

Dissertamos, no capítulo três, sobre as análises prévias da pesquisa, tendo como fundamento o levantamento bibliográfico, que nos permitiu as análises didática e epistemológica necessárias à identificação e à descrição do modelo de generalização da Sequência de Lucas e outros contextos matemáticos. Além disso, apresentamos um pouco sobre a vida e as contribuições do matemático francês Edouard Anatole Lucas, que estudou a sequência, como também outros conteúdos matemáticos.

Apresentamos, no capítulo quatro, as concepções e a descrição das situações, mostrando, minuciosamente, a segunda etapa da pesquisa, que, de acordo com a ED, é a concepção e a análise *a priori*, que nos permitiu, a partir das propriedades discutidas nos capítulos anteriores, elaborar sequências de atividades, com a finalidade de responder às questões e validar as hipóteses. No quarto capítulo, apresentamos a fase de experimentação e validação para cada situação didática aplicada, descrevendo as atividades e suas contribuições para a pesquisa.

Por fim, apresentamos nossas considerações finais, expondo os resultados obtidos a partir do objetivo geral e dos três objetivos específicos. Na próxima seção, dissertamos sobre a metodologia em que nos baseamos para organizar esta pesquisa: a Engenharia Didática e, também, sobre a teoria de ensino que nos possibilitou aplicar as atividades didáticas para enriquecer nossa coleta de dados, que foi a Teoria das Situações Didáticas.

2 ENGENHARIA DIDÁTICA E TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Para que a pesquisa seja bem fundamentada, selecionamos alguns autores que serão de suma importância para o desenvolvimento deste estudo, desde a parte metodológica, em que utilizaremos a Engenharia Didática de Artigue (1995) e a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2007), como também os matemáticos que contribuíram para a expansão da Sequência Generalizada de Lucas.

Brousseau (2007) foi um dos pioneiros da Didática da Matemática, de acordo com ele, existe uma relação incluindo professor, saber e aluno, à qual ele próprio denomina de triângulo didático e utiliza para modelar a Teoria das Situações Didáticas. Antes de nos aprofundar na metodologia utilizada neste trabalho, vamos elucidar um pouco sobre a metodologia e o percurso trilhado até o seu surgimento, assim sendo, vamos iniciar com a Didática das Ciências e, em seguida, apresentaremos a Didática da Matemática.

Inicialmente, articulava-se sobre Didática das Ciências, no entanto, nas primeiras décadas do século XX, surgiram estudos fundamentados nas didáticas específicas, após muitos estudos, foram afunilando os caminhos desses conhecimentos. Mas o que seria essa Didática das Ciências? D' Amore (2007, p. 60) aponta algumas características da DC, tais como: “certo tipo de discussão acerca de questões de pedagogia, que se referem à aprendizagem, ao ensino, específicas da formação dos professores; atitudes teóricas e práticas concernentes ao *trabalho do professor*”.

Dessa forma, a partir do trecho anterior, temos a DC como um estudo dos aspectos gerais da formação inicial dos professores e sobre o ensino e a aprendizagem nas escolas. Por isso, foi de suma importância ter uma didática específica para cada disciplina, por exemplo, a Matemática precisa de uma didática específica para trabalhar os objetos matemáticos e suas particularidades, bem como as outras disciplinas, também, sentem essa necessidade. Assim, surgiu a Didática da Matemática. Agora, teremos uma visão histórica do surgimento da DM, segundo Alves (2017, p.298),

como consequência de um exercício sistemático de reflexão sobre a práxis do professor e, por que não falar sobre a práxis do estudante de Matemática, apreciamos uma propugnação de teorias, cujo nascedouro foi consequência de um olhar e análise pormenorizada dos elementos envolvidos na interação professor-estudante-conhecimento matemático. Ademais, o interesse crescente pelos processos de transmissão, modificação e veiculação de saberes matemáticos culminou pela demarcação científica de uma vertente de pesquisa, com características próprias e capazes de elevar, em um intervalo de

duas décadas, o alcance do status na França de área de investigação que, paulatinamente, recebeu o nome de Didática da Matemática-DM.

O fragmento exposto apresenta o processo e as causas da institucionalização da Didática da Matemática. Doravante, apresentamos alguns autores que argumentam sobre a DM e que contribuíram para responder a alguns questionamentos, tais como: o que é a DM? E o que é prática didática? Para responder a essas indagações, recorremos a D'Amore (2007, p. 183), em resposta à primeira pergunta, temos:

A didática da matemática (que nós consideramos como um aspecto da educação matemática mais geral) é a arte de conceber e conduzir condições que podem determinar a aprendizagem de um conhecimento matemático por parte de um sujeito (que pode ser qualquer organismo envolvido nessa atividade: uma pessoa, uma instituição, um sistema, até mesmo um animal).

O pensamento, exposto acima, apresenta uma definição para DM e os sujeitos envolvidos. Em resposta à segunda pergunta, mostramos que, conforme D'Amore (2007, p. 183), “práticas didáticas são elas próprias “condições” e, portanto, por sua vez, objeto de estudo. A didática apresenta-se então como o estudo de tais condições, na forma de projetos e de realizações efetivas.”

Dessa forma, conclui Almouloud (2007), que as características fundamentais da DM, que é o processo de aprendizagem mediante situações didáticas, resultam no comportamento dos alunos. A seguir, dissertaremos sobre a Engenharia Didática e suas características.

2.1 A Engenharia Didática

A Engenharia Didática, como metodologia de pesquisa no ensino da Matemática, surgiu na França, na década de 1980. Artigue foi umas das autoras que contribuiu para a existência tanto do método, como também para a teoria da ED.

Segundo Artigue (1995), a Engenharia Didática tem sua característica principal, que é organizar a sistematização de uma pesquisa comparada com o trabalho de um engenheiro, que, para efetivar um projeto, apoia-se em conhecimentos científicos da área. Dessa forma, a ED tem a possibilidade de unir a teoria com a prática em investigação didática na sala de aula. Além disso, como destaca Almouloud (2007, p. 171),

A engenharia didática, vista como metodologia de pesquisa, é caracterizada, em primeiro lugar por um esquema experimental com base em observações e

análises de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelos registros em que se situa e pelos modos de validação que lhe são associados: a comparação entre a análise *a priori* e análise *a posteriori*.

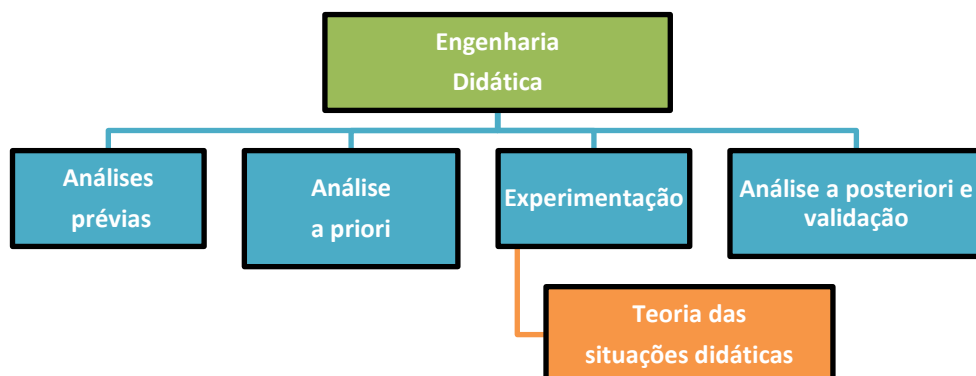
Ademais, Alves (2016b, p. 70) descreve que a ED apresenta dois níveis de pesquisa: a *microengenharia*, que “traz uma visão mais restrita na medida em que se interessa pelas relações e fenômenos ocorrentes em sala de aula” e a *macroengenharia*, que está relacionada “com dificuldades de ordem metodológica e /ou institucionais.”

Artigue (1996), ainda, relata as características dos registros dos estudos realizados, que se situam pelo modo de validação da pesquisa, que pode ser validação interna, “que não emprega métodos e /ou modelos estatísticos comparativos” (ALVES, 2016b, p. 70) e validação externa, em que é “realizada uma comparação entre as produções inicial e final dos estudantes, a fim de avaliar o desempenho dos alunos durante a realização didática. Isso pode ser feito por meio da aplicação e análise de entrevistas e/ou questionários” (OLIVEIRA, 2018, p. 36).

A Engenharia Didática é uma metodologia que possibilita estruturar o trabalho em quatro fases. A primeira, para a determinação do problema, em que devemos escolher a temática e elaborar revisão bibliográfica sobre o problema da pesquisa. A segunda consiste em organizar a pesquisa, para que seja possível construir os instrumentos necessários para a coleta de dados. A terceira é o momento de aplicação, ou seja, coletar os dados e a quarta e última, redação do texto, para explicar o que foi observado.

Assim sendo, de acordo com Pommer (2013, p.7), “nessa perspectiva, a Engenharia Didática possui dupla função: pode ser utilizada como metodologia qualitativa de pesquisa na área de Matemática, mas também é extremamente útil para a elaboração de situações didáticas que configurem um quadro de aprendizagem significativa em sala de aula”. A seguir, na figura 1, apresentaremos a organização dessas fases.

Figura 1 - Fases da Engenharia Didática



Fonte: elaborada pela autora.

Portanto, como foi exposto na figura 1, anteriormente, esse será o modelo adotado na presente pesquisa, uma *microengenharia*, que busca desenvolver uma ED no ensino de História da Matemática, referente ao conteúdo da Sequência de Lucas e que apresenta um método de validação interna. Para o momento de experimentação, utilizaremos a Teoria das Situações Didáticas – TSD. Dessa maneira, as atividades foram desenvolvidas em sala de aula, de acordo com as quatro fases de ensino previstas, como ação, formulação, validação e institucionalização. A seguir, detalharemos cada uma das fases que compõem a ED e como cada uma foi utilizada na presente pesquisa.

2.1.1 Análises prévias

As Análises Prévias, que também são denominadas de análise preliminar, são a primeira fase da Engenharia Didática, que comporta as seguintes vertentes: estudo da organização matemática e análise da organização didática do objeto matemático escolhido, “um dos objetivos das análises prévias é identificar os problemas de ensino e aprendizagem do objeto de estudo e delinear de modo fundamentado a(s) questão (ões), as hipóteses, os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa” (ALMOULOU, 2007, p. 172).

Do mesmo modo, é interessante descrever, nesse momento da pesquisa, as dimensões epistemológica, cognitiva e didática do assunto estudado e que contribuem com a maneira de ensinar. Para Almouloud e Coutinho (2008, p. 05)

A primeira fase é aquela na qual se realizam as análises preliminares, que pode comportar as seguintes vertentes: epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino; do ensino usual e seus efeitos; das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução; das condições e fatores de que depende a construção didática efetiva; a consideração dos objetivos específicos da pesquisa; o estudo da transposição didática do saber considerando o sistema educativo no qual insere-se o trabalho.

Deste modo, destacamos que um dos pontos, dessa fase, “[...] reside na fina análise prévia das concepções dos alunos, das dificuldades e dos erros tenazes, e a engenharia é concebida para provocar, de forma controlada, a evolução das concepções” (ARTIGUE, 1996, p. 202). Vale ressaltar que o fato dessa ser a primeira fase não implica que a mesma não se manifeste no decorrer da pesquisa. A seguir, apresentaremos a segunda fase que compõe a Engenharia Didática, análises *a priori*.

2.1.2 Análise *a priori*

Concepções e análise *a priori* são parte descritiva e parte preditiva. É preciso descrever as escolhas efetuadas, definindo variáveis de comando, no âmbito global e no âmbito local, descrevendo cada atividade proposta. Dessa forma, sobre essa fase, Pommer (2013, p.21) afirma:

Esta metodologia permite antecipar, na análise *a priori*, o que é possível de ocorrer na aprendizagem, pela escolha conveniente das variáveis didáticas, o que orienta a evolução das estratégias que o aluno pode desenvolver. As hipóteses assumidas podem ser validadas na análise *a posteriori*, pela confrontação dos objetivos propostos com as manifestações dos alunos.

Essa fase é caracterizada como o momento de elaborarmos e analisarmos sequências didáticas, com a finalidade de validar nossas hipóteses. Logo, vamos expor o objetivo da análise *a priori*, que, segundo Almouloud e Coutinho (2008, p. 67):

O objetivo de uma *análise a priori* é determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos assumir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido. Dessa forma, em uma análise *a priori* devemos:

- Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação didática desenvolvida.
- Analisar a importância dessa situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem;
- Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

Assim sendo, como descreve os autores na descrição anterior, destacamos que nossa variável é o ensino da Sequência de Lucas, e por meio de sequências didáticas, os alunos foram adquirindo conhecimentos necessários para o desenvolvimento das atividades propostas. Nessa fase da pesquisa, elaboramos as questões que foram aplicadas nas situações didáticas no momento de experimentação para a coleta de dados. A seguir, descreveremos sobre esse momento da pesquisa, que é a terceira fase da Engenharia Didática.

2.1.3 Experimentação

Para explicar essa fase utilizaremos o estudo de (Artigue 1995, p. 56)

Essa fase que é a prática, é seguida por outra, chamada de análise *a posteriori*, que se baseia em todos os dados coletados durante o experimento: observações feitas nas sessões de ensino, mas também produções dos alunos em aula. Esses dados são, muitas vezes, complementados por dados obtidos através do uso de metodologias externas: questionários, entrevistas individuais ou pequenos grupos, realizados no final do processo de ensino ou perto dele.

Desse modo, a experimentação pressupõe: “a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa; a população de aluno que participará da experimentação; a aplicação do instrumento de pesquisa; o registro das observações feitas durante a experimentação” (MACHADO, 2002, p. 206).

É, nesse momento, que temos como suporte a Teoria das Situações Didáticas, composta por quatro fases, a saber: ação, formulação, validação e institucionalização, para organizar o momento de experimentação e coleta de dados. Nesse sentido, Almouloud (2007, p. 178) defende que, na experimentação, é importante:

Organizar e analisar as produções dos alunos, levando em consideração as atividades propostas e as informações coletadas no decorrer da experimentação. Essa análise deve ser feita considerando as diferentes interações dos alunos (aluno-situação, aluno-aluno, aluno-professor) com o *Milieu* (meio) didático e didático.

Em vista disso, o experimento da pesquisa, que ora apresentamos, foi aplicado a uma turma do 4º semestre do curso de Licenciatura em Matemática, no ano de 2018, no Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Estado do Ceará- IFCE. As atividades desenvolvidas ocorreram durante as aulas da disciplina de História da Matemática. Os instrumentos de coleta de dados foram as produções escritas em sala de aula e registros de áudios e imagens no decorrer da aplicação das situações didáticas. A seguir, descreveremos as análises *a posteriori* e validação, a quarta fase da Engenharia Didática.

2.1.4 Análise *a posteriori* e validação interna

A quarta fase de aplicação da ED, de acordo com Artigue (1996), é o momento de analisar os dados coletados na experimentação por meio dos registros escritos e sonoros. Esse momento consiste na análise *a posteriori* e validação interna, é a fase de confronto das duas análises, ou seja, são comparadas as hipóteses feitas inicialmente com o resultado final obtido com a aplicação da pesquisa. Assim, a análise *a posteriori*, conforme Pommer (2013, p.26), é caracterizada:

[...] pelo tratamento dos dados colhidos e a confrontação com a análise *a priori*, permitindo a interpretação dos resultados e em que condições as questões levantadas foram respondidas. Assim, é possível analisar se ocorrem e quais são as contribuições para superação do problema caracterizando a generalização local que permitirá a validação interna do objetivo da pesquisa.

Dessa maneira, a análise *a posteriori* consiste em analisar os dados coletados na experimentação e, para esse momento, temos, também, a validação do estudo. Para esta pesquisa, utilizamos a validação interna, cujos dados dos alunos envolvidos nas situações didáticas foram analisados através dos registros escritos e sonoros. Desse modo, destacando as contribuições de utilizar essa metodologia para o desenvolvimento deste estudo, assim como afirma Pommer (2013, p.21):

A Engenharia Didática se enquadra na perspectiva da pesquisa qualitativa, que inicialmente teve como finalidade estudar problemas relativos à aprendizagem de conhecimentos específicos da Matemática: diagnóstico de concepções, dificuldades e obstáculos, compreender os níveis de desenvolvimento das estratégias dos alunos, a aprendizagem, introdução e construção de conhecimentos específicos, a formação de professores, explicitar a relação entre temas da matemática e outras áreas de conhecimento, dentre outras.

Nesse sentido, apresentamos as fases da Engenharia Didática e como foi aplicada na pesquisa que ora apresentamos. A seguir, apresentaremos a teoria que contribuiu para a execução do experimento deste estudo, a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau.

2.2 Teoria das Situações Didáticas

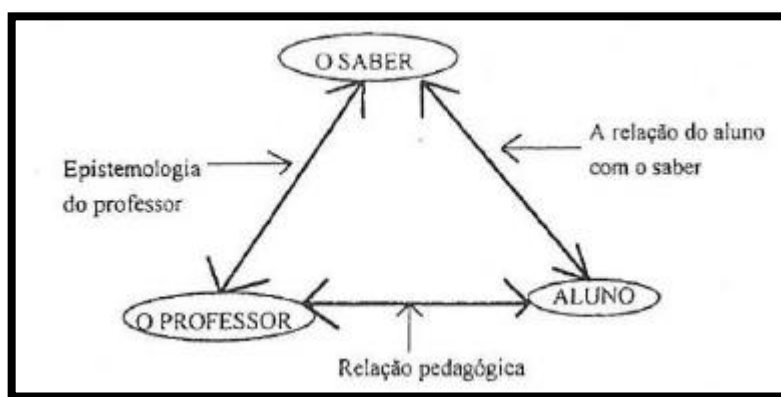
Brousseau (2008) foi um dos autores que mais teve destaque no desenvolvimento de pesquisas sobre Didática da Matemática e Teoria das Situações Didáticas, por isso, faremos um breve relato sobre sua trajetória. Ele foi um dos pioneiros da Didática da Matemática. Em 1972,

no Instituto de Pesquisa da Matemática (Irem), da Universidade de Bordeaux, Brousseau fundou uma instituição original: o Centro de Observações e Pesquisa no Ensino de Matemática (Corem). O centro era um laboratório que possibilitava observar a interação dos alunos e professores em sala de aula e realizar experiências de ensino desenvolvidas e levadas com a finalidade de trabalho conjunto com pessoas vinculadas ao Irem. Em 2003, recebeu a primeira Medalha Félix Klein, em razão de suas experiências práticas e sistemática a respeito do contrato didático na situação de ensino e aprendizagem de Matemática.

A Teoria das Situações Didáticas teve seu advento no início da década de 1970 e, desde então, teve inúmeros autores que foram aperfeiçoando e atualizando as pesquisas sobre essa teoria. A TSD, desenvolvida por Brousseau (2008), propõe uma construção que consiste na compreensão das interações sociais de alunos, professores e conhecimentos matemáticos, que ocorrem em uma sala de aula e que condicionam o que se aprende e a forma como isso se dá.

Desse modo, para modelar a Teoria das Situações Didáticas, Brousseau (1996) propôs o triângulo didático composto por três elementos: professor, aluno e saber, como mostra a figura 2.

Figura 2 - Triângulo Didático



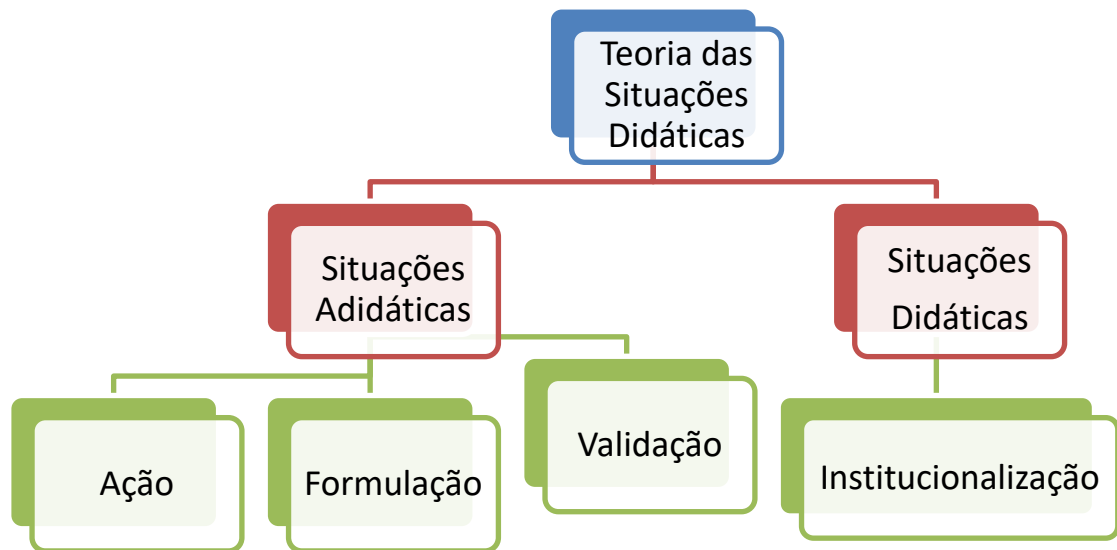
Fonte: Almouloud (2013, p.32).

Um dos elementos que contribuem para o desenvolvimento e a análise das situações didáticas é denominado contrato didático, que são as obrigações recíprocas entre aluno, sociedade e professores, como descreve Brousseau (2008):

Numa situação de ensino preparada e realizada pelo professor, o aluno em geral tem a tarefa de resolver problema que lhe é apresentado, por meio da interpretação das questões colocadas, das informações fornecidas, das exigências impostas, que são a maneira de ensinar do professor. Esses hábitos específicos do professor, esperados pelo aluno, e os comportamentos deste, esperados pelo professor, constituem o contrato didático (BROUSSEAU, 2008, p. 9).

Conforme Brousseau (2008), a Teoria das Situações Didáticas é composta por quatro fases, sendo elas distribuídas de acordo com sua condição didática. Antes de descrever essa teoria, vamos expor um resumo, em forma de gráfico hierárquico, na figura 3 e, em seguida, retomamos com detalhamento de cada uma das suas fases.

Figura 3 - Fases da Teoria das Situações Didáticas



Fonte: elaborada pela autora.

Podemos observar que, para a aplicação da Teoria das Situações Didáticas, temos dois momentos, o primeiro é denominado de situações adidáticas, composto pelas fases de ação, formulação e validação interna. Esse primeiro momento é caracterizado, de acordo com Brousseau (1986 *apud* Almouloud 2007, p.33):

- O problema matemático é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria;
- O problema é escolhido para que o aluno adquira novos conhecimentos que sejam inteiramente justificados pela lógica interna da situação e que possam ser construídas sem apelo as *razões didáticas*;
- O professor, assumindo papel de mediador, cria condições para o aluno ser o principal ator da construção de seus conhecimentos a partir da(s) atividade(s) proposta(s).

Para o segundo período da fase de aplicação da TSD, temos as situações didáticas, composto pelo momento de institucionalização, que, conforme Brousseau (2008), “é todo o contexto que cerca o aluno, nele incluído o professor e o sistema educacional”, ou seja, nesse momento, o professor tem sua troca de informações com os alunos.

A seguir, descreveremos cada uma dessas fases, consoante a Brousseau (2008), Ação, formulação, validação e institucionalização.

2.2.1 Ação

Acontece quando, na prática do aluno, ele se relaciona com o *milieu* (ambiente, meio) para resolver um determinado problema proposto. Segundo Almouloud (2007, p. 37), essa fase consiste em “colocar o aprendiz numa situação, chamada de situação de ação, tal que: coloca o problema para o aluno cuja melhor solução, nas condições propostas, é o conhecimento a ensinar; o aluno possa agir sobre essa situação e que ela lhe retorne informações sobre sua ação”, ou seja, na fase de ação, o discente toma as decisões sem ter consciência sobre as mesmas. Como diz Brousseau sobre essa fase:

Em geral, adota-se uma estratégia descartando, intuitiva ou racionalmente, uma anterior. Submetida à experiência, a nova estratégia pode ser aceita ou não, conforme a apreciação que o aluno faça de sua eficácia. A sucessão de Situações de ação constitui o processo pelo qual o aluno vai aprender um método de resolução de um problema (BROUSSEAU, 2008, p.23).

Deste modo, como foi distrito anteriormente, a ação é o momento de tomada de decisões, os saberes colocados em prática com o objetivo de resolver os problemas propostos. A seguir, será exposta a situação de formulação.

2.2.2 Formulação

Momento de escolhas e tentativas de uma linguagem comum para a interação entre os alunos e organizar as ideias. Dessa forma, concordamos com Santos e Alves (2017, p. 453), que descrevem essa fase como “caracterizada pela troca de informações entre o aluno e o meio organizado. Neste momento, já se permite a utilização de uma linguagem adequada, mas sem formalidade obrigatória, ou seja, existe uma organização de informações para torná-las comunicáveis”. A linguagem utilizada, nesse momento, tem que convencer os demais de que sua ideia é verídica, que, de acordo com Brousseau, é:

saber comunicar aos colegas sua proposta de estratégia, pois essa é a única maneira que tem de atuar na situação. Essa comunicação está submetida a dois tipos de retroação: uma imediata, por parte dos colegas- que a compreendem ou não (concordam com ela ou não)-, e outra, mediata, por parte do meio, quando, no caso de ser aplicada a uma partida específica, a estratégia resulte vencedora ou não (BROUSSEAU, 2008 p.15).

Desse modo, é uma fase de convencimento com uma linguagem informal, no caso desta pesquisa, é a linguagem da sequência de Lucas, que é uma preparação para a fase seguinte, em que há a necessidade de formalidade. A seguir, será apresentada a situação de validação.

2.2.3 Validação Interna

Uma das características da Engenharia Didática é a validação, podendo ser validação externa onde é preciso fazer um pré- teste ou pós teste confrontando a análise a priori e a análise a posteriori, e temos a validação interna que não precisa fazer esses testes. Assim, essa é uma fase de convencimento, utilizando uma linguagem mais formal para provar as hipóteses e o que foi feito. Almouloud descreve a validação como:

A etapa na qual o aprendiz deve mostrar a validade do modelo por ele criado, submetendo a mensagem matemática (modelo da situação) ao julgamento de um interlocutor. De um lado, o emissor deve justificar a exatidão e a permanência de seu modelo e fornecer, se possível, uma validação semântica e sintática. O receptor, por sua vez, pode pedir mais explicações ou rejeitar as mensagens que não entende ou de que discorda, justificando sua rejeição. Assim, a teoria funciona, nos debates científicos e nas discussões entre alunos, como meio de estabelecer provas ou de refutá-las (ALMOULOU, 2007, p. 39).

Portanto, como exposto anteriormente, fica entendida a validação como o momento de demonstrar que o desenvolvimento do estudo está certo e de passá-la para uma linguagem mais formal, como apresentamos no capítulo 4 os alunos utilizando a sequência de Lucas e suas propriedades estudadas nas situações didáticas propostas. E também a importância do professor neste momento de validação,

Nessa fase, o professor atuará no sentido de estimular os aprendizes o retorno ao conjunto de conjecturas e relações tacitamente formuladas, entretanto, exigem sua verificação, comprovação, quanto à validade e robustez dos resultados obtidos. Constitui elemento relevante, também, a identificação dos elementos que concorreram ao erro ou determinadas incongruências relacionadas com alguma estratégia de resolução (ALVES, 2016, p.18)

Isto é, observamos que o aluno, após revisar, torna a linguagem mais formal, demonstrando todas as relações que foram obtidas. O aluno não só deve comunicar uma

informação, como também precisa afirmar que o que diz é verdadeiro dentro de um sistema determinado. Deve sustentar sua opinião ou apresentar uma demonstração.

2.2.4 Institucionalização

Nessa fase, o professor volta a agir e apresenta o que foi obtido nas fases anteriores e o que precisa melhorar dando a determinados conhecimentos o status cultural indispensável do saber. Como afirma Alves (2016, p.78), “nos momentos finais de sua mediação, o professor deve explicar e indicar as principais propriedades formais que asseguram a consistência das operações e manipulações executadas nas fases anteriores”. Deste modo, para expandir a explicação sobre institucionalização, destacamos (Brousseau, 2008 p. 31)

conferir um status aos eventos da classe vistos como resultados dos alunos e do processo de ensino e identificá-lo; aproximar as produções dos conhecimentos de outras criações (culturais ou do programa) e indicar quais poderiam ser utilizadas.

Nas três primeiras fases, o professor não intervém diretamente, ou seja, são situações didáticas. Para representar as situações didáticas, Brousseau fez os esquemas chamados polígonos da didática, o primeiro seria um triângulo com a relação professor – saber (*savoir savant*) – aluno, em seguida, ele viu que o *milieu* estava de fora, então, surgiu uma nova vértice, agora temos um quadrilátero professor – saber (*savoir savant*) – aluno – *milieu* e todos esses pontos interagem entre si.

Ainda, achando insuficiente, ele criou um hexágono da didática, em que se encontraria a diferença entre o saber escolar e o saber do aluno.

Logo, ficam elucidadas cada umas das fases que compõem a teoria das situações didáticas, que é uma metodologia de ensino que contribuiu muito para a aplicação do experimento da pesquisa que ora apresentamos. A seguir, apresentaremos a Sequência de Lucas e suas propriedades.

3 SOBE O ESTUDO DO PROCESSO DOS MODELOS DE GENERALIZAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE LUCAS

Figura 4 - Édouard Anatole Lucas



Fonte: Google Imagens.

A Sequência de Lucas recebe o nome do matemático francês Édouard Anatole Lucas, que nasceu em 04 de abril de 1842 e faleceu em 3 de outubro de 1891, em Paris, na França. Lucas fez grandes contribuições para a Matemática, incluindo um novo ramo conhecido como matemática recreativa, construiu a torre de Hanói que teve grande comercialização na Europa, e o Quebra-cabeça de Baguenaudier, popularmente, chamado de Anéis Chineses, construído a partir de uma solução binária para o problema de mesmo nome.

Lucas trabalhou como professor de Matemática nas escolas Lycée of Moulins, de 1872 a 1876; Lycées Saint- Louis, de 1876 a 1879 e Lycée Charlemagne, de 1879 a 1890. Ele foi um dos matemáticos que mais contribuiu nos estudos dos números primos e encontrou, manualmente, o maior número primo, que é indicado por Eves (1969), com o valor numérico igual a $2^{127} - 1 = 170141183460460469231687303715884104727$.

A sequência estudada por Lucas, em 1878, de acordo com a lei de recorrência $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, surgiu a partir de estudos sobre a Sequência de Fibonacci.

Essa sequência tem uma lei de formação simples, dados os dois termos iniciais que, aqui, temos: $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$, dessa forma, para obter os próximos elementos, é necessário somar os

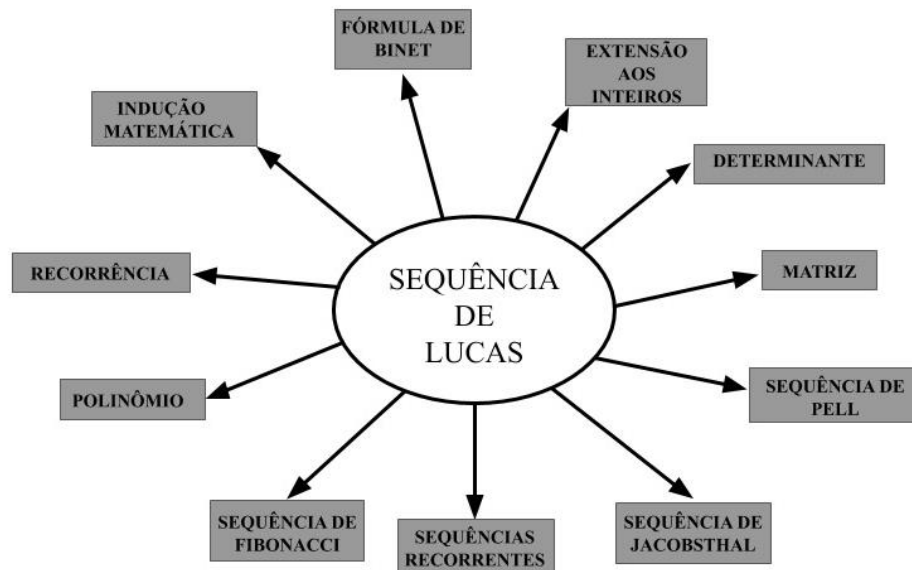
últimos anteriores. Vamos exemplificar para encontrar o L_2 , assim, temos que somar $L_2 = L_1 + L_0 = 1 + 2 = 3$; à vista disso, obtivemos $L_2 = 3$, que é o terceiro termo da sequência. De igual modo, faremos para $L_3 = L_2 + L_1 = 3 + 1 = 4$ e encontramos o $L_3 = 4$ e, para obter os outros termos, segue o mesmo raciocínio.

Assim, a Sequência de Lucas é definida da seguinte forma:

$$L_n = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 0 \\ 1 & \text{se } n = 1 \\ L_{n-1} + L_{n-2} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Antes de nos aprofundarmos na Sequência de Lucas, vamos apresentar, na figura 5, quais conteúdos serão abordados durante o desenvolvimento desta pesquisa.

Figura 5 - Conteúdos relacionados com a Sequência de Lucas



Fonte: elaborada pelo autor.

Dessa forma, foram apresentados os conteúdos que compõem esta pesquisa, como também um pouco da vida e as contribuições do matemático que deu nome à Sequência Generalizada de Lucas. A seguir, serão expostas algumas propriedades que caracterizam a SL.

3.1 Sequências

Definição: uma sequência é uma coleção enumerada de objetos, cuja ordem destes têm relevância. Especificamente, tratando-se de sequências numéricas, essas são funções do tipo $x: A \subset \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, cada número natural do conjunto A é associado a um número real, mas sem, necessariamente, ser injetiva ou sobrejetiva. No caso de sequências finitas, $A = \{n \in \mathbb{N} : n < r, r \in \mathbb{N}\}$, enquanto para sequências infinitas, $A = \mathbb{N}$ (LIMA, 2007).

Na definição dada, sequências infinitas possuem um termo final, mas não um inicial. Apesar disso, em certos casos, precisamos expandir esse conceito e construir sequências que não tenham um primeiro termo. Isso ocorre quando estendemos o domínio dessas função aos inteiros, gerando funções do tipo $x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, nesse caso, denominamos a sequência como sendo *bi-infinita*.

Denotamos por x_n , o número real associado ao n -ésimo número natural e $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, para representar a totalidade da sequência. Para as sequências em que ocorre que $x_n \geq x_{n+1}$, qualquer que seja n , damos o nome de Sequência Não-crescente ou, quando a desigualdade é estrita, Decrescente. Inversamente, quando $x_n \leq x_{n+1}$, damos o nome de Sequência Não-decrescente ou, quando a desigualdade é estrita, Crescente. Além disso, caso exista $k \in \mathbb{R}$, tal que, para todo n , vale que $x_n \leq k$ ou $k \leq x_n$, chamamos a sequência de Limitada Superiormente ou Inferiormente, respectivamente. Caso aconteça ambas, chamamos apenas de Limitada.

Exemplos:

- a) $(2, 4, 6, 8)$ é a sequência finita dada pelos pares naturais de um algarismo. Note que $(4, 2, 6, 8)$, ainda, é uma sequência, mas, por termos invertido a ordem de dois números, é uma sequência diferente.
- b) $(-1, 1, -1, 1, \dots)$ é a sequência infinita dada pela função $x_n = (-1)^n$. Nesse exemplo, podemos observar que, mesmo uma sequência sendo infinita e tendo seu contradomínio em $\mathbb{R}$, seus termos podem se repetir. Além disso, notamos que essa é uma Sequência Limitada, pois vale que $|x_n| \leq 1$.
- c) $(1, 4, 9, 16, \dots)$ é a sequência infinita dada pela função $x_n = n^2$. Nesse exemplo, notamos que, por essa sequência ser do tipo Crescente, ela não pode ser Limitada Superiormente, mas ainda é Limitada Inferiormente, pois $1 \leq x_n$, qualquer que seja n .
- d) $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ é a sequência estabelecida pela função $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, a Sequência de Fibonacci.

- e) $(-1, 2, -3, 4, \dots)$ é a sequência infinita dada pela função $x_n = (-1)^n * n$.
Observamos que essa sequência, diferente das já citadas, não Limitada de nenhuma forma, nem Crescente, nem Decrescente.

3.2 Indução

Definição: sendo $P(n), n \in \mathbb{N}$ uma sentença cuja validade é dependente do valor de n , de imediato, notamos que, testando um por um, é inviável verificar quais valores tornam essa sentença verdadeira. Contudo, podemos estabelecer um método, a fim de usá-lo para testar se $P(n)$ é verdadeira para qualquer valor de n . A essa ferramenta, damos o nome de *Princípio da Indução* e uma base por meio do seguinte axioma:

Axioma: seja $P(n), n \in \mathbb{N}$ uma sentença cuja validade é dependente do valor de n . Seja $P(q)$ verdadeira e suponha que $P(k)$, também, é q e $k \in \mathbb{N}, q \leq k$. Se, com base nisso e em fatos já provados, concluirmos que $P(k + 1)$, também, é verdadeira, então, $P(n)$ vale para todo $n \geq q$.

Na prática, a ideia funciona da seguinte forma: mostramos que algo é válido para um caso inicial, geralmente, entre os primeiros números naturais; em seguida, mostramos que, se nossa sentença vale para um certo caso genérico, também, valerá para seu sucessor. Logo, todos os casos que sucedem o inicial terão sua validade garantida sem testar um por um.

Para uma organização adequada, dividimos uma prova por indução nas etapas de Base de Indução (provar que vale $P(q)$), Hipótese de Indução (supor que vale $P(k)$) e Passo de Indução (mostrar que, se vale $P(k)$, então, vale $P(k + 1)$).

Exemplos:

- a) Vamos apresentara demonstração de $1 + 2 + \dots + n = \frac{n*(n+1)}{2}$
- Precisamos mostrar que, se o acima vale para k , então, para $k + 1$, vale $1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k+1)*(k+2)}{2}$.
 - Base de Indução: é fácil ver que a sentença vale no caso de $P(1)$.
 - Hipótese de Indução: suponha que $1 + 2 + \dots + n = \frac{n*(n+1)}{2}$ vale para $n = k$.

- Passo de Indução: sabemos que $1 + 2 + \dots + k = \frac{k*(k+1)}{2}$ e, portanto, $1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = \frac{k*(k+1)}{2} + (k + 1) = \frac{k*(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{k^2+k+2k+2}{2} = \frac{(k+1)*(k+2)}{2}$, como queríamos demonstrar.
- Logo, como nossa fórmula vale para $n = 1$, valerá para todos os naturais.

Note que, se alterarmos nossa Hipótese de Indução e assumirmos que a fórmula, em questão, é válida para todos os valores de n dentro do intervalo $1 \leq n \leq k$, podemos, sem nenhum prejuízo, chegar à mesma conclusão. De fato, em diversos casos, pode até ser mais conveniente que nossa hipótese seja assim. É coerente, portanto, separarmos as duas formas de se realizar o processo de Indução.

3.2.1 Indução Forte

Seja $P(n), n \in \mathbb{N}$ uma sentença cuja validade é dependente do valor de n . Seja $P(q)$ verdadeira e suponha que $P(n)$, também, é para todo n no intervalo $q \leq n \leq k$, q e $k \in \mathbb{N}, q \leq k$. Se, com base nisso e em fatos já provados, concluirmos que $P(k + 1)$, também, é verdadeira, então, $P(n)$ vale para todo $n \geq q$.

Como a forma de Indução, que já havíamos abordado antes, comporta-se de forma a não usar como hipótese tudo que pode, vamos nomeá-la de Indução Fraca. Note que ela pode ser encarada como um caso particular de Indução Forte.

Exemplos:

- Vamos provar que, em um polígono P de n lados, $n \geq 4$, a quantidade D de diagonais necessárias para decompô-lo em triângulos justapostos é dada por $D = n - 3$.

- Precisamos mostrar que, para um polígono com $k + 1$ lados, $D = (k + 1) - 3$.
- Base de Indução: o caso em que $n = 4$ é trivial.
- Hipótese de Indução: suponha que $D = n - 3$ vale para $n = 1, 2, \dots, k$.
- Passo de Indução: tome um polígono P de $k + 1$ lados e fixe uma de suas diagonais. Como resultado, temos agora dois polígonos menores, P_1 e P_2 , com n_1 e n_2 lados, respectivamente. Daí, é fácil ver que $n_1 < k + 1$, assim, como também $n_2 < k + 1$ e $n_1 + n_2 = k + 1 + 2$. Em vista disso, podemos afirmar que nossa hipótese vale para esses polígonos menores.

Concluímos, então, que para P vale $D = n_1 - 3 + n_2 - 3 + 1 = n_1 + n_2 - 5 = (k + 1) - 3$, como queríamos demonstrar.

Se houvéssemos utilizado a técnica de Indução Fraca, não seria possível resolver tal problema. Só é possível chegar a uma solução por meio de Indução se englobarmos a possibilidade de termos $n = 1, 2, \dots, k$, o que exemplifica, perfeitamente, o motivo do método da Indução Forte ser mais poderoso na resolução de diversos problemas.

3.3 Recorrência

Definição: dentre as infinitas possíveis sequências que podemos construir, existem aquelas cuja função que as gera usa um ou mais de seus termos para definir o próximo. Quando essa função se comporta como uma função do primeiro grau, chamamo-la de linear, ao passo que, quando ela não apresenta termos independentes, chamamo-la de homogênea. A quantidade de termos usados na função para definir seu sucessor direto pode, de uma sequência para outra, variar arbitrariamente. Contudo, uma função que usa k termos para definir o seguinte precisa estabelecer, previamente, os primeiros k termos da sequência.

3.3.1 Recorrência de Primeira Ordem

Uma Recorrência de Primeira Ordem é aquela que faz uso do termo x_n para definir o termo x_{n+1} e, portanto, tem de definir o termo x_1 . De forma genérica, podemos descrever uma recorrência desse tipo como sendo $x_{n+1} = f(x_n)$, em que, fixado $x_1 = a$, teremos uma única sequência.

- a) A sequência $(1, 2, 3, \dots)$ é uma Recorrência de Primeira Ordem, pois é construída pela função $x_n = x_{n-1} + 1$, sendo $x_1 = 1$ por definição.

Aqui, podemos notar por que uma sequência caracterizada por uma recursão não pode ser definida apenas por sua função, tendo em vista que $x_n = x_{n-1} + 1$, também, pode gerar outras sequências como $(2, 3, 4, 5 \dots)$. Por isso, ao criar uma sequência recursiva de primeira ordem, ainda, é necessário definir seu primeiro termo.

A recorrência do exemplo se enquadra como linear, pois se comporta como uma função de primeiro grau. Ao mesmo tempo, ela não é homogênea, visto que tem o termo independente $+1$.

3.3.2 Recorrência de Segunda Ordem

Da mesma forma, uma Recorrência de Segunda Ordem é aquela que faz uso dos termos x_{n-1} e x_n para definir o termo x_{n+1} e, portanto, tem de definir x_1 e x_2 . Igualmente, podemos descrever uma recorrência desse tipo como sendo $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$, em que, fixado $x_1 = a$ e $x_2 = b$, teremos uma única sequência.

Definição: a cada Recorrência Linear de Segunda Ordem homogênea, como coeficientes constantes, da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, associaremos uma equação do segundo grau $r^2 + pr + q = 0$, chamada de equação característica.

O teorema a seguir mostra que se as raízes da equação característica são r_1 e r_2 , então qualquer sequência de forma $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$, é solução de recorrência, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 e c_2 .

Teorema 1 : se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 , então, $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ é solução de recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 e c_2 .

Prova: verificar em Lima (2004, p. 71).

O teorema a seguir mostra que, se $r_1 \neq r_2$, todas as soluções da recorrência têm a forma apontada no teorema 1.

Teorema 2: se as raízes $r^2 + pr + q = 0$ r_1 e r_2 , com $r_1 \neq r_2$, então, todas as soluções de recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$, c_1 e c_2 constantes.

Prova: verificar em Lima (2004, p. 72).

Exemplos:

- b) A Sequência de Fibonacci, $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ é uma Recorrência de Segunda Ordem, dada pela função $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Por conta disso, os termos $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$ são definidos, assim, de antemão.

Nesse momento, cabe a mesma observação feita no primeiro exemplo, mas vale acrescentar que, aqui, notamos que não há restrições quanto à natureza dos termos iniciais fixados. A Sequência de Fibonacci, igual ao exemplo anterior, também, é linear, mesmo sendo de segunda ordem, mas também é homogênea.

3.4 Função geradora da Sequência de Lucas

Vejamos um raciocínio empregado por Koshy (2011, p. 220 – 221), que adaptamos ao caso da Sequência de Lucas. Para tanto, escrevamos: $g(x) = L_0 + L_1x^1 + L_2x^2 + L_3x^3 + \dots + L_nx^n + \dots$. Em seguida, Koshy (2011, p. 220) comenta que “desde que as ordens dos coeficientes de f_{n-1} e f_{n-2} são de 1 e 2 menores do que f_n , respectivamente, encontramos os termos correspondentes $x \cdot g(x), x^2 \cdot g(x)$ ”. Ou seja, adaptando ao nosso interesse, estabelecemos que:

$$\begin{cases} g(x) = L_0 + L_1x^1 + L_2x^2 + L_3x^3 + \dots + L_nx^n + \dots \\ x \cdot g(x) = L_0x^1 + L_1x^2 + L_2x^3 + L_3x^4 + \dots + L_{n-1}x^n + L_nx^{n+1} + \dots \\ x^2 \cdot g(x) = L_0x^2 + L_1x^3 + L_2x^4 + L_3x^5 + \dots + L_{n-2}x^n + L_{n-1}x^{n+1} + L_nx^{n+2} \dots \end{cases}$$

Em seguida, recordando que $L_n - L_{n-1} - L_{n-2} = 0$, vem que:

$$g(x) - x \cdot g(x) - x^2 \cdot g(x) = 2 - x + x^3(L_3 - L_2 - L_1) + x^4(L_4 - L_3 - L_2) + \dots + x^n(L_n - L_{n-1} - L_{n-2}) + \dots$$

$$\text{O que resulta em: } g(x)(1 - x - x^2) = 2 - x + 0 \leftrightarrow g(x) = \frac{2 - x}{1 - x - x^2}.$$

Observamos que o quociente da divisão do polinômio $\frac{2 - x}{1 - x - x^2}$ resulta em uma série de potências, em que os coeficientes dos monômios formam a Sequência de Lucas. Caracterização, em destaque, na sequência a seguir:

$$p(x) = 2 + x + 3x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 11x^5 + 18x^6 + \dots$$

A função geradora da Sequência Generalizada de Lucas recorre à equação característica e à relação de recorrência.

Koshy (2011) faz generalização para a Sequência de Fibonacci e, por meio dessa, faremos uma adaptação para Lucas, pois a relação de recorrência é igual e as duas sequências possuem características parecidas.

Definamos, $\begin{cases} G_0 = a, G_1 = b \\ G_n = G_{n-1} + G_{n-2}, n \geq 2. \end{cases}$ Dessa forma, os termos da sequência $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são:

$$(a, b, a + b, a + 2b, 2a + 3b, 3a + 5b, \dots).$$

O teorema, a seguir, relaciona a sequência $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e a sequência de Lucas $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Teorema 3. Dadas as sequências $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$, temos:

$$G_n = \frac{2a + b}{5} L_{n-2} + \frac{a + 3b}{5} L_{n-1}, n \geq 2.$$

Demonstração: escrevamos $G_n = x_1 L_{n-2} + x_2 L_{n-1}$. Vamos determinar x_1 e x_2 . Para isso, tomando $n = 2$ e $n = 3$, temos:

$$\begin{cases} G_2 = x_1 L_0 + x_2 L_1 \\ G_3 = x_1 L_1 + x_2 L_2. \end{cases}$$

Teremos, então, o seguinte sistema,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = a + b \\ x_1 + 3x_2 = a + 2b. \end{cases}$$

Da primeira equação, escrevemos $x_2 = a + b - 2x_1$. Substituindo, na segunda equação, temos,

$$x_1 + 3(a + b - 2x_1) = a + 2b \Rightarrow -5x_1 = -2a - b \Rightarrow x_1 = \frac{2a + b}{5}.$$

Substituindo o valor de x_1 na expressão de x_2 , teremos

$$x_2 = a + b - 2\left(\frac{2a + b}{5}\right) \Rightarrow x_2 = \frac{a + 3b}{5}.$$

Logo, o resultado é válido para $n = 2$ e $n = 3$. Suponhamos o resultado válido para todo natural menor do que ou igual a n , vamos mostrar que vale para $n+1$. Pela definição da sequência G_n , temos $G_{n+1} = G_n + G_{n-1}$ usando a hipótese de indução, segue que

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= G_n + G_{n-1} \\ &= \frac{2a+b}{5} L_{n-2} + \frac{a+3b}{5} L_{n-1} + \frac{2a+b}{5} L_{n-3} + \frac{a+3b}{5} L_{n-2} \\ &= \frac{2a+b}{5} (L_{n-2} + L_{n-3}) + \frac{a+3b}{5} (L_{n-1} + L_{n-2}) \\ &= \frac{2a+b}{5} L_{n-1} + \frac{a+3b}{5} L_n, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Temos como elementos positivos da Sequência de Lucas:

Tabela 1 - Elementos da Sequência de Lucas

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	...

Fonte: elaborada pela autora.

Anteriormente, indicamos a seguinte relação de recorrência, definida por $L_0=2$, $L_1=1$, $L_2=3$ e $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $n > 2$ que, de acordo com Hoggat & Venner (1969, p. 7), descreve a Sequência de Lucas, intimamente relacionada com a Sequência de Fibonacci. De modo geral, Hoggat & Venner descrevem, ainda, a seguinte listagem:

$(p, q, p+q, p+2q, 2p+3q, 3p+5q, \dots)$ e a denominam por Sequência Generalizada de Lucas $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Assim, fizemos algumas demonstrações da generalização da Sequência de Lucas, que serão mais profundadas nas seções seguintes. Com efeito, como foi apresentada, nos parágrafos anteriores, a fórmula de recursividade, vamos demonstrar o teorema 2.

Teorema 4: a razão entre termos sucessivos da Sequência de Lucas converge para o

$\varnothing = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803$, que é, popularmente, renomada por razão áurea. Em registro atual, temos,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \varnothing. \quad (1)$$

Demonstração:

Considerando que o limite apresentado exista e que seja igual a M.

Dividindo os dois lados da recorrência $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ por L_n e operando, devidamente, a expressão decorrente, tem-se

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} = 1 + \frac{L_{n-1}}{L_n}. \quad (2)$$

Sendo n tendendo ao infinito nessa última expressão e observando que deve ter, obrigatoriamente, que $\frac{L_{n+1}}{L_n} \rightarrow M$, constata-se que

$$M = 1 + \frac{1}{M} \text{ e } M^2 - M - 1 = 0. \quad (3)$$

Hoggat (1969) destaca que as raízes da equação quadrática $M^2 - M - 1 = 0$ são $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Por conclusão, como o limite desejado é positivo, conclui-se que $M = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, em consequência, essa é a única raiz positiva da equação quadrática anterior, também conhecida como razão áurea ou número de ouro.

Inicialmente, supomos que o limite de $\frac{L_{n+1}}{L_n}$ existe, pegamos a relação de recorrência, descobrimos a equação característica e, posteriormente, as raízes da equação característica, em

que pegamos a raiz positiva e observamos que ela é a razão áurea, como veremos essa comprovação.

Vamos verificar o teorema, se $\frac{L_{n+1}}{L_n}$ converge para $\varnothing \approx 1,61803$:

Tabela 2 - Valores para razão $\frac{L_{n+1}}{L_n}$

n	L_{n+1}	L_n	$\frac{L_{n+1}}{L_n}$
1	3	1	3
2	4	3	1,333
3	7	4	1,75
4	11	7	1,571
5	18	11	1,636
6	29	18	1,611
7	47	29	1,620
8	76	47	1,617
9	123	76	1,618
10	199	123	1,617
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fonte: elaborada pela autora.

Conhecendo os termos da sequência e observando a tabela 2, temos que:

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} > 1.$$

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} \text{ converge para } \varnothing.$$

Observação: o processo de convergência da Sequência de Lucas atende a mesma lei de recorrência desenvolvida no teorema 2, do artigo de Martinez e Salas (2011), sobre a convergência da Sequência Generalizada de Fibonacci. Como mostra o teorema a seguir:

Teorema 5: Suponhamos que $a, b, p, q > 0$ sejam números positivos tais que:

$$\frac{b}{a} \stackrel{\text{def}}{=} r \neq \mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

Então a sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por $a_n = \frac{c_{n+1}}{c_n}$.

Onde $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ é definida por $c_n = \begin{cases} a & \text{se } n=1 \\ b & \text{se } n=2 \\ pc_{n-1} + qc_{n-2} & \text{se } n \geq 3; p, q \in \mathbb{Q}^+ \end{cases}$

Converge e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{p\sqrt{p^2 + 4q}}{2}$.

Demonstração: Verificar em Martinez e Salas (2011, p.1957)

Podemos destacar que os elementos da Sequência de Lucas, em virtude de que é uma relação de recorrência do tipo $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, só possibilita definir o elemento L_n se soubermos os elementos anteriores L_{n-1} e L_{n-2} , que, para serem calculados, precisam conhecer seus anteriores.

Em contrapartida, temos que obter, por meio da recursividade, os valores com índices negativos para a Sequência de Lucas. Influenciados pelo cálculo algébrico e aritmético desses possíveis valores. Dessa forma, temos a possibilidade de avaliar a relação de recorrência dada por: $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$

$$L_1 = L_0 + L_{-1} \therefore L_{-1} = L_1 - L_0 = 1 - 2 = -1 \text{ para } (n=1)$$

$$L_0 = L_{-1} + L_{-2} \therefore L_{-2} = L_0 - L_{-1} = 2 + 1 = 3 \text{ para } (n=0)$$

Com isso, temos que: $L_{-n} = L_{-(n-2)} - L_{-(n-1)}$. Dando continuidade ao nosso raciocínio, temos:

$$\begin{cases} L_{-n} = L_{-(n-2)} - L_{-(n-1)} \\ L_{-3} = L_{-1} - L_{-2} = -4 \\ L_{-4} = L_{-2} - L_{-3} = 7 \\ L_{-5} = L_{-3} - L_{-4} = -11 \\ L_{-6} = L_{-4} - L_{-5} = 18 \\ \dots \end{cases}$$

Todavia, conseguimos relacionar os resultados dessa maneira:

$$\begin{cases} L_{-1} = -1 = -L_1 \\ L_{-2} = 3 = L_2 \\ L_{-3} = -4 = -L_3 \\ L_{-4} = 7 = L_4 \\ L_{-5} = -11 = -L_5 \\ L_{-6} = 18 = L_6 \\ \dots \end{cases}$$

Além de inferirmos que:

$$\begin{cases} L_{-1} = -1 = (-1)^1 \cdot L_1 & \text{para } n = 1 \\ L_{-2} = 3 = (-1)^2 \cdot L_2 & \text{para } n = 2 \\ L_{-3} = -4 = (-1)^3 \cdot L_3 & \text{para } n = 3 \\ L_{-4} = 7 = (-1)^4 \cdot L_4 & \text{para } n = 4 \\ L_{-5} = -11 = (-1)^5 \cdot L_5 & \text{para } n = 5 \\ L_{-6} = 18 = (-1)^6 \cdot L_6 & \text{para } n = 6 \\ \dots \end{cases}$$

Salientamos que os desenvolvimentos, na discussão anterior, incorporaram uma investigação sobre a identificação dos termos com índices negativos para a Sequência de Lucas. Assim, exibimos relações aritmética e algébrica de uma identidade nova que denotamos de $(L_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$, que pode ser caracterizada por $L_{-n} = L_{-(n-2)} - L_{-(n-1)}$, para $n \in \mathbb{N}$.

Desse modo, temos como hipótese de indução: suponha que a afirmação $L_{(-n)} = L_{(-n+2)} - L_{(-n+1)}$ seja verdadeira para $n=k$.

$$\text{Sabemos que } L_n = L_{(n-2)} + L_{(n-1)}$$

Levando em conta nossa hipótese, podemos afirmar que:

$$L_{(-k)} = L_{(-k+2)} - L_{(-k+1)}$$

$$L_{(-k-1)} + L_{(-k)} = L_{(-k-1)} + L_{(-k+2)} - L_{(-k+1)}$$

$$L_{(-k-1)} + L_{(-k)} = L_{(-k-1)} + L_{(-k)} + L_{(-k+1)} - L_{(-k+1)}$$

$$L_{(-k-1)} = L_{(-k-1)} - L_{(-k)}, \quad \text{como queríamos demonstrar.}$$

Como $L_{-3} = L_{-1} - L_{-2}$, pois $-4 = -1 - (+3)$, então, $L_{(-n)} = L_{(-n+2)} - L_{(-n+1)}$ vale para todo n natural.

Como queríamos provar.

Com base nos resultados acima, consideramos a seguinte propriedade:

$$L_{-n} = (-1)^n \cdot L_n.$$

Com efeito, queremos mostrar que $L_{-n} = (-1)^n L_n$ para todo $n \geq 1$. Como $L_{-n} = L_{-(n-2)} - L_{-(n-1)}$, para $n=1$,

$$\begin{aligned} L_1 &= L_1 - L_2 \\ &= 1 - 2 \\ &= -1 = (-1)^1 \cdot 1 = (-1)^1 \cdot L_1. \end{aligned}$$

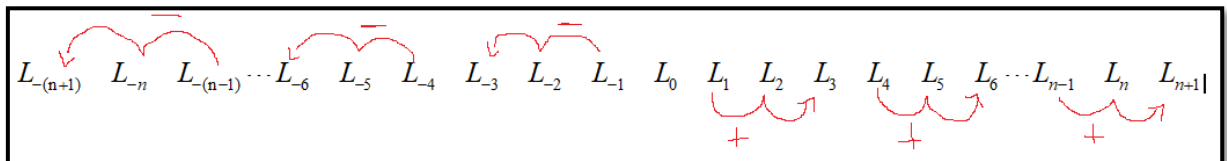
Suponhamos que o resultado seja válido para todo natural menor do que ou igual a n , vamos mostrar que vale $n+1$. Temos, então,

$$\begin{aligned} L_{-(n+1)} &= L_{-(n+1)} - L_n \\ &= (-1)^{n-1} L_{n-1} - (-1)^n L_n \\ &= (-1)^2 \cdot (-1)^{n-1} L_{n-1} + (-1) \cdot (-1)^n \cdot L_n \\ &= (-1)^{n+1} L_{n+1}. \end{aligned}$$

Como queríamos provar.

Agora, exibiremos uma representação que foi feita baseada nos estudos de Alves e Borges Neto (2011), para a Sequência de Fibonacci, e na pesquisa que ora dissertamos apresentaremos o diagrama mnemônico da Sequência de Lucas, descrito a seguir na figura 6. Explicando sua descrição para os valores $n < 0$.

Figura 6 - Descrição dos valores de Lucas



Fonte: elaborada pela autora.

Salientamos que o esquema, mostrado acima, não é formal, foi apenas uma forma mais simples de apresentar, aos discentes, o comportamento da sequência para os valores à direita e à esquerda do zero. Caracterizamos como $(L_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Dando continuidade aos estudos da Sequência de Lucas e utilizando a equação característica (3) e abordando suas raízes, na seção seguinte, será abordada a fórmula de Binet para a Sequência de Lucas.

3.5 Binet para Sequência de Lucas

Inicialmente, apresentamos a equação característica e suas raízes, nesse momento, vamos apresentar algumas propriedades que envolvem essas variáveis.

Sabendo que $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, de modo que α e β são ambas raízes da equação de $x^2 - x - 1 = 0$. Então, $L_n = \alpha^n + \beta^n$ para todo $n \geq 1$.

De fato, vamos verificar para alguns valores.

$$\text{Para } n = 0; L_0 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 1+1 = 2.$$

$$\text{Para } n = 1; L_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = \frac{1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$\text{Para } n = 2; L_2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} + \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

Observamos que é verdade para $n=0, 1$ e 2 . Então, vamos assumir que é verdade para $n=0, 1, 2, \dots, k$. Temos que provar que é verdade para $n=k+1$. Agora,

$$L_{k+1} = L_k + L_{k-1} = \alpha^k + \alpha^{k-1} + \beta^k + \beta^{k-1}$$

$$L_{k+1} = \alpha^k (1 + \alpha^{-1}) + \beta^k (1 + \beta^{-1})$$

$$L_{k+1} = \alpha^k (1 + \alpha - 1) + \beta^k (1 + \beta - 1)$$

$$L_{k+1} = \alpha^{k+1} + \beta^{k+1}$$

Temos alguns resultados que relacionam os valores de alfa e beta:

$$1) \alpha \cdot \beta = -1$$

$$2) \alpha + \beta = 1$$

$$3) \alpha - \beta = \sqrt{5}$$

$$4) \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$$

Após apresentarmos que as raízes da equação característica da Sequência Generalizada de Lucas satisfazem os valores de α e β e que, com a fórmula de Binet,

encontramos qualquer valor dessa sequência, foram expostas as relações entre as raízes, que nos ajudam na demonstração de algumas propriedades da sequência.

Após mostrarmos as relações entre α e β , estendemos as demonstrações para $n + 1$, em que utilizamos as propriedades mostradas anteriormente e podemos encontrar qualquer termo da sequência.

- Agora, vamos utilizar Binet para acharmos L_{-n} (índices negativos).

$$\begin{aligned} L_{-n} &= \alpha^{-n} + \beta^{-n} \Rightarrow \frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n} = \frac{\beta^n + \alpha^n}{(\alpha\beta)^n} = \\ &= \left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{(-1)^n} \right) = (-1)^n (\alpha^n + \beta^n) = (-1)^n \cdot L_n, \quad n > 0 \end{aligned}$$

Observamos que, com a mesma fórmula de Binet e as relações entre α e β , podemos encontrar os termos negativos da Sequência de Lucas.

Assim, finalizamos as propriedades envolvendo os valores de beta, que são equivalentes à raiz negativa da equação característica da Sequência Generalizada de Lucas. A seguir, serão apresentadas as relações entre a Sequência de Lucas e a Sequência de Fibonacci.

3.6 Relação entre a Sequência de Lucas e Sequência de Fibonacci

Como já foi dito, anteriormente, a Sequência Generalizada de Lucas se originou a partir de estudos da Sequência Generalizada de Fibonacci, assim sendo, nesta seção, apresentaremos algumas propriedades envolvendo essas duas sequências.

Para isso, recorreremos aos estudos realizados por Hoggat e Venner (1969), nos quais os mesmos discutem e identificam relações que envolvam a SF e SL. A seguir, apresentaremos a tabela 3.

Tabela 3 - Elementos da Sequência de Fibonacci e Sequência de Lucas

F₁	F₂	F₃	F₄	F₅	F₆	F₇	F₈	F₉	F₁₀
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
L₁	L₂	L₃	L₄	L₅	L₆	L₇	L₈	L₉	L₁₀
1	3	4	7	11	18	29	47	76	123

Eles extraíram algumas propriedades aritméticas que vinculam ambas as sequências, a saber:

Teorema 3: $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ para todo $n > 1$.

Verificação:

Supondo que $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ e $L_{n-1} = F_{n-2} + F_n$,

vamos mostrar que $L_{n+1} = F_n + F_{n+2}$.

Sabemos que $L_n = L_{n-2} + L_{n-1}$ e $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$.

Daí podemos afirmar que

$$L_{n+1} = L_{n-1} + L_n$$

$$L_{n+1} = (F_{n-2} + F_n) + (F_{n-1} + F_{n+1})$$

$$L_{n+1} = (F_{n-2} + F_{n-1}) + (F_n + F_{n+1})$$

$$L_{n+1} = F_n + F_{n+2}$$

Como $L_2 = F_1 + F_3$ e $L_3 = F_2 + F_4$, pois

$$L_2 = 3, L_3 = 4, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2 \text{ e } F_4 = 3,$$

vale que $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ para todo $n > 1$.

Assim, uma outra relação que associa ambas as sequências

$$\forall n \in \mathbb{N}, L_n = F_{n-1} + F_{n+1} \therefore L_n = F_{n-1} + (F_n + F_{n-1}) = (F_n + 2.F_{n-1})$$

$$L_n = 2F_{n-1} + F_n.$$

- Ainda, conseguimos encontrar outras relações algébricas, como a seguinte:

$$F_{2n} = \frac{(\alpha^{2n} - \beta^{2n})}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha^n - \beta^n) \cdot (\alpha^n + \beta^n)}{(\alpha - \beta)} = F_n \cdot L_n$$

$$F_{2n} = F_n \cdot L_n$$

- Podemos observar, na tabela 2, que a soma de L_{n+1} e L_{n-1} resultam em $5F_n$.

Assim, temos que:

$$L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n.$$

De fato, temos como hipótese de indução: supondo que a afirmação

$L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$ seja verdadeira para $n=1,2,3,\dots,k$,

vamos mostrar que $L_{k+2} + L_k = 5F_{k+1}$.

Sabemos que $L_n = L_{n-2} + L_{n-1}$ e $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$.

Levando em conta nossa hipótese, podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} L_{k+2} + L_k &= L_{k+1} + L_k + L_k \\ L_{k+2} + L_k &= L_{k+1} + L_{k-1} + L_{k-2} + L_k \\ L_{k+2} + L_k &= 5F_k + 5F_{k-1} \\ L_{k+2} + L_k &= 5(F_k + F_{k-1}) = 5F_{k+1}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Como $L_1 + L_3 = 5F_2$, pois $1+4=5.1$, a afirmação $L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$ vale para todo n natural.

Dessa forma, apresentamos e exemplificamos quatro propriedades que relacionam a Sequência de Lucas com a Sequência de Fibonacci, em que as mesmas podem ser verificadas na tabela 2, que tem os termos das duas sequências.

Koshy (2011, p. 11) assinala que muitos números que comparecem na Sequência de Fibonacci e na Sequência de Lucas são, de fato, números primos. Por exemplo, o autor aponta os números 2, 3, 5, 13, 89, 233, etc., no caso da primeira sequência, enquanto divisamos os valores: 3, 7, 11, 29, 47, 199, etc., no caso da Sequência de Lucas. Koshy (2011, p. 11) observa que a existência de uma infinidade de primos, presentes em ambas as sequências, permanece em aberto. O maior primo conhecido da primeira sequência, conforme Koshy (2011), pode ser indicado por f_{9311} , enquanto que L_{14449} é o número primo presente e maior conhecido na outra sequência.

A próxima seção retrata a Sequência Polinomial de Lucas, em que serão apresentados a definição, os dez primeiros termos positivos, a lei de recorrência para extensão aos inteiros, os 10 primeiros termos da Sequência Polinomial de Lucas estendida aos inteiros.

3.7 Polinômio de Lucas

De acordo com Bicknell, a Sequência Polinomial de Lucas-SPL $(L_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, em que $x \in \mathbb{R}$ é definida por:

$$\begin{cases} L_0(x) = 2 \\ L_1(x) = x \\ L_{n+1}(x) = x.L_n(x) + L_{n-1}(x). \end{cases}$$

Desse modo, podemos listar os termos da Sequência Polinomial de Lucas como $(L_1(x), L_2(x), L_3(x), L_4(x), \dots, L_n(x), \dots)$. A seguir, apresentaremos os onze primeiros termos da SPL, de acordo com a relação vista acima.

Tabela 4 - Elementos da Sequência Polinomial de Lucas

N	$L_n(x)$
0	2
1	x
2	$x^2 + 2$
3	$x^3 + 3x$
4	$x^4 + 4x^2 + 2$
5	$x^5 + 5x^3 + 5x$
6	$x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2$
7	$x^7 + 7x^5 + 14x^3 + 7x$
8	$x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 2$
9	$x^9 + 9x^7 + 27x^5 + 30x^3 + 9x$
10	$x^{10} + 10x^8 + 35x^6 + 50x^4 + 25x^2 + 2$

Fonte: elaborada pela autora.

Observamos que a soma dos coeficientes dos polinômios de Lucas resulta, exatamente, nos termos correspondentes na sequência. Com isso, foram apresentados os termos iniciais da Sequência Polinomial de Lucas.

Notemos que, a partir da dinâmica caracterizada, podemos discutir a possibilidade de estendermos a Sequência Polinomial de Lucas a índices negativos. Do mesmo modo, é possível obter uma Sequência Polinomial de Lucas estendida com subscrições negativas. De acordo com Bicknell, a sequência é definida pela seguinte lei de recorrência:

$$L_{-n}(x) = (-1)^n . L_n(x).$$

Em vista disso, a seguir, serão explicitados os elementos da SPL estendida aos inteiros, que satisfazem a referida listagem $(L_{-1}(x), L_{-2}(x), L_{-3}(x), L_{-4}(x), \dots, L_{-n}(x), \dots)$:

Tabela 5 - Elementos da Sequência Polinomial de Lucas estendida aos inteiros

N	$L_{-n}(x)$
1	$-x$
2	$x^2 + 2$
3	$-x^3 - 3x$
4	$x^4 + 4x^2 + 2$
5	$-x^5 - 5x^3 - 5x$
6	$x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2$
7	$-x^7 - 7x^5 - 14x^3 - 7x$
8	$x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 2$
9	$-x^9 - 9x^7 - 27x^5 - 30x^3 - 9x$
10	$x^{10} + 10x^8 + 35x^6 + 50x^4 + 25x^2 + 2$

Fonte: elaborada pela autora.

Sobre a perspectiva discutida, Bicknell (1970) acentua a verificação da seguinte identidade $L_{-n}(x) = (-1)^n \cdot L_n(x)$, como foi mostrado anteriormente, fato que estende a Sequência Polinomial de Lucas a índices inteiros. Nesta seção, observamos a sequência polinomial positiva e negativa e suas características. A seguir, serão apresentados os números de k-Lucas.

3.8 Número K-Lucas

Nesta seção, apresentaremos algumas propriedades do número de k-Lucas e as mesmas serão provadas. Essas propriedades foram feitas a partir do relatório de projeto apresentado em cumprimento parcial dos requisitos para o grau de Mestre da Ciência em Matemática, de Biswajit Barik, o qual nós traduzimos e adaptamos para este trabalho e sobre as exposições nas aulas da disciplina de História da Matemática.

Definimos a sequência $(L_{k,n})_{k,n \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{cases} L_{k,0} = 2, L_{k,1} = k \\ \vdots \\ L_{k,n+1} = k \cdot L_{k,n} + L_{k,n-1}, n \geq 1. \end{cases}$$

Por sua vez, a seguir, divisamos a lista fornecida por Barik (2013, p. 20), uma listagem dos primeiros k-números de Lucas. De modo trivial, podemos observar que, para o caso de

$$k = 1 \therefore (L_{k,n})_{k,n \in \mathbb{N}} = (L_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Dados os valores para k-Lucas, como mostra a seguir a tabela 4, os alunos procuraram desenvolver uma relação que satisfizesse a sequência $(L_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$.

Tabela 6 - Sequência dos números de k-Lucas

$$L_{k,0} = 2$$

$$L_{k,1} = k$$

$$L_{k,2} = k^2 + 2$$

$$L_{k,3} = k^3 + 3k$$

$$L_{k,4} = k^4 + 4k^2 + 2$$

$$L_{k,5} = k^5 + 5k^3 + 5k$$

$$L_{k,6} = k^6 + 6k^4 + 9k^2 + 2$$

$$L_{k,7} = k^7 + 7k^5 + 14k^3 + 7k$$

Fonte: elaborada pela autora.

A relação de recorrência de K-Lucas: $L_{k,n} = kL_{k,n-1} + L_{k,n-2}$, fixando $L_{k,0} = 2$ e $L_{k,1} = k$.

Vamos verificar:

$$\text{Para } n = 2, L_{k,2} = kL_{k,1} + L_{k,0} = k \cdot k + 2 = k^2 + 2$$

$$\text{Para } n = 3, L_{k,3} = kL_{k,2} + L_{k,1} = k \cdot (k^2 + 2) + k = k^3 + 3k$$

Dessa forma, podemos verificar que a relação satisfaz os números de k-lucas apresentados na tabela 4.

Portanto, como fizemos para a Sequência de Lucas, apresentaremos, a seguir, alguns resultados envolvendo as raízes da equação característica para k-lucas.

$$L_{k,n} = kL_{k,n-1} + L_{k,n-2} \Rightarrow L_{k,n+1} = kL_{k,n} + L_{k,n-1} \Rightarrow \frac{L_{k,n+1}}{L_{k,n}} = k + \frac{L_{k,n-1}}{L_{k,n}} \quad (I)$$

Definimos $x_{k,n} = \frac{L_{k,n}}{L_{k,n-1}}$. Voltamos para (I), temos :

$$x_{k,n+1} = k + \frac{1}{x_{k,n}} \quad (II)$$

Tomando $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k,n} = x$, supondo que o limite existe, assim, temos:

$$(II) \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k,n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(k + \frac{1}{x_{k,n}} \right) \Rightarrow x = k + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = kx + 1 = x^2 - kx - 1 = 0$$

Resolvendo a equação $x^2 - kx - 1 = 0$, temos:

$$\Delta = (-k)^2 - 4.1.(-1)$$

$$\Delta = k^2 + 4$$

$$x = \frac{-(-k) \pm \sqrt{k^2 + 4}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4}}{2} \quad \begin{matrix} x' = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \\ x'' = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2} \end{matrix}$$

Logo, chamando σ e σ' as raízes dessa equação, temos:

$$\sigma = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \text{ e } \sigma' = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2},$$

Essa parte da sequência k-Lucas é semelhante ao que fizemos para a Sequência Generalizada de Lucas na seção 3, em que encontramos a equação característica da sequência de k- Lucas e suas raízes são os valores destinados para a fórmula de Binet.

Casos particulares:

- Para $K = 1$, sequência clássica de Lucas, aparece: $\{2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots\}$.
- Para $K = 2$, obtemos a sequência de Pell-Lucas: $\{2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, \dots\}$.

Observamos que temos dois casos particulares para as raízes encontradas. Temos, desse modo, uma sequência para $k=1$, denominada de Sequência de Lucas Clássica e, para $k=2$, Sequência de Pell-Lucas, que tem relação entre as duas sequências.

Teorema 6 (Fórmula de Binet): os números de k-Lucas são dados pela fórmula

$$L_{k,n} = \sigma_k^n + (-\sigma_k^{-n}) \text{ onde } \sigma_k = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}.$$

Prova: Como a equação característica dessa recorrência é $r^2 - kr - 1 = 0$, então temos como soluções os valores $\alpha_k = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$ e $\beta_k = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}$. Sabemos que todo número $L_{k,n}$ pode ser dado pela fórmula $L_{k,n} = C_1 \alpha_k^n + C_2 \beta_k^n$. Como já temos que $L_{k,0} = 2$ e $L_{k,1} = k$, é fácil ver que quando $n = 0$, teremos que $C_1 + C_2 = 2$. Além disso, quando $n = 1$, temos que:

$$C_1 * \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} + C_2 * \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2} = k$$

$$(C_1 + C_2) * k + (C_1 - C_2) * \sqrt{k^2 + 4} = 2k$$

$$2k + (C_1 - C_2) * \sqrt{k^2 + 4} = 2k$$

$$(C_1 - C_2) * \sqrt{k^2 + 4} = 0$$

$$(C_1 - C_2) = 0$$

Portanto, como $C_1 + C_2 = 2$ e $(C_1 - C_2) = 0$ concluímos que $C_1 = C_2 = 1$. Podemos também facilmente verificar que $\alpha * \beta = -1$, ou seja, $\alpha = -\frac{1}{\beta}$. Denotamos então que $\alpha = \sigma$ e logo temos que:

$$L_{k,n} = C_1 \alpha_k^n + C_2 \beta_k^n = \sigma^n + (-\sigma)^{-n}, \text{ como queríamos demonstrar.}$$

Se $k = 1$, obtemos os números clássicos de Lucas, $\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ é bem conhecida como a relação de ouro Φ , enquanto σ_1' é, geralmente escrito, como ϕ . Nessa notação, o termo geral da Sequência Clássica de Lucas é dada por

$$L_n = \phi^n + \varphi^n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

- Se $k=2$, então, $\alpha_2 = 1 + \sqrt{2}$ e é conhecida como proporção de prata e tem correspondência com a Sequência de Pell-Lucas, em que $LP_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$.
- Finalmente, se $k = 3$, então, $\sigma_3 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ é conhecido como o número de bronze.

Desse modo, apresentamos algumas propriedades da sequência de k -Lucas. A seguir, será apresentada a matriz de Lucas e suas propriedades.

3.9 Matriz de Lucas

Nesta seção, vamos apresentar um modelo de matriz para a Sequência de Lucas, uma abordagem que permite expressar essa sequência de maneira mais eficiente e compacta. Utilizando as propriedades das matrizes

Teorema 7: A matriz de Lucas, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$Q^n = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix}.$$

$$Q^n = \begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Demonstração: utilizando indução matemática, temos que:

i) Para $n=1$, temos: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_0 & L_1 \\ L_1 & L_2 \end{pmatrix}.$

ii) Para $n+1$, temos:

$$\begin{aligned} Q^{n+1} &= \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_n & L_{n-1} + L_n \\ L_{n+1} & L_n + L_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_n & L_{n+1} \\ L_{n+1} & L_{n+2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar a matriz de Lucas para todo n natural.

- **Identidade de Cassini para Lucas**

Como é de se esperar, existe, para os números de Lucas, uma identidade análoga à de Cassini para Fibonacci $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$. A seguir, será vista uma demonstração dessa identidade para a matriz de Lucas.

Teorema 8: Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = -5(-1)^n.$$

Demonstração. A prova será feita por indução. Como $L_{-1}L_1 - (L_0)^2 = -5$ temos que, para $n = 0$, a base da indução, a identidade, verifica-se. Agora, considere o seguinte sistema linear, composto por duas equações e duas incógnitas, cujas soluções são obviamente dadas por $x_0 = y_0 = 1$.

$$\begin{cases} xL_{n+1} + yL_n = L_{n+2} \\ xL_n + yL_{n-1} = L_{n+1}. \end{cases}$$

Utilizando a regra de Cramer para o cálculo das soluções desse sistema linear, pode-se calcular o valor de y_0 como uma divisão de determinantes,

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} L_{n+1} & L_{n+2} \\ L_n & L_{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{vmatrix}} = 1.$$

Ou seja, $L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = (-1)(L_nL_{n+2} - L_{n+1}^2)$.

Para concluir a prova, observando que $L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = (-1)(L_nL_{n+2} - L_{n+1}^2)$, pode ser lido tanto da esquerda para direita, quanto da direita para esquerda, assim, se $L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = -5(-1)^n$ vale para n , então vale para $n+1$, isto é, como queríamos demonstrar para todo $n \in \mathbb{N}$.

I. Agora, vamos verificar, sabendo que $L = \{1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \dots\}$

$$Q^n = \begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Observa-se que

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad Q^3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}; \quad Q^4 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

- Se fizermos $Q^2 + Q^3$, temos

$$Q^2 + Q^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} = Q^4.$$

$$\text{Det } Q^2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5; \text{ Det } Q^3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 16 = 5.$$

$$\text{Det } Q^4 = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} = 44 - 49 = -5.$$

Dados os termos da sequência e a estrutura matricial, a matriz $Q^n = Q^{n-1} + Q^{n-2}$, será a soma das duas matrizes anteriores e o determinante pode ser determinado por

$$\text{Det } Q^n = (-1)^{n+1} \cdot 5.$$

Verificação: considerando que

$$Q^n = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Calculando o determinante em ambos os membros, obtemos:

$$(-1)^n \cdot (-5) = L_{n+1} \cdot L_{n-1} - L_n^2.$$

O determinante varia entre 5 e -5, pois quando o índice da matriz é par, o determinante será -5, já quando o índice é ímpar, o determinante será 5. Portanto, satisfaz a identidade de Cassini.

Tomemos agora a caracterização dada por Hoggat (1969) para o polinômio característico de uma matriz Q^n , definido como: $P(x) = \det(Q^n - xI)$. Com base nisso, iremos descobrir qual o polinômio característico para as matrizes de Lucas.

$$\begin{aligned} \det(Q^n - xI) &= \begin{vmatrix} L_{n-1} - x & L_n \\ L_n & L_{n+1} - x \end{vmatrix} = (L_{n-1} - x) * (L_{n+1} - x) - L_n^2 \\ &= x^2 - (L_{n-1} + L_{n+1})x + L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = x^2 - 5F_n x - 5(-1)^n \end{aligned}$$

Tendo em mãos esse polinômio, podemos calcular suas raízes, da seguinte forma, simplesmente usando Bhaskara:

$$\begin{aligned} \alpha^n &= \frac{5F_n + \sqrt{25F_n^2 + 20(-1)^n}}{2} = \frac{5F_n + L_n\sqrt{5}}{2} \text{ e} \\ \beta^n &= \frac{5F_n - \sqrt{25F_n^2 + 20(-1)^n}}{2} = \frac{5F_n - L_n\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Vamos agora realizar algumas operações com essas raízes no intuito de descobrir propriedades que usaremos mais a frente:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} &= \left(\frac{5F_n + L_n\sqrt{5}}{2} - \frac{5F_n - L_n\sqrt{5}}{2} \right) * \left(\frac{2}{\frac{5+\sqrt{5}}{2} - \frac{5-\sqrt{5}}{2}} \right) = L_n\sqrt{5} * \frac{1}{\sqrt{5}} \\
\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} &= L_n \\
\alpha^n\beta - \alpha\beta^n &= \frac{5F_n + L_n\sqrt{5}}{2} * \frac{5 - \sqrt{5}}{2} - \frac{5F_n - L_n\sqrt{5}}{2} * \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \\
&= \frac{25F_n - 5F_n\sqrt{5} + 5L_n\sqrt{5} - 5L_n}{4} - \frac{25F_n + 5F_n\sqrt{5} - 5L_n\sqrt{5} - 5L_n}{4} \\
&= \frac{10L_n\sqrt{5} - 10F_n\sqrt{5}}{4} = \frac{10\sqrt{5}(L_n - F_n)}{4} = \frac{10\sqrt{5}(2F_{n-1})}{4} = 5\sqrt{5}F_{n-1} \\
&= \sqrt{5}(L_n + L_{n-2})
\end{aligned}$$

Como α^n e β^n raízes da equação característica da matriz Q^n , então vale que podemos descrever essa matriz como sendo $Q^n = \alpha^n Q_1 + \beta^n Q_2$. Desenvolvendo essa equação, partindo do fato que se $n = 0$, então $Q_1 + Q_2 = I$ e se $n = 1$, então $\alpha Q_1 + \beta Q_2 = Q$, temos que:

$$\begin{aligned}
Q_2 &= I - Q_1 \rightarrow \alpha Q_1 + \beta(I - Q_1) = Q \rightarrow (\alpha - \beta)Q_1 = Q - \beta I \rightarrow Q_1 = \frac{Q - \beta I}{(\alpha - \beta)} \\
Q_1 &= I - Q_2 \rightarrow \alpha(I - Q_2) + \beta Q_2 = Q \rightarrow (-\alpha + \beta)Q_2 = Q - \alpha I \rightarrow Q_2 = \frac{Q - \alpha I}{(-\alpha + \beta)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q^n &= \alpha^n Q_1 + \beta^n Q_2 \rightarrow Q^n = \alpha^n \frac{Q - \beta I}{(\alpha - \beta)} + \beta^n \frac{Q - \alpha I}{(-\alpha + \beta)} \\
Q^n &= \frac{\alpha^n}{(\alpha - \beta)} \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) - \frac{\beta^n}{(\alpha - \beta)} \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
Q^n &= \frac{\alpha^n}{(\alpha - \beta)} \begin{pmatrix} 2 - \beta & 1 \\ 1 & 3 - \beta \end{pmatrix} - \frac{\beta^n}{(\alpha - \beta)} \begin{pmatrix} 2 - \alpha & 1 \\ 1 & 3 - \alpha \end{pmatrix} \\
Q^n &= \begin{pmatrix} \frac{2\alpha^n - \beta\alpha^n}{(\alpha - \beta)} & \frac{\alpha^n}{(\alpha - \beta)} \\ \frac{\alpha^n}{(\alpha - \beta)} & \frac{3\alpha^n - \beta\alpha^n}{(\alpha - \beta)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2\beta^n - \alpha\beta^n}{(\alpha - \beta)} & \frac{\beta^n}{(\alpha - \beta)} \\ \frac{\beta^n}{(\alpha - \beta)} & \frac{3\beta^n - \alpha\beta^n}{(\alpha - \beta)} \end{pmatrix} \\
Q^n &= \begin{pmatrix} \frac{2\alpha^n - \beta\alpha^n - 2\beta^n + \alpha\beta^n}{(\alpha - \beta)} & \frac{\alpha^n - \beta^n}{(\alpha - \beta)} \\ \frac{\alpha^n - \beta^n}{(\alpha - \beta)} & \frac{3\alpha^n - \beta\alpha^n - 3\beta^n + \alpha\beta^n}{(\alpha - \beta)} \end{pmatrix} \\
Q^n &= \begin{pmatrix} \frac{2(\alpha^n - \beta^n) - \beta\alpha^n + \alpha\beta^n}{(\alpha - \beta)} & \frac{\alpha^n - \beta^n}{(\alpha - \beta)} \\ \frac{\alpha^n - \beta^n}{(\alpha - \beta)} & \frac{3(\alpha^n - \beta^n) - \beta\alpha^n + \alpha\beta^n}{(\alpha - \beta)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

A esta última, damos o nome de Fórmula de Binet Matricial.

Usando a propriedades 1 e 2 das raízes da equação característica, podemos reduzir a matriz de forma que ela assuma a seguinte forma:

$$Q^n = \begin{pmatrix} 2L_n - \frac{\sqrt{5}(L_n + L_{n-2})}{\sqrt{5}} & L_n \\ L_n & 3L_n - \frac{\sqrt{5}(L_n + L_{n-2})}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$Q^n = \begin{pmatrix} 2L_n - L_n - L_{n-2} & L_n \\ L_n & 3L_n - L_n + L_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix}$$

Esta, por sua vez, confirma a validade da Fórmula de Binet Matricial para todo $n \geq 0$.

Ainda podemos estender essa noção de forma a incluir também os números de Lucas com índice negativo.

$$Q^{-n} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} \left(\frac{2(\alpha^n - \beta^n) - \beta\alpha^n + \alpha\beta^n}{(\alpha - \beta)} \right) & (-1)^n \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{(\alpha - \beta)} \right) \\ (-1)^n \frac{\alpha^n - \beta^n}{(\alpha - \beta)} & (-1)^{n+1} \frac{3(\alpha^n - \beta^n) - \beta\alpha^n + \alpha\beta^n}{(\alpha - \beta)} \end{pmatrix}$$

Ainda outra propriedade das matrizes de Lucas se encontra na equação $Q^n = L_n Q - 5F_{n-1}I$, a qual podemos provar da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix} = L_n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 5F_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix} = L_n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - (L_{n1} + L_{n-2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2L_n & L_n \\ L_n & 3L_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (L_{n1} + L_{n-2}) & 0 \\ 0 & (L_{n1} + L_{n-2}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2L_n - (L_{n1} + L_{n-2}) & L_n \\ L_n & 3L_n - (L_{n1} + L_{n-2}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix} \text{ Como queríamos demonstrar.}$$

Nessa parte da pesquisa, apresentamos a sequência matricial e algumas propriedades, a partir dos resultados obtidos e de uma relação de recorrência para os termos negativos. Na próxima seção, será apresentado os Quatérnions de Lucas.

3.10 Quatérnions de Lucas

Nesta seção, apresentaremos a função geradora para a generalização dos quatérnions de Lucas e dos quatérnions k-Lucas. Além disso, exploraremos novas fórmulas para as somas binomiais desses quatérnions, derivadas a partir de sua forma de Binet.

Vamos relembrar que a sequência de Lucas é definida de acordo com a seguinte relação de recorrência: para $n \geq 0$.

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n,$$

Onde $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$, L_n é o n -ésimo número de Lucas. A fórmula de Binet para a sequência de Lucas é dada por:

$$L_n = \alpha^n + \beta^n, \text{ Onde } \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Carlitz, Ferns (1970) e Hoggatt (1971) estudaram muitas propriedades das somas binomiais desses números. A sequência generalizada de Lucas é (V_n) , é definida pela seguinte relação de recorrência: para $n \geq 0$ e qualquer inteiro p diferente de zero,

$$V_{n+2} = pV_{n+1} + V_n$$

Onde $V_0 = 2$ e $V_1 = p$. Se $p = 1$, então $V_n = L_n$ (n -ésimo número de Lucas)

Seja λ e μ raízes da equação característica $x^2 - px - 1 = 0$. Então a fórmula de Binet para a sequência (V_n) é dada por:

$$V_n = \lambda^n + \mu^n$$

Onde

$$\lambda = \frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2} \text{ e } \mu = \frac{p-\sqrt{p^2+4}}{2}.$$

A partir dessa igualdade, colocando $\Delta = p^2 + 4$, vejamos que $1 + \lambda^2 = \lambda\sqrt{\Delta}$ e $1 + \mu^2 = -\mu\sqrt{\Delta}$

A função geradora e a função geradora exponencial de uma sequência $\{a_n\}$ são definidas por:

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ e } \hat{a}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n / n! \text{ Respectivamente.}$$

Quatérnions: Assim como os números complexos são vetores no $\mathbb{R}^2$, os quatérnions são também vetores, porém do $\mathbb{R}^4$. Dessa forma, sendo q um quatérnion, $q = q_1 1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k$ ou, alternativamente, $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$, em que q_1, q_2, q_3, q_4 são números reais. Além disso, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ e $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$, $ki = j = -ik$.

Com base no mostrado acima, podemos definir algumas operações sobre os quatérnions:

Adição: Sejam $q = q_1 1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k$ e $p = p_1 1 + p_2 i + p_3 j + p_4 k$ dois quatérnions. Então: $q + p = (q_1 + p_1)1 + (q_2 + p_2)i + (q_3 + p_3)j + (q_4 + p_4)k$.

Produto de Escalar por Quatérnion: Sejam q o quatérnion já descrito e a uma escalar. Então: $a * q = a q_1 1 + a q_2 i + a q_3 j + a q_4 k$.

Produto de Quatérnion por Quatérnion: Sejam q e p os quatérnions já descritos. Então:

$$\begin{aligned} q \times p = & (q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3 - q_4 p_4) + \\ & (q_1 p_2 + q_2 p_1 + q_3 p_4 - q_4 p_3) i + \\ & (q_1 p_3 - q_2 p_4 + q_3 p_1 + q_4 p_2) j \\ & (q_1 p_4 + q_2 p_3 - q_3 p_2 + q_4 p_1) k \end{aligned}$$

Podemos separar q em duas partes: escalar ($S(q)$) e vetorial ($V(q)$), de forma que $S(q) = q_1$ e $V(q) = q_2i + q_3j + q_4k$.

Definimos um quatérnio de Lucas como sendo um tipo específico de quatérnio da forma $K_n = L_n + L_{n+1}i + L_{n+2}j + L_{n+3}k$, cujos coeficientes $L_n, L_{n+1}, L_{n+2}, L_{n+3}$ são números da Sequência de Lucas. Também, definimos $K_0 = (2, 1, 3, 4)$, $K_1 = (1, 3, 4, 7)$ e $K_{n+2} = K_{n+1} + K_n$.

A seguir, vamos ver algumas propriedades desses quatérnios de Lucas:

Propriedade 1:

$$\sum_{i=0}^n K_i = K_{n+2} - K_1$$

- Base de indução: $\sum_{i=0}^2 K_i = (6, 8, 14, 22) = K_4 - K_1$.
- Hipótese de indução: suponha que $\sum_{i=0}^n K_i = K_{n+2} - K_1$ vale para todo $n = 0, 1, \dots, r$.
- Passo de indução:

$$\sum_{i=0}^n K_i = K_{n+2} - K_1$$

$$\sum_{i=0}^r K_i + K_{r+1} = K_{r+2} - K_1 + K_{r+1}$$

$\sum_{i=0}^{r+1} K_i = K_{r+3} - K_1$, como queríamos demonstrar.

Propriedade 2:

$$L_n K_{n+r} = K_{(2n+r)} + (-1)^n K_r, r \geq 0$$

- Prova: $L_n K_{n+r} = K_{(2n+r)} + (-1)^n K_r$

$$(L_n L_{n+r}, L_n L_{n+r+1}, L_n L_{n+r+2}, L_n L_{n+r+3}) =$$

$$(L_{2n+r} + L_r(-1)^n, L_{2n+r+1} + L_{r+1}(-1)^n, L_{2n+r+2} + L_{r+2}(-1)^n, L_{2n+r+3} + L_{r+3}(-1)^n)$$

Essa igualdade é válida, porque $L_n L_{n+r} = L_{2n+r} + (-1)^n L_r$.

Lema: $L_n L_{n+m} - L_{n-1} L_{n+m+1} = F_{m-n+1} 5(-1)^n$

- Base de indução: quando $n = 1$, $L_1 L_{m+1} - L_0 L_{m+2} = L_{m+1} - 2L_{m+2} = -L_m - L_{m+2} = F_m 5(-1)^1$
- Hipótese de indução: $L_n L_{n+m} - L_{n-1} L_{n+m+1} = F_{m-n+1} 5(-1)^n$ vale para $n = 1, 2, \dots, (k-1), k$
- Passo de indução: por hipótese, sabemos que

$$L_k L_{k+m} - L_{k-1} L_{k+m+1} = F_{m-k+1} 5(-1)^k L_{k-1} L_{k+m} - L_{k-2} L_{k+m+1} = F_{m-k+2} 5(-1)^{k-1}$$

Tomemos, então, $L_{k+1} L_{k+m} - L_k L_{k+m+1} = L_{k+m}(L_k + L_{k-1}) - L_{k+m+1}(L_{k-1} + L_{k-2}) = (L_k L_{k+m} - L_{k-1} L_{k+1+m}) + (L_{k-1} L_{k+m} - L_{k-2} L_{k+1+m}) = F_{m-k+1} 5(-1)^k + F_{m-k+2} 5(-1)^{k-1} = F_{m-k} 5(-1)^{k+1}$, como queríamos demonstrar.

Propriedade 3:

$$K_{n+1}^2 - K_n K_{n+2} = 5 * (-1)^{n+1} * (2,2,4,3)$$

- $K_{n+1}^2 = (L_{n+1}^2 - L_{n+2}^2 - L_{n+3}^2 - L_{n+4}^2) + (2L_{n+1}L_{n+2})i + (2L_{n+1}L_{n+3})j + (2L_{n+1}L_{n+4})k$
- $K_n K_{n+2} = (L_n L_{n+2} - L_{n+1} L_{n+3} - L_{n+2} L_{n+4} - L_{n+3} L_{n+5}) + (L_n L_{n+3} + L_{n+1} L_{n+2} + L_{n+2} L_{n+5} - L_{n+3} L_{n+4})i + (L_n L_{n+4} - L_{n+1} L_{n+5} + L_{n+2}^2 + L_{n+3}^2)j + (L_n L_{n+5} + L_{n+1} L_{n+4})k$
- $K_{n+1}^2 - K_n K_{n+2} = (L_{n+1}^2 - L_{n+2}^2 - L_{n+3}^2 - L_{n+4}^2 - L_n L_{n+2} + L_{n+1} L_{n+3} + L_{n+2} L_{n+4} + L_{n+3} L_{n+5}) + (L_{n+1} L_{n+2} - L_n L_{n+3} - L_{n+2} L_{n+5} + L_{n+3} L_{n+4})i + (2L_{n+1} L_{n+3} - L_n L_{n+4} + L_{n+1} L_{n+5} - L_{n+2}^2 - L_{n+3}^2 + L_{n+2} L_{n+4} - L_{n+3} L_{n+5})j + (L_{n+1} L_{n+4} - L_n L_{n+5})k$
- Usando o Lema acima, organizamos os termos para obter que:
- $K_{n+1}^2 - K_n K_{n+2} = (5(-1)^{n+1} - 5(-1)^{n+2} - 5(-1)^{n+3} - 5(-1)^{n+4}) + (5(-1)^{n+1} + 5(-1)^{n+3})i + (10(-1)^{n+1} - 10(-1)^{n+2})j + (15(-1)^{n+1})k$
- $K_{n+1}^2 - K_n K_{n+2} = 5(-1)^{n+1} (2,2,4,3)$, como queríamos demonstrar.

Propriedade 4:

$$K_{n+1} K_{n+r} - K_n K_{n+r+1} = 5 * (-1)^{n+1} * (2F_{r+1}, 2F_{r+2}, 4F_{r+3}, -(F_{r-1} + F_{r-3}))$$

- $K_{n+1} K_{n+r} = (L_{n+1} L_{n+r} - L_{n+2} L_{n+r+1} - L_{n+3} L_{n+r+2} - L_{n+4} L_{n+r+3}) + (L_{n+1} L_{n+r+1} + L_{n+2} L_{n+r} + L_{n+3} L_{n+r+3} - L_{n+4} L_{n+r+2})i + (L_{n+1} L_{n+r+2} - L_{n+2} L_{n+r+3} + L_{n+3} L_{n+r} + L_{n+4} L_{n+r+1})j + (L_{n+1} L_{n+r+3} + L_{n+2} L_{n+r+2} - L_{n+3} L_{n+r+1} + L_{n+4} L_{n+r})k$
- $K_n K_{n+r+1} = (L_n L_{n+r+1} - L_{n+1} L_{n+r+2} - L_{n+2} L_{n+r+3} - L_{n+3} L_{n+r+4}) + (L_n L_{n+r+2} + L_{n+1} L_{n+r+1} + L_{n+2} L_{n+r+4} - L_{n+3} L_{n+r+3})i + (L_n L_{n+r+3} - L_{n+1} L_{n+r+4} + L_{n+2} L_{n+r+1} + L_{n+3} L_{n+r+2})j + (L_n L_{n+r+4} + L_{n+1} L_{n+r+3} - L_{n+2} L_{n+r+2} + L_{n+3} L_{n+r+1})k$
- $K_{n+1} K_{n+r} - K_n K_{n+r+1} = (L_{n+1} L_{n+r} - L_{n+2} L_{n+r+1} - L_{n+3} L_{n+r+2} - L_{n+4} L_{n+r+3} - L_n L_{n+r+1} + L_{n+1} L_{n+r+2} + L_{n+2} L_{n+r+3} + L_{n+3} L_{n+r+4}) + (L_{n+1} L_{n+r+1} +$

$$\begin{aligned}
& L_{n+2}L_{n+r} + L_{n+3}L_{n+r+3} - L_{n+4}L_{n+r+2} - L_nL_{n+r+2} - L_{n+1}L_{n+r+1} - L_{n+2}L_{n+r+4} + \\
& L_{n+3}L_{n+r+3})i + (L_{n+1}L_{n+r+2} - L_{n+2}L_{n+r+3} + L_{n+3}L_{n+r} + L_{n+4}L_{n+r+1} - \\
& L_nL_{n+r+3} + L_{n+1}L_{n+r+4} - L_{n+2}L_{n+r+1} - L_{n+3}L_{n+r+2})j + (L_{n+1}L_{n+r+3} + \\
& L_{n+2}L_{n+r+2} - L_{n+3}L_{n+r+1} + L_{n+4}L_{n+r} - L_nL_{n+r+4} - L_{n+1}L_{n+r+3} + L_{n+2}L_{n+r+2} - \\
& L_{n+3}L_{n+r+1})k
\end{aligned}$$

- Usando o Lema acima, organizamos os termos para obter que:
- $K_{n+1}^2 - K_nK_{n+2} = (F_r5(-1)^{n+1} - F_r5(-1)^{n+2} - F_r5(-1)^{n+3} - F_r5(-1)^{n+4}) +$
 $(F_{r+1}5(-1)^{n+1} + F_{r-1}5(-1)^{n+2} + F_{r+1}5(-1)^{n+3} - F_{r-1}5(-1)^{n+4})i +$
 $(F_{r+2}5(-1)^{n+1} - F_{r+2}5(-1)^{n+2} + F_{r-2}5(-1)^{n+3} + F_{r-2}5(-1)^{n+4})j +$
 $(F_{r+3}5(-1)^{n+1} + F_{r+3}5(-1)^{n+2} - F_{r-1}5(-1)^{n+3} + F_{r-3}5(-1)^{n+4})k$
- $K_{n+1}K_{n+r} - K_nK_{n+r+1} = 5 * (-1)^{n+1} * (2F_{r+1}, 2F_{r+2}, 4F_{r+3}, -(F_{r-1} + F_{r-3})),$
 como queríamos demonstrar.

Assim, foi apresentada a Sequência de Lucas com quatro dimensões e uma fórmula de Binet para a generalização da mesma, em que podemos encontrar qualquer termo. A seguir, serão apresentadas as aplicações das situações didáticas.

4 EXPERIÊNCIA DE ENSINO DO MODELO GENERALIZADO DE LUCAS EM UM CURSO DE LICENCIATURA

A prática foi realizada com discentes da disciplina de História da Matemática, do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará –IFCE. Foi executada uma sequência de aulas contínuas, assim, realizamos delineamento de aprendizagem para os alunos da turma.

A motivação da escolha da disciplina de História da Matemática se deu pelo fato de podermos explorar o processo de desenvolvimento e conservação dos conteúdos estudados, como dos matemáticos que contribuíram diretamente e indiretamente para o processo de continuação das sequências. Com a perspectiva de que, com a história, podemos incluir fatos, datas e personalidades ao processo de propagação do conhecimento.

E, como queríamos, como público da pesquisa, professores em formação inicial, optamos por uma disciplina que nos desse liberdade de contemplarmos vários conteúdos e que fosse na metade do curso, haja vista que os discentes já teriam uma certa maturidade e conhecimentos prévios para resolver as indagações. A seguir, apresentamos essas situações didáticas.

4.1 Aplicação das Situações Didáticas

As situações didáticas foram desenvolvidas com os estudantes por meio de questões norteadoras, de modo que essas questões instigassem os estudantes a resolvê-las. Deste modo, definimos situação, segundo (BROUSSEAU, 2008, p.21):

A situação é, portanto, o contexto que cercava o aluno, projeto e manipulado pelo professor, que a considerava uma ferramenta. Posteriormente, identificamos como *situações matemáticas* todas àquelas que levam o aluno a uma atividade matemática sem intervenção do professor. Reservamos o termo situações didáticas para os modelos que descrevem as atividades do professor e do aluno

Desta maneira, as perguntas foram realizadas de acordo com o critério de que cada uma dependesse da anterior, assim, o ensino será crescente e dependente. Dessa maneira, para

registrar as respostas, foram utilizadas anotações, exposições no quadro e gravação de áudio dos debates entre os discentes e das explicações para chegar à resolução de cada indagação. Para preservar o anonimato e a imagem dos discentes, cada um será identificado por números, variando de um a seis.

Nessa perspectiva, foram consideradas algumas variáveis didáticas a partir das situações problemas trabalhadas com os estudantes. Foi feita uma aula teórica para introduzir a Sequência de Lucas, sem muitos detalhes para que os estudantes fossem desvendando as características e teoremas dessa sequência por meio das situações problemas e ficassem motivados a querer responder a todas as perguntas.

Iniciamos com um olhar histórico, haja vista que tinha que ser contemplada a disciplina em que foi aplicada a pesquisa e para apresentar as contribuições do matemático que deu nome à sequência e a evolução histórica dos conteúdos envolvidos.

Dessa forma, iniciamos a efetivação da situação didática com a entrega da primeira lista de exercício aos estudantes envolvidos na pesquisa, informando-os que, inicialmente, utilizassem apenas seus conhecimentos prévios e prosseguissem com discussões entre eles para refletirem sobre a resolução da situação problema. E, assim, estruturar estratégias para a resolução das perguntas propostas para que, posteriormente, fossem formulados os argumentos que gerassem a validação do problema. A seguir, serão apresentadas as situações didáticas trabalhadas com os estudantes envolvidos na pesquisa.

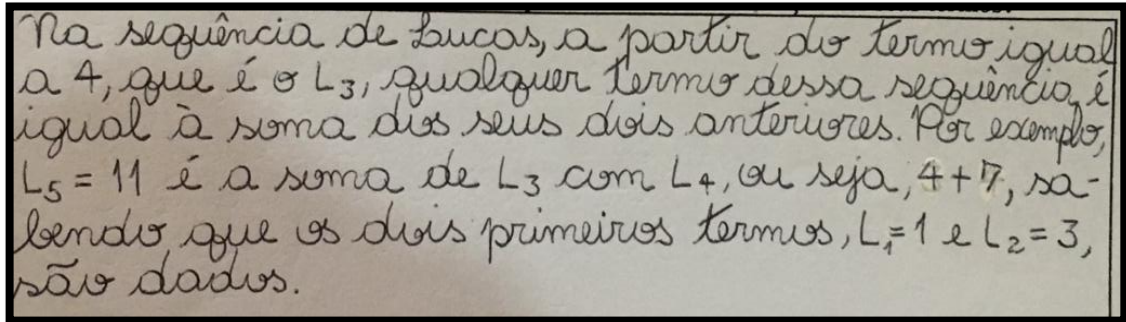
4.1.1 Primeira situação didática

A primeira aula foi para apresentar a Sequência de Lucas, até então, os discentes só tinham conhecimento da Sequência de Fibonacci. À vista disso, iniciamos apresentando um pouco sobre a vida e as contribuições do matemático francês Eduard Anatole Lucas. Em seguida, foi passada uma situação didática com cinco questões, para que os discentes utilizassem seus conhecimentos prévios e o que tinha sido repassado, anteriormente, na disciplina de História da Matemática. Desse modo, na situação problema um, com o objetivo de definir uma relação de recorrência para a Sequência de Lucas, por meios dos elementos iniciais da sequência de Lucas, temos a primeira pergunta:

1. Dada a sequência: $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \{ 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, \dots \}$, qual o comportamento da Sequência de Lucas em relação aos seus termos?

Pode-se observar que, na figura 8, o Estudante 2 determinou que o terceiro termo é 4 e o denominou por L_3 , qualquer termo da sequência pode ser obtido pela soma dos dois anteriores.

Figura 7 - Estudante 2 descrevendo o comportamento da Sequência de Lucas (em fase de ação)

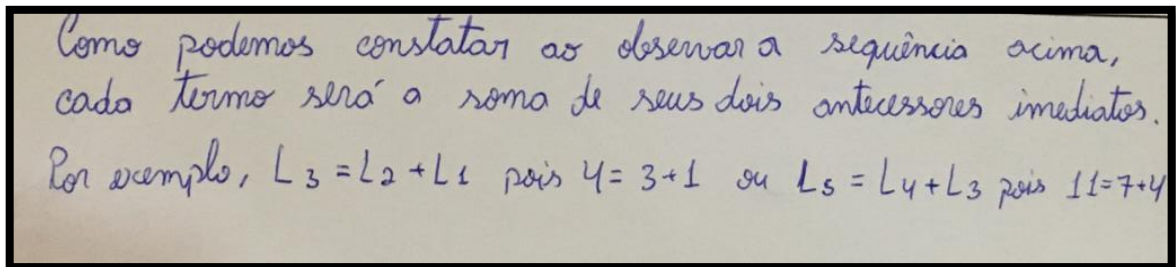


Na sequência de Lucas, a partir do termo igual a 4, que é o L_3 , qualquer termo dessa sequência é igual à soma dos seus dois anteriores. Por exemplo, $L_5 = 11$ é a soma de L_3 com L_4 , ou seja, $4 + 7$, sabendo que os dois primeiros termos, $L_1 = 1$ e $L_2 = 3$, são dados.

Fonte: elaborado pela autora

No entanto, o Estudante 3, além de descrever o comportamento da Sequência de Lucas, ainda, exemplificou como obter alguns termos da SL, vejamos na figura 8.

Figura 8 - Estudante 3 descrevendo o comportamento da Sequência de Lucas (em fase de ação e formulação)



Como podemos constatar ao observar a sequência acima, cada termo será a soma de seus dois antecessores imediatos. Por exemplo, $L_3 = L_2 + L_1$ pois $4 = 3 + 1$ ou $L_5 = L_4 + L_3$ pois $11 = 7 + 4$.

Fonte: elaborado pela autora.

Observa-se que os Estudantes 2 e 3 apresentam argumentos semelhantes, no entanto, o Estudante 3 generaliza a descrição e, ainda, exemplifica, ou seja, podemos observar que os alunos compreenderam a explicação teórica e cada um absorveu com detalhes específicos e, para validação, eles responderam à questão dois:

2. Obtenha um modo recursivo para a descrição dos termos da Sequência de Lucas.

A fim de validar sua resposta, os Estudantes 2 e 3 efetuaram alguns cálculos descritos na figura 9, recorrendo à relação de recorrência de Lucas $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$:

Figura 9 - Determinação de um termo a partir da relação de recorrência (fase de validação)

Na sequência de Lucas, dados $L_1 = 1$ e $L_2 = 3$, qualquer termo é descrito pela lei de recorrência:

$$\begin{aligned} L_3 &= L_2 + L_1 \\ L_4 &= L_3 + L_2 \\ L_5 &= L_4 + L_3 \\ &\vdots \\ L_n &= L_{n-2} + L_{n-1} \\ L_{n+1} &= L_n + L_{n-1} \end{aligned}$$

Portanto,

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}, \text{ a partir de } n=2.$$

Fonte: elaborado pela autora.

Figura 10 - Determinação de um termo a partir da relação de recorrência (fase de validação)

$\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}} : (1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \dots)$

$$L_n = L_{n-2} + L_{n-1}$$

$$\begin{aligned} L_4 &= L_2 + L_3 \Rightarrow L_4 = 3 + 4 \\ L_3 &= L_1 + L_2 \Rightarrow L_3 = 1 + 3 \\ L_2 &= L_0 + L_1 \\ L_1 &= L_{-1} + L_0 \end{aligned}$$

Fonte: elaborado pela autora.

Após os estudantes apresentarem a validação para o comportamento e a relação de recorrência da Sequência de Lucas, por meio dos seus elementos, damos continuidade com a situação didática um. Como os estudantes, no início da disciplina, estavam estudando a Sequência de Fibonacci e ela tem inúmeras relações com a SL, foi proposto, aos estudantes, encontrar essas relações entre as duas sequências. Assim, prosseguimos com a questão três:

3. Qual a relação entre a Sequência de Lucas e a Sequência de Fibonacci?

Para responder a essa questão, os alunos tentaram resolver com seus conhecimentos prévios, no entanto, foi necessário recorrer às anotações das aulas que antecederam a aplicação da pesquisa, para lembrarem a Sequência de Fibonacci e, também, foi exposta uma breve explicação sobre SF e, depois, eles foram resolver a questão e conversar entre eles.

O Estudante 6 listou os elementos tanto da Sequência de Lucas, quanto os de Fibonacci e, em seguida, foi relacionando-os, como mostra a figura 11 e conseguiu chegar a uma relação de recorrência envolvendo as duas sequências $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$.

Figura 11 - Descrição da relação entre as sequências de Lucas e Fibonacci

Lucas (L)	Fibonacci (F)	Subtrahendo
$L_1 = 1$	$F_1 = 1$	0
$L_2 = 3$	$F_2 = 1$	2
$L_3 = 4$	$F_3 = 2$	2
$L_4 = 7$	$F_4 = 3$	4
$L_5 = 11$	$F_5 = 5$	6
$L_6 = 18$	$F_6 = 8$	10
$L_7 = 29$	$F_7 = 13$	16

É possível notar que:
 $L_n - F_n = 2F_{n-1}$
 $L_n = F_{n-1} + F_{n-1} + F_n$
 $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$

Fonte: elaborado pela autora.

O Estudante 6, ainda, argumenta sobre a relação encontrada:

Estudante 6: “o resultado da subtração de um número L_n da sequência de Lucas pela de Fibonacci F_n é igual a $2F_{n-1}$, após desenvolver e deixar tudo em função de L_n e lembrando que um número é a soma dos seus dois antecessores imediatos ele encontrou a seguinte relação $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ ”.

Já o Estudante 1 encontrou duas relações entre a SF e a SL, ele chamou os elementos da Sequência de Fibonacci de $(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$ e os termos da Sequência de Lucas de $(b_0, b_1, b_2, b_3, \dots)$ e, logo após, semelhante ao Estudante 6, encontrou a relação $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, como mostra a figura 12, só que com a operação adição dos termos.

Figura 12- Descrição da relação entre as sequências de Lucas e Fibonacci

Fibonacci: $0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 8 \ 13 \dots$
 $a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \dots$

Lucas: $1 \ 3 \ 4 \ 7 \ 11 \ 18 \dots$
 $b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5 \ b_6 \dots$

$b_1 = a_2 + a_0$
 $b_2 = a_3 + a_1$
 $b_3 = a_4 + a_2$
 $b_4 = a_5 + a_3$
 $b_5 = a_6 + a_4$

$L_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right), n \geq 1$

$\frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{2}{2} = 1$
 $\frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{4}{2} = 2$
 $\frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{6}{2} = 3$
 $\frac{a_4 + b_4}{2} = \frac{10}{2} = 5$
 $\frac{a_5 + b_5}{2} = \frac{16}{2} = 8$
 $\frac{a_n + b_n}{2} = a_{n+1}$

Fonte: elaborado pela autora.

Observando a figura 12, nota-se que o estudante achou outra relação à qual o mesmo chama de curiosidade, em que ele pega os elementos de índices iguais, soma e faz a média, encontrando os termos da Sequência de Fibonacci, ele fez a seguinte argumentação:

Estudante 1: “quando eu somo os termos de índices iguais por exemplo $a_n + b_n$ e dividindo por 2 eu vou obter o elemento da sequência de Fibonacci a_{n+1} , assim, exemplificando temos: $\frac{a_1 + b_1}{2} = a_2$, bem como $\frac{1+1}{2} = 1$, dessa forma pode ser generalizado da seguinte forma: $\frac{a_n + b_n}{2} = a_{n+1}$ para $n \geq 0$.”

Prosseguimos a situação didática um com a seguinte questão:

4. Qual objeto matemático que estamos utilizando? Você já o conhecia?

Sobre essa questão, todos os alunos responderam Sequência de Lucas e somente um estudante conhecia a SL, que foi o Estudante 5, como foi relatado na figura 13.

Figura 13 - Relato sobre seu conhecimento em relação à Sequência de Lucas

A sequência de Lucas. Li conhecida, mas nunca
 cheguei a estudar de tal maneira a encontrar uma
 relação entre seus termos e também com a frequên-
 cia de Fibonacci.

Fonte: elaborado pela autora.

E, sobre a última pergunta da primeira situação didática, em relação às dificuldades,

5. Você encontrou alguma dificuldade para resolver as questões anteriores?

O intuito dessa questão foi detectarmos quais os pontos em que os alunos sentiram mais dificuldades, para que pudéssemos fazer uma explanação teórica para darmos continuidade com as outras situações didáticas. Assim, serão transcritos os relatos dos alunos, tais como foram ditos por eles:

Estudante 1: “não tive dificuldades”.

Estudante 2: “pouca dificuldade, a maior dificuldade foi no momento de organizar as ideias para a redação final”.

Estudante 3: “não, dificuldade apenas para organizar as ideias”.

Estudante 4: “sim, pois mesmo a sequência de Lucas sendo parecida com a de Fibonacci ainda tive dificuldade de organizar as ideias”.

Estudante 5: “um pouco, para “um pouco por não conseguir assimilar um: lei de formação para as sequências de Fibonacci e Lucas”.

Estudante 6: “sim, pois nunca tinha visto a sequência de Lucas”.

Desse modo, concluímos nossa primeira situação didática, em que apresentamos um pouco sobre a história por trás da sequência, os elementos, a relação de recorrência, a relação entre a SL e SF, e fizemos um breve diálogo sobre os conhecimentos que os estudantes tinham sobre a sequência e suas dificuldades em resolver as questões propostas. A seguir, será descrita a categorização dos momentos de resolução da primeira situação didática.

4.1.2 Segunda situação didática

Na segunda situação didática, como já havíamos estudado os comportamentos da SL, seguimos com a extensão da Sequência de Lucas para o campo dos inteiros, de modo que os alunos criassem um caminho para encontrar esses novos elementos.

Com o intuito de partir dos elementos já conhecidos pelos estudantes e das relações analisadas na primeira situação didática, foi proposta a primeira questão:

1. É possível calcular os valores de $L_0 = ?$, $L_{-1} = ?$, $L_{-2} = ?$, e assim por diante?

Dessa forma, observamos que os discentes foram utilizando a relação de recorrência encontrada, anteriormente, como suporte para chegar aos possíveis valores para a Sequência de Lucas estendida para os inteiros, como mostra a figura 14.

Figura 14 - Estudante 2, obtenção dos elementos da Sequência de Lucas estendida aos inteiros

Sim, dada a sequência $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \dots\}$
 $L_1 = L_3 - L_2 = 4 - 3 = 1$; $L_2 = L_4 - L_3 = 7 - 4 = 3$, observamos que:
 $L_0 = L_2 - L_1 = 3 - 1 = 2$
 $L_{-1} = L_1 - L_0 = 1 - 2 = -1$
 $L_{-2} = L_0 - L_{-1} = 2 - (-1) = 3$
 E assim por diante.

Fonte: elaborado pela autora.

O Estudante 2 relatou:

“se para obter um termo da sequência na parte positiva temos que somar os dois últimos antecessores, para encontrarmos os elementos com os índices negativos é só subtrair os dois sucessores”.

No entanto, o Estudante 1 utilizou a relação de recorrência que associa a Sequência de Lucas com a Sequência de Fibonacci, como mostra a figura 15, e ele, ainda, deu alguns exemplos e destacou os elementos das duas sequências.

Figura 15 - E1, obtenção dos elementos da Sequência de Lucas para extensão dos inteiros pela relação $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$

Sabemos que $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$
 para $n=0$,
 $L_0 = F_{-1} + F_1 \Rightarrow L_0 = 1 + 1 = 2$
 para $n=-1$,
 $L_{-1} = F_{-2} + F_0 \Rightarrow L_{-1} = -1$
 para $n=-2$
 $L_{-2} = F_{-3} + F_{-1} \Rightarrow L_{-2} = 2 + 1 = 3$
 $L_{-n} = F_{-n-1} + F_{-n+1}$

Fib: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...
 Luc: 1, 3, 4, 7, 11, ...
 Fib: 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, ...
 F_{-3} F_{-2} F_{-1} F_0 F_1 F_2 F_3 F_4

Fonte: elaborado pela autora.

Após a validação da primeira questão, em que foram encontrados elementos da Sequência de Lucas com extensão aos inteiros, por meio de indução e através de relações de recorrências vistas na situação didática anterior, prosseguimos com outra questão:

2. É possível descrever uma relação para obter a sequência $(L_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$?

De acordo com a primeira questão, os estudantes já estavam formulando uma relação para obter os elementos da Sequência de Lucas; na segunda questão, que foi o momento de validação, alguns alunos encontraram a seguinte relação, como mostrado na figura 16.

Figura 16 - momento de ação para encontrar a relação da sequência $(L_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$

$(L_{-n})_{n \in \mathbb{N}} : \{L_{-3}=4, L_{-2}=3, L_{-1}=-1, L_0=2, \dots\}$
 $L_{-n} = L_{-n+2} - L_{-n+1}$
 Para $n=1$: $L_{-1} = L_{-3+2} - L_{-3+1}$
 $L_{-1} = L_{-1} - L_0$
 $L_{-1} = -1 - 2$
 $L_{-1} = -3$
 Para $n=2$: $L_{-2} = L_{-2+2} - L_{-2+1}$
 $L_{-2} = L_0 - L_{-1}$
 $L_{-2} = 2 - (-1)$
 $L_{-2} = 2 + 1$
 $L_{-2} = 3$

Fonte: elaborado pela autora.

Assim, podemos observar que o Estudante 4 pegou a relação de recorrência inicial e, no lugar de somar os termos anteriores, ele subtraiu, ficando, assim, a seguinte relação:

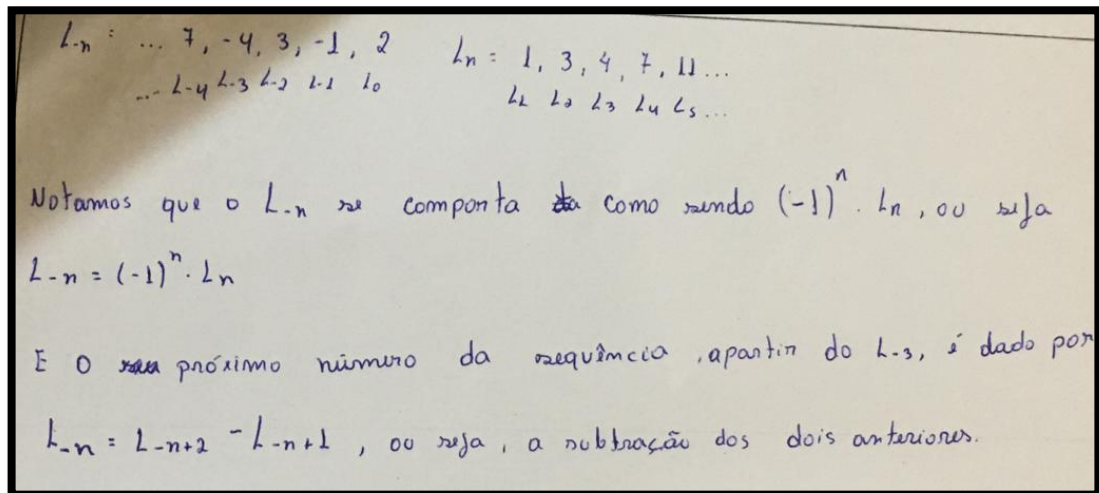
$$L_n = L_{n+2} - L_{n+1}$$

O Estudante 4, na figura 16, mostrou com dois exemplos que, com a relação de recorrência $L_n = L_{n+2} - L_{n+1}$, você obtém qualquer termo da SL e, desse modo, fizemos a validação com todos os estudantes. Logo, seguimos questionando sobre o comportamento dessa sequência:

3. Como a sequência se comporta para $(L_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$?

Questionados sobre o comportamento da Sequência de Lucas estendida aos inteiros, os alunos recorreram às duas primeiras perguntas e a relação que o Estudante 1 encontrou foi um pouco diferente, sendo a seguinte $L_{-n} = L_{-n-2} - L_{-n-1}$, como mostra a figura 17.

Figura 17 - Descrição do comportamento da sequência $(L_{-n})_{n \in \mathbb{Z}}$



Fonte: elaborado pela autora.

O Estudante 1 fez o subsequente relato sobre como a SL se comporta com índices negativos:

Estudante 1: " L_{-n} tem duas condições: Se n for par obtém-se $L_{-n} = L_n$ e se o n for impar obtém-se $L_{-n} = -L_n$ ".

Após relatar essas duas condições, ele expõe que, para obter $(L_{-n})_{n \in \mathbb{Z}}$, vale a relação a seguir:

$$L_{-n} = (-1)^n \cdot L_n$$

4. É possível verificar que $L_{-n} = (-1)^n \cdot L_n$? Em Caso afirmativo, demonstre. E, para negação faça, um contraexemplo.

Diante do exposto, podemos observar que o Estudante 1 já havia encontrado a relação da questão quatro antes mesmo dela ser proposta para eles, mas obtivemos respostas bem interessantes. Esse acontecimento só nos mostrou que, de fato, as situações didáticas estão sendo bem aplicadas pelos estudantes que estão avançando conforme as questões são sugeridas para eles. Nas figuras 18 e 19, serão apresentadas duas formas diferentes de chegar à $L_{-n} = (-1)^n \cdot L_n$.

Figura 18 - Utilizando a relação entre a SL e a SF para chegar à $L_{-n} = (-1)^n \cdot L_n$

Dados $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ e $F_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot F_n$, a relação $L_{-n} = (-1)^n \cdot L_n$ é verificada por:

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1} \Rightarrow L_{-n} = F_{-n+1} + F_{-n-1}, \text{ mas}$$

$$L_{-n} = (-1)^{n+2} F_{n+1} + (-1)^n F_{n-1}$$

$$L_{-n} = (-1)^n \cdot [F_{n+1} + F_{n-1}]$$

$$L_{-n} = (-1)^n \cdot L_n$$

Exemplos:

$$L_{-2} = (-1)^2 L_2 \quad L_{-2} = (-1)^2 \cdot L_2$$

$$L_{-1} = (-1)^1 L_1 \quad L_{-2} = 1 \cdot 3$$

$$L_{-1} = (-1) \cdot 1 = -1 \quad L_{-2} = 3$$

Fonte: elaborado pela autora.

Na figura 18, o Estudante 6 apresenta sua resolução com a relação entre a SL e a SF, dando a explicação:

Estudante 6: “tomando $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ e $L_{-n} = F_{-n-1} + F_{-n+1}$ em seguida fiz a mesma relação dada na questão para Lucas fiz para Fibonacci $F_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot F_n$ e em seguida fui substituindo: $L_{-n} = (-1)^{n+2} \cdot F_{n+1} + (-1)^n F_{n-1} = L_{-n} = (-1)^n \cdot (F_{n+1} + F_{n-1}) = L_{-n} = (-1)^n \cdot L_n$ ”.

Já o Estudante 2 foi apenas substituindo os valores de n e dando condições para n par ou ímpar, que já tinha sido trabalhado na questão anterior, desse modo, veja a figura 19.

Figura 19 - Momento de ação e formulação

$L-n = (-1)^n \cdot L_n$
 Para $n=2$, temos:
 $L-2 = (-1)^2 \cdot L_2$; sabemos até então que $L-2=3$ e $L_2=3$.
 sendo assim, teríamos que: $L-2 = (-1)^2 \cdot 3$
 $\therefore L-2 = 3$

~~Para $n=2k+1$~~
 ~~$L-(2k+1) = (-1)^{2k+1} \cdot L_{2k+1}$~~
 ~~$L-2k-1 = (-1)^{2k} \cdot (-1)^1 \cdot L_{2k+1}$~~
 ~~$L-2k-1 = (-1) \cdot L_{2k+1}$~~
 ~~$L-2k-1 = -L_{2k+1}$~~

Para $n=2k$:
 $L-2k = (-1)^{2k} \cdot L_{2k}$
 $L-2k = L_{2k}$

Concluindo que, para n ímpar: $L-n$ tem o mesmo sinal invertido em L_n
 Ex.: $L-3 = -(L-3)$
 $(L-3) + -3 = 3 \rightarrow (L-3)$
 $n \text{ par} = L-n = L_n$
 Ex.: $L-2 = L_2$
 $3 = 3$

Fonte: elaborado pela autora.

A última pergunta, da segunda situação didática, foi um pouco de teste. Como uma questão era evolução da outra e os alunos estavam utilizando indução matemática, fizemos a seguinte pergunta:

5. Como verificar a propriedade descrita na atividade anterior sem usar *Indução Matemática*? Que nome poderíamos dar a esta nova “sequência”?

Como para resolver essa questão era necessária a fórmula de Binet e, ainda, não tinha sido apresentada para eles, nenhum estudante conseguiu resolver, mas alguns tentaram e deixamos pensarem e retornamos com essa pergunta na situação didática três.

O motivo de fazer uma pergunta que, para responder, precisaria de um conteúdo que sequer foi trabalho, foi para testar a evolução dos alunos, a maturidade matemática e se eles estavam compreendendo o desenvolvimento da sequência.

4.1.3 Terceira situação didática

Já foram apresentadas várias características da Sequência de Lucas e algumas relações de recorrência, como também sua relação com a Sequência de Fibonacci e sua extensão aos inteiros. Neste momento, foi trabalhada a equação característica e a fórmula de Binet para a SL.

Iniciamos com um teorema, em que os estudantes tinham que demonstrá-lo e justificar suas respostas:

1. **Teorema 1:** Dado um número inteiro $n \geq 1$, então, $L_n = \alpha^n + \beta^n$, cujos valores de α e β correspondem às raízes da equação característica designada por $x^2 - x - 1 = 0$.

Demonstre:

A imagem 20 mostra como o Estudante 1 fez essa demonstração partindo da relação de recorrência estudada na primeira situação didática.

Figura 20 - Momento de validação $L_n = \alpha^n + \beta^n$,

Handwritten mathematical work showing the derivation of the Lucas sequence formula $L_n = \alpha^n + \beta^n$.

Recurrence relation: $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$

Dividing by L_{n-1} : $X_n = \frac{L_n}{L_{n-1}} = 1 + \frac{1}{X_{n-1}}$

Assuming the limit exists: $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$

Equation: $X^2 - X - 1 = 0$

Discriminant: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$

Roots: $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

Substituting the values found previously into the function:

Formula: $L_n = \alpha^n + \beta^n$

For $n=1$: $L_1 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^1 + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1$

For $n=2$: $L_2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} + \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{12}{4} = 3$

Fonte: elaborado pela autora.

O Estudante 1 deu a explicação subsequente:

“pegando a fórmula de Lucas $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ dividindo tudo por L_n em seguida trocar os termos por X_n e posteriormente encontrei o limite e em seguida encontrei a equação característica e as raízes chamei de α e β ”.

Ainda, fez algumas substituições na fórmula de Binet, para comprovar que, de fato, satisfaz à SL.

Dando continuidade à situação didática, agora, temos novos elementos α e β , precisamos estudar a relação entre os dois, portanto, fizemos a questão a seguir:

2. Quais as relações entre os valores de α e β ?

Com a intenção de estudar a relação entre α e β e, também, já pensando com quais relações essa contribuirá nas questões seguintes, os alunos fizeram, inicialmente, as operações básicas e, posteriormente, foram uns desafiando os outros a encontrarem relações mais elaboradas, veja na figura 21.

Figura 21 - Relações entre α e β

2. Quais as relações entre os valores de α e β ?

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} ; \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha + \beta = \frac{1 + \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5}}{2} = 1 ; \alpha - \beta = \frac{1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

$$\alpha \cdot \beta = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1^2 - (\sqrt{5})^2}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\alpha^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \alpha$$

$$\beta^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 + \beta$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{2(1 + \sqrt{5})}{2(1 - \sqrt{5})} = \frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}$$

Fonte: elaborado pela autora.

Os alunos, no momento de ação, encontraram algumas propriedades envolvendo os valores de α e β , com expoentes negativos, assim sendo, temos $\alpha^{-n} = (-1)^n \cdot \beta^n$.

- Vamos verificar para $n=1$:

$$\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n} = \frac{1}{\alpha^1} = \frac{1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{1 - 5} = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{-4} = (-1) \cdot \frac{2 - 2\sqrt{5}}{-4} =$$

$$\alpha^{-1} = (-1) \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

- Vamos verificar para $n=2$:

$$\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n} = \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{3 + \sqrt{5}} = \frac{2}{3 + \sqrt{5}} \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{9 - 5} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = (-1) \cdot \frac{3 - 2\sqrt{5}}{-2} =$$

$$\alpha^{-2} = (-1)^2 \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Do mesmo modo, temos uma igualdade para β , sendo essa: $\beta^{-n} = (-1)^n \cdot \alpha^n$.

- Verificando para $n=1$:

$$\beta^{-n} = \frac{1}{\beta^n} = \frac{1}{\beta^1} = \frac{1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1-\sqrt{5}} = \frac{2}{1-\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{2+2\sqrt{5}}{-4} =$$

$$\beta^{-1} = (-1) \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

- Verificando para n=2:

$$\beta^{-n} = \frac{1}{\beta^n} = \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{6+2\sqrt{5}}{9-5} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta^{-2} = (-1)^2 \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Foram apresentadas relações entre alfa e beta com expoentes negativos.

Agora, apresentaremos outras igualdades envolvendo α e os elementos das sequências de Lucas e de Fibonacci, a saber:

- $\alpha^n = \frac{L_n + F_n \cdot \sqrt{5}}{2}$

A seguir, será verificado para:

$$n=1$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$n=2$$

$$\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$n=3$$

$$\alpha^3 = \alpha^2 \cdot \alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{4+2\sqrt{5}}{2}$$

Foram verificadas as propriedades envolvendo apenas os valores de alfa e, assim, também encontramos relações entre os elementos positivos da Sequência de Lucas com a Sequência de Fibonacci.

Da mesma maneira, será feito para os valores de β e os elementos das sequências de Lucas e de Fibonacci, a saber:

- $\beta^n = \frac{L_n - F_n \cdot \sqrt{5}}{2}$

$$n=1$$

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$n=2$$

$$\beta^2 = \beta \cdot \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$n=3$$

$$\beta^3 = \beta^2 \cdot \beta = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{4-2\sqrt{5}}{2}$$

Como já havia sido citado, a fórmula de Binet é um dos caminhos para chegar à relação $L_{-n} = (-1)^n \cdot L_n$. Pensando nisso, fizemos a seguinte questão:

3. É possível caracterizar, matematicamente, a relação $L_{-n} = (-1)^n \cdot L_n$ através da fórmula de Binet?

Todos os estudantes conseguiram fazer essa questão, na figura 23, veja a resposta do Estudante 3, com a explicação:

“Pegando a fórmula de Binet $L_n = \alpha^n + \beta^n$ e tornando os índices negativos teremos a seguinte fórmula $L_{-n} = \alpha^{-n} + \beta^{-n}$, em seguida manipulando de acordo com a regra para expoentes negativos e em seguida substituindo pelas relações estudadas na questão anterior”.

Figura 22 - Utilizando as relações para validar a relação

$$\begin{aligned}
 L_{-n} &= \alpha^{-n} + \beta^{-n} \\
 L_{-n} &= \frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n} \\
 L_{-n} &= \frac{\beta^n + \alpha^n}{\alpha^n \cdot \beta^n}, \text{ como } \alpha^n + \beta^n = L_n \text{ e } \alpha^n \cdot \beta^n = (\alpha \cdot \beta)^n = (-1)^n \\
 L_{-n} &= \frac{L_n}{(-1)^n} = (-1)^n \cdot L_n. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Fonte: elaborado pela autora.

Assim, foi finalizada a terceira situação didática, todos compartilharam suas respostas e tiraram suas dúvidas.

4.1.4 Quarta situação didática

Na quarta aplicação de uma situação didática, exploramos as propriedades com matrizes, como já havia sido trabalhado o comportamento, a relação de recorrência, a extensão para os inteiros e a fórmula de Binet, foi feita uma revisão de tudo para que, assim, fosse iniciado o conteúdo de matriz.

Desse modo, fizemos a seguinte questão:

1. De acordo com a relação de recorrência $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ e sabendo os elementos da sequência, é possível caracterizar matrizes para a Sequência de Lucas?

Logo, será exposta a resposta do discente 6, em que o mesmo toma uma matriz como a identidade da SL e, em seguida, faz substituições, como veremos abaixo.

Figura 23 - Validação da representação matricial

Admitindo a matriz: $A_L = \begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix}$ teremos:

$L = \{L_{-3}, L_{-2}, L_{-1}, L_0, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5\}$.

$L = \{-4, 3, -1, 2, 1, 3, 4, 7, 11, \dots\}$.

Para $n = -2$:

$$A_L = \begin{pmatrix} L_{-3} & L_{-2} \\ L_{-2} & L_{-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_L) = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow 4 - 9 = -5$$

Para $n = -1$:

$$A_L = \begin{pmatrix} L_{-2} & L_{-1} \\ L_{-1} & L_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_L) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow 6 - 1 = 5$$

Para $n = 2$:

$$A_L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_2 & L_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_L) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow 4 - 9 = -5$$

Para $n = 3$:

$$A_L = \begin{pmatrix} L_2 & L_3 \\ L_3 & L_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_L) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \Rightarrow 21 - 16 = 5$$

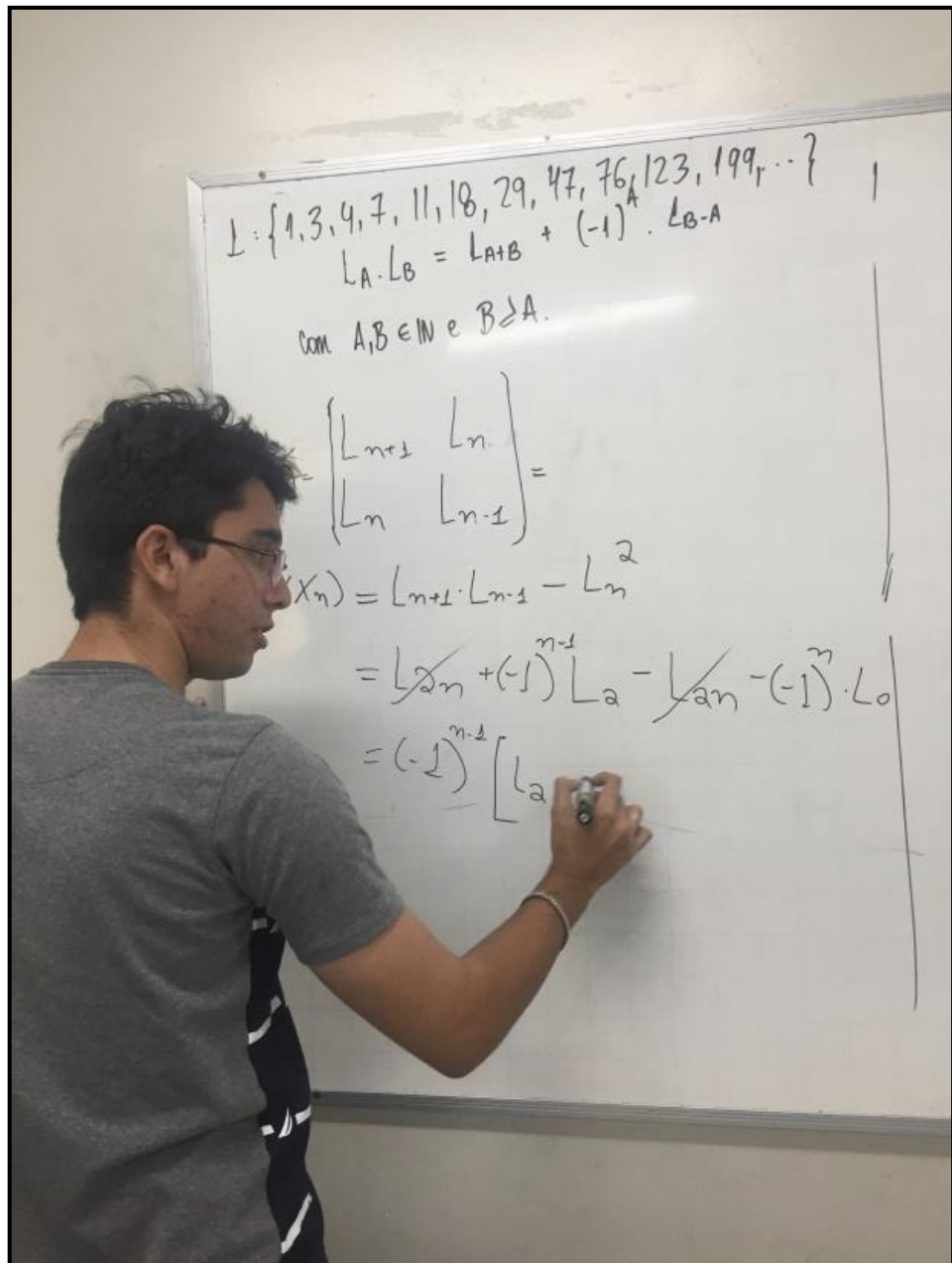
Fonte: elaborado pela autora.

Após encontrar a matriz que representa a Sequência de Lucas, o Estudante 6 fez a conclusão subsequente:

“podemos concluir assim, que o determinante assume o valor 5 quando n for ímpar(positivo ou negativo), e assume o valor de -5 quando n for par (positivo ou negativo)”.

A próxima imagem mostra o aluno em fase de validação de sua resposta para a definição do que foi dado anteriormente. Ele faz a demonstração:

Figura 24 - Momento de validação das propriedades das matrizes



Fonte: elaborado pela autora.

Dessa maneira, foi finalizada a quarta situação didática e os alunos disseram que teriam outras propriedades que eles estavam encontrando nos estudos em casa, por isso, criamos outra situação com a intenção de fazermos uma revisão.

4.1.5 Quinta situação didática

Todo o conteúdo proposto, para a aplicação da pesquisa, já tinha sido exposto e os estudantes já tinham feito as reflexões. No entanto, foi necessária uma revisão, para que algo que não foi citado, anteriormente, seja estudado. Assim, utilizamos, como critério, os conteúdos

que os envolvidos, na pesquisa, sentiram mais dificuldade para responder e iniciamos com a pergunta:

1. Sabendo que a sequência matricial de Lucas é:

$$X_n = \begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix}$$

- a) É possível extrair alguma propriedade a partir do determinante das matrizes obtidas pela soma e/ou multiplicação da sequência matricial?

Para a resolução dessa questão, escolhemos a resposta do Estudante 5, pois foi bem detalhista, veja nas figuras 25 e 26.

Figura 25 - Validação das somas de matriz

Soma de $X_n + X_n \Rightarrow \begin{bmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{bmatrix} = 2X_n$

Para $n=2$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 36 = -20.$$

Para $n=3$, temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 14 \end{vmatrix} = 74 - 64 = 20.$$

Fonte: elaborado pela autora.

O Estudante 5 justificou sua resposta concluindo que:

“podemos concluir assim, que o determinante da soma das matrizes assume o valor 20 quando n for ímpar(positivo ou negativo), e assume o valor de -20 quando n for par (positivo ou negativo)”.

Figura 26 - Validação da multiplicação de matriz

Multiplicação

Para $n=2$

$$\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ l_2 & l_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ l_2 & l_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot l_1 + l_2 \cdot l_2 & l_1 \cdot l_2 + l_2 \cdot l_3 \\ l_2 \cdot l_1 + l_3 \cdot l_2 & l_2 \cdot l_2 + l_3 \cdot l_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} 10 & 15 \\ 15 & 25 \end{vmatrix} = 250 - 225 = 25.$$

Para $n=3$.

$$\begin{bmatrix} l_2 & l_3 \\ l_3 & l_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_2 & l_3 \\ l_3 & l_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \cdot l_2 + l_3 \cdot l_3 & l_2 \cdot l_3 + l_3 \cdot l_4 \\ l_3 \cdot l_2 + l_4 \cdot l_3 & l_3 \cdot l_3 + l_4 \cdot l_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 25 & 40 \\ 40 & 65 \end{bmatrix}$$

Fonte: elaborado pela autora.

Já para a multiplicação das matrizes, o Estudante 5 explicou:

“ Para a propriedade da multiplicação de matrizes, temos que o determinante da sua matriz resultante é 25”.

- b) Já provamos que a matriz X_n é válida para $n \in \mathbb{N}$. Verifique e demonstre se a sequência matricial é válida para $n \in \mathbb{Z}$.

Na figura 27, o Estudante 1 faz uma substituição, provando que é possível as matrizes com $n \in \mathbb{Z}$, como foi dito na situação didática anterior.

Figura 27 - Momento de ação para matriz com $n \in \mathbb{Z}$

b)

$$X_n = \begin{pmatrix} l_{n-1} & l_n \\ l_n & l_{n+1} \end{pmatrix}$$

para $n = -1$

$$X_{-1} = \begin{pmatrix} l_{-2} & l_{-1} \\ l_{-1} & l_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Fonte: elaborado pela autora.

E como foi dito na situação didática anterior:

Se n for par, o $\det(X_n) = -5$.

Se n for ímpar, o $\det(X_n) = 5$.

Dando continuidade à situação didática intitulada Revisão, fomos para as relações entre α e β , dessa forma, fizemos essa questão:

2. Conhecendo os valores de α e β , verifique se é possível:

a) $\alpha^{-n} = (-1)^n \cdot \beta^n$ e $\beta^{-n} = (-1)^n \cdot \alpha^n$

Para responder a essa pergunta, os estudantes utilizaram os valores α e β , como também as relações das aulas anteriores.

Figura 28 - Validação das relações $\alpha^{-n} = (-1)^n \cdot \beta^n$ e $\beta^{-n} = (-1)^n \cdot \alpha^n$

$$\alpha = -\frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{-1 \cdot (1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{-1+\sqrt{5}}{1-5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{-4} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

$$\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$(-1)^n \cdot \beta^n \cdot \alpha^n = \frac{(1+\sqrt{5})^n}{2^n} \cdot \frac{(1-\sqrt{5})^n}{4^n} = \frac{[(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})]^n}{2^n \cdot 4^n} = \frac{(1-5)^n}{2^n \cdot 4^n} = \frac{(-4)^n}{2^n \cdot 4^n} = \frac{(-1)^n \cdot 4^n}{2^n \cdot 4^n} = \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{2^n \cdot 2^{2n}} = (-1)^n = (-1)^n \cdot \frac{\beta^n \cdot \alpha^n}{(-1)^n} = (-1)^n \cdot (-1)^n = (-1)^{2n} = 1$$

Logo, já que $(-1)^n \cdot \beta^n \cdot \alpha^n = 1$, como $\alpha^{-n} \cdot \alpha^n = 1$, então $(-1)^n \cdot \beta^n = \alpha^{-n}$

$$\beta^{-n} = (-1)^n \alpha^n$$

Como vimos no item anterior, $(-1)^n \cdot \alpha^n \cdot \beta^n = 1$

Além disso, $\beta^n \cdot \beta^{-n} = 1$

Portanto, $\beta^n \cdot \beta^{-n} = (-1)^n \cdot \alpha^n \cdot \beta^n \Rightarrow \beta^{-n} = (-1)^n \alpha^n$

Fonte: elaborado pela autora.

b) É possível encontrar outras relações entre α e β ? Quais?

Figura 29 - Validação das relações α e β

Handwritten mathematical derivations for the validation of α and β :

$$\begin{aligned} c) \alpha + \beta &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \alpha - \beta &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \\ \alpha \cdot \beta &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{5}^2}{4} = -1 \\ \frac{\alpha}{\beta} &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right) = \frac{2+2\sqrt{5}}{2-2\sqrt{5}} \cdot \frac{2+2\sqrt{5}}{2+2\sqrt{5}} = \frac{2^2+8\sqrt{5}+(2\sqrt{5})^2}{2^2-(2\sqrt{5})^2} = \frac{4+8\sqrt{5}+20}{4-20} \\ &= \frac{24+8\sqrt{5}}{-16} = -\frac{3+\sqrt{5}}{2} = (-1)\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = -\alpha-1 \\ \alpha^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \alpha+1 \end{aligned}$$

Fonte: elaborado pela autora.

3. Temos a seguinte relação de recorrência: $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ para $n \in \mathbb{N}$. Sabendo disso, demonstre a relação de recorrência da extensão da Sequência de Lucas para os números inteiros, $n \in \mathbb{Z}$.

Quando foi passada essa questão, anteriormente, os estudantes tiveram dificuldade e não conseguiram resolver, no entanto, após as situações didáticas, eles conseguiram resolver, veja na figura 31.

Figura 30 - Validação da relação de recorrência $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ para $n \in \mathbb{N}$

03) $L_{n+1} = L_n + L_{n-1} \quad (: L_n)$

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} = 1 + \frac{L_{n-1}}{L_n}$$

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} = 1 + \frac{1}{\frac{L_n}{L_{n-1}}}$$

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} = x_n, \quad \frac{L_n}{L_{n-1}} = x_{n+1}$$

$$x_n = 1 + \frac{1}{x_{n+1}}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = x$ como o x_n converge para o número x o seu sucessor também converge para esse número, pois o x_n pertence a uma sequência.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_{n+1} = x.$$

$$x = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{x+1}{x} \Rightarrow x^2 = x+1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\Delta = 5$$

caso temos $L_n = \alpha^n + \beta^n \quad n \in \mathbb{Z}$

$$L_{-n} = \alpha^{-n} + \beta^{-n} \Rightarrow L_{-n} = \frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n} \Rightarrow L_{-n} = \frac{\alpha^n + \beta^n}{(\alpha\beta)^n}$$

$$\Rightarrow L_{-n} = \frac{\alpha^n + \beta^n}{(-1)^n} \Rightarrow L_{-n} = (-1)^n \cdot (\alpha^n + \beta^n) \Rightarrow \boxed{L_{-n} = (-1)^n \cdot L_n}$$

Fonte: elaborado pela autora.

Para concluirmos as situações didáticas, fizemos uma reflexão sobre a importância da disciplina de História da Matemática, como também sobre a relevância da pesquisa aplicada e, por fim, sobre as dificuldades em responder às questões da pesquisa. E, assim, fizemos a questão:

1. Qual a importância da disciplina de História da Matemática para sua formação?

Estudante 1: "É importante para conhecermos os matemáticos que marcaram a história da matemática assim conhecendo um pouco dos seus pensamentos e de suas ideias, além disso, é importante para desenvolver nosso próprio pensamento tentando descobrir coisas novas ou já descobertas, mas que ainda não era do nosso conhecimento".

Estudante 2: "A disciplina de história da matemática traz a tona fatos históricos abordados com uma teoria apropriada, abrangendo conhecimentos diversos, o que agrega na formação acadêmica".

Estudante 3: "A disciplina é importante, pois contribui complementando outros currículos como cálculo, matemática discreta e teoria dos números, dessa forma ela

consegue concatenar de forma mais prática os conteúdos estudados no curso, acrescentando nossos conhecimentos”.

Estudante 4: “A disciplina é de extrema importância em nossa formação acadêmica, pois além de nos auxiliar a explorar conteúdos que pouco são abordado em nossa grade curricular, complementam nosso conhecimento sobre vários matemáticos e conteúdos”.

Estudante cinco: “A disciplina de história da matemática é importante pois trata de como a matemática vem se desenvolvendo e sendo aplicadas nas mais diversas áreas de pesquisa. É essencial, também conhecer as dificuldades que existiam na época dos matemáticos, o contexto histórico das mais importância e brilhantismo nas teorias desenvolvidas”.

Estudante 5: “A disciplina tem grande importância para nossa formação enquanto professores, pois é importantes conhecer os conteúdos matemáticos em vários aspectos”.

Estudante 6: “Com a disciplina de história da matemática, estamos tendo contato com vários conteúdos e também conhecendo a história de alguns matemáticos que contribuíram para a matemática que hoje estudamos”.

Ficou claro, nas falas dos estudantes, que todos reconhecem a importância da disciplina de História da Matemática e as suas contribuições para a formação inicial dos professores de Matemática.

2. Qual a relevância do estudo da Sequência de Lucas em sua prática docente? Quais conteúdos matemáticos contribuíram para a resolução das questões?

Estudante 1: “Foi muito importante, pois facilitou a compreensão de novos conteúdos matemáticos que envolve sequência.

Foi utilizado os conhecimentos adquiridos no estudo da sequência de Fibonacci”.

Estudante 2: “O estudo da sequência de Lucas engloba vários resultados importantes, atrelados a uma das sequências mais vistas que é a de Fibonacci. A sequência de Lucas pode ser abordada em vários níveis de ensino, progressões, limites, matrizes e determinantes”.

Estudante 3: “Contribuiu para ampliar os conhecimentos em outras sequências, que tem comportamento similar a sequência de Fibonacci. Conteúdos trabalhados foram: álgebra linear, cálculo de limites”.

Estudante 4: “é uma sequência interessante a ser estudada e explorada, com propriedades importantes que incentivam no conhecimento sobre essa sequência. O estudo de sequências e progressões matemáticas”.

Estudante 5: “A importância do estudo da sequência de Lucas na prática docente se dá pelo fato de utilização de elementos que você já tem para chegar ao que queremos pensamentos também utilizando no estudo das progressões aritméticas. Os conteúdos adquiridos nos estudos sobre sequência de Fibonacci”.

3. Você teve dificuldade em desenvolver alguma propriedade da Sequência de Lucas?

Estudante 1: “Não tive dificuldade, foi mais a questão do tempo para descobrir os padrões corretos das atividades”.

Estudante 2: “Sim, na caracterização da sequência de Lucas em matrizes”.

Estudante 3: “Sim, alguns passos da resolução da sequência não ficar bem fixos assim tive um pouco de dificuldade”.

Estudante 4: “Sim, relacionada a matriz da sequência de Lucas”.

Estudante 5: “sim, a parte matricial”.

Estudante 6: “sim, principalmente em organizar o pensamento e relacionar as propriedades”.

4.1.6 Construção e Descrição da Sexta situação didática

Para iniciar a situação didática sobre a Sequência Polinomial de Lucas, foi feita uma revisão com os conteúdos abordados anteriormente e, em seguida, foi dada a seguinte definição:

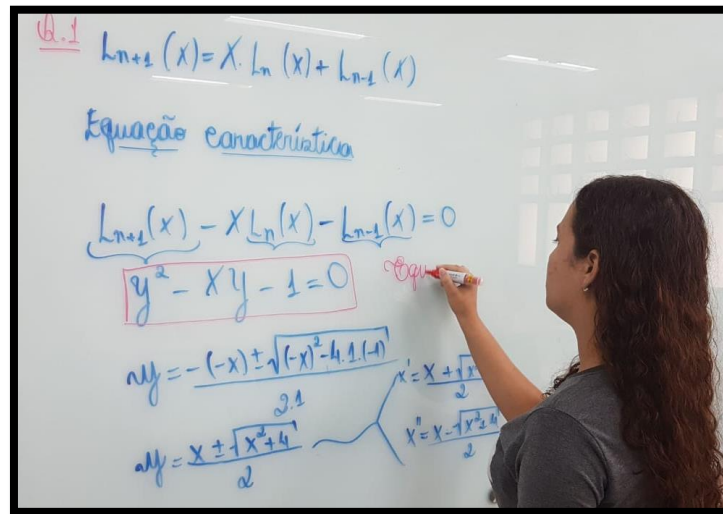
DEFINIÇÃO: De acordo com Bicknell (2013), a Sequência Polinomial de Lucas - SPL $(L_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, em que $x \in \mathbb{R}$, é definida por:

$$\begin{cases} L_0(x) = 2 \\ L_1(x) = x \\ L_{n+1}(x) = x \cdot L_n(x) + L_{n-1}(x) \end{cases}$$

Após a definição apresentada, e os estudantes terem feito uma pequena roda de conversa para abordar os conteúdos já estudados e essa nova definição, foi proposta a primeira questão:

Questão 1: De acordo com a definição anterior, estabelecida para a Sequência dos Polinômios de Lucas, é possível encontrar uma equação característica do 2º grau? Em caso afirmativo, determine a equação e calcule suas raízes.

Figura 31 - Validação da equação característica dos polinômios de Lucas



Fonte: elaborado pela autora.

A Estudante 6 encontrou a equação característica, com ajuda da definição e a relação de recorrência da Sequência de Lucas. O processo feito pela aluna será descrito a seguir:

$$L_{n+1}(x) = x \cdot L_n(x) + L_{n-1}(x)$$

$$L_2(x) = x \cdot L_1(x) + L_0(x)$$

$$L_3(x) = x \cdot L_2(x) + L_1(x)$$

$$y^2 - xy - 1 = 0$$

$$y = \frac{x \pm \sqrt{(-x)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$y' = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} = \alpha$$

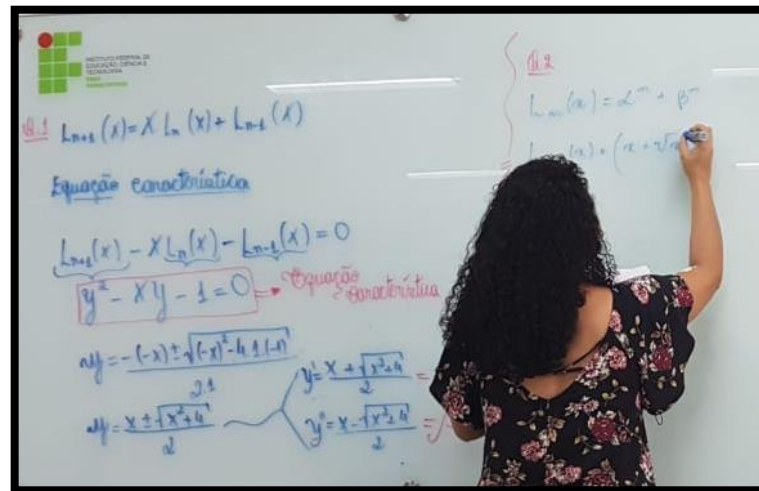
$$y'' = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2} = \beta$$

A mesma fez o seguinte relato: “o x é um polinômio arbitrário, agora para essa sequência polinomial ele tá assumindo um valor real. Então ao encontrarmos as raízes dessa equação característica o X vai ser o valor de b ”.

Após encontrar a equação característica, a aluna 6 descobriu as raízes da Sequência Polinomial de Lucas, que podem ajudar em outras propriedades. Assim, prosseguimos com outras perguntas.

Questão 2: Estabelecer a fórmula de Binet para a sequência anterior.

Figura 32 - Validação da fórmula de Binet para SPL



Fonte: elaborado pela autora.

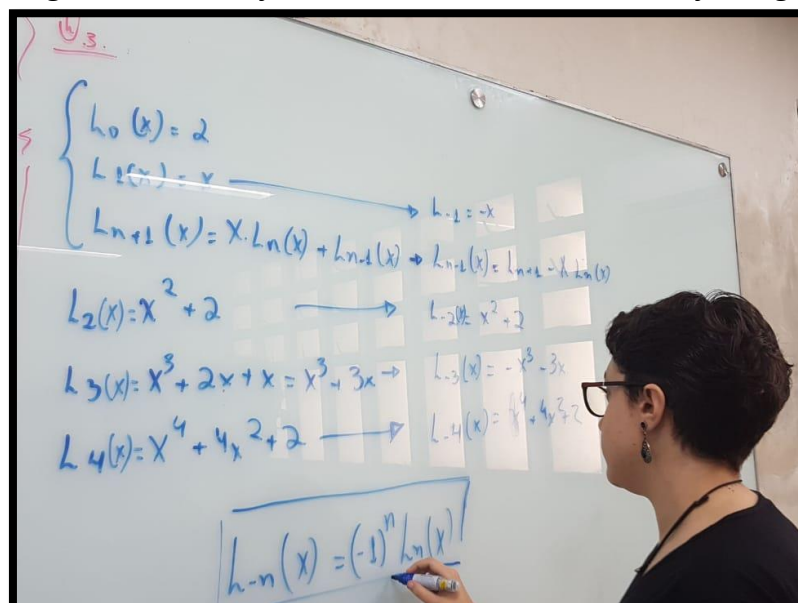
Utilizando as raízes encontradas na questão anterior, como podemos ver na figura 32, a aluna fez substituições e, assim, encontrou a fórmula de Binet para a Sequência Polinomial de Lucas, veja:

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

$$L_n = \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} \right)^n + \left(\frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2} \right)^n$$

Questão 3: Do mesmo modo, é possível obter uma Sequência Polinomial de Lucas estendida com subscritões negativas?

Figura 33 - Validação da SPL estendida com subscritão negativa



Fonte: elaborado pela autora.

Por meio de indução matemática, a aluna 3 encontrou a extensão para os inteiros da Sequência Polinomial de Lucas.

$$L_{-n}(x) = (-1)^n \cdot L_n(x)$$

4.1.7 Sétima situação didática

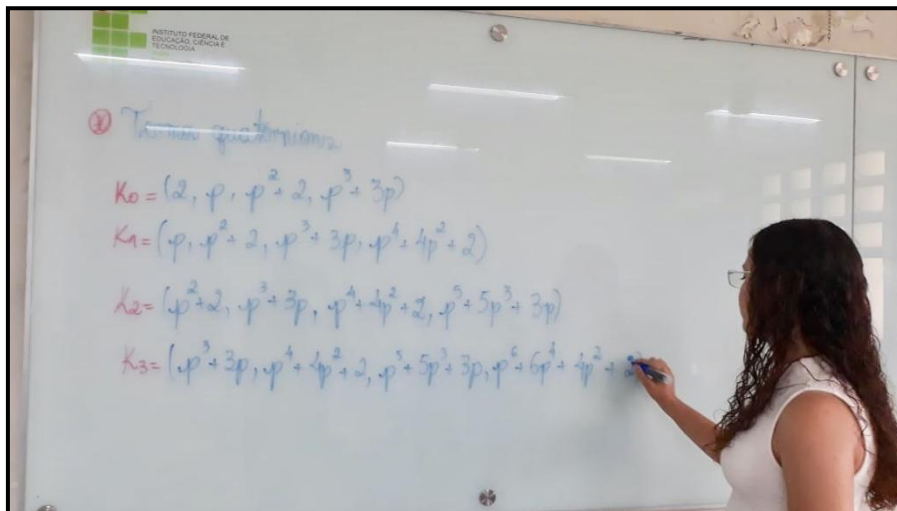
A última situação didática foi um pouco de revisão das aulas anteriores e a finalização das aplicações sobre a Sequência Generalizada de Lucas. Tivemos, como tema final, os quatérnions de Lucas, como os alunos já tinham os estudos anteriores e a maturidade matemática, foi mais fácil resolver as indagações dessa última situação didática.

Iniciamos os questionamentos apresentando os termos iniciais, para que, em seguida, eles construíssem os termos posteriores e, depois, as indagações que fossem surgindo.

Dessa forma, temos como primeira questão:

Questão 1: Dados os dois primeiros termos dos quatérnions da Sequência de Lucas, $K_0 = (2, p, p^2 + 2, p^3 + 3p)$ e $K_1 = (p, p^2 + 2, p^3 + 3p, p^4 + 4p^2 + 2)$, defina os próximos termos.

Figura 34 - Validação dos quatérnions da Sequência de Lucas



Fonte: elaborado pela autora.

Começamos apresentando os dois primeiros termos dos quatérnions da Sequência de Lucas, os alunos tiveram facilidades em encontrar os termos seguintes, pois os conhecimentos adquiridos, nas aulas anteriores, contribuíram bastante.

Portanto, podemos concluir, na última situação didática, que, com a Sequência de Lucas, podemos abordar diversos conteúdos matemáticos. Isso foi possível de ser desenvolvido na disciplina de História da Matemática, pois foram trabalhados os matemáticos que colaboraram nos estudos em diversos momentos distintos e os conteúdos abordados.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Para a validação interna da pesquisa, é preciso uma análise dos dados obtidos durante o momento da experimentação, vale ressaltar que a Engenharia Didática possui dois tipos de validação: interna e externa. Para esta pesquisa, a validação foi interna, pois só foram analisados os dados dos alunos envolvidos no estudo como foi apresentado na seção anterior.

Apresentaremos a caracterização da pesquisa, de acordo com suas etapas de: análise preliminar, concepções e análises *a priori*, experimentação, análise *a posteriori* e validação, conforme a Engenharia Didática vinculada à Teoria das Situações Didáticas, como metodologia de pesquisa e teoria de ensino.

Na primeira etapa da pesquisa, que são as análises prévias, fizemos um levantamento bibliográfico sobre a Sequência de Lucas em uma perspectiva matemática, enfatizando a fórmula de Binet como modelo de generalização e extensão.

Posteriormente, na concepção de análises *a priori*, analisamos os conteúdos que se relacionam com a Sequência de Lucas. Desse modo, construímos uma caracterização e uma fundamentação que foram de grande importância para a elaboração das situações didáticas.

No terceiro momento, que é a fase de experimentação, tivemos como suporte a Teoria das Situações Didáticas, a saber: ação, formulação, validação e institucionalização.

A seguir, na tabela 5, será apresentada uma categorização dos momentos de resolução das situações didáticas. A validação interna, deste estudo, foi feita com uma comparação das fases de análise *a priori* e *a posteriori*, fundamentadas nos dados coletados na experimentação.

Tabela 7 - Categorização dos momentos de resolução das situações didáticas (continua)

Situação didática 1	
AÇÃO	Estabelecer uma relação para os termos da Sequência de Lucas.
FORMULAÇÃO	Construção da relação recorrente: $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}.$
VALIDAÇÃO	Determinar os termos da Sequência de Lucas.
INSTITUCIONALIZAÇÃO	Generalização da relação de recorrência da Sequência de Lucas e a relação com a Sequência de Fibonacci.
Situação didática 2	
AÇÃO	Estabelecer os termos da Sequência de Lucas: (continuação) inteiros.
FORMULAÇÃO	Reconhecimento do comportamento da Sequência de Lucas estendida aos inteiros.

VALIDAÇÃO	Demonstração, por indução matemática, da relação: $L_{-n} = (-1)^n \cdot L_n$
INSTITUCIONALIZAÇÃO	Generalização da $L_{-n} = (-1)^n \cdot L_n$ para $(L_{-n})_{n \in \mathbb{Z}}$.
Situação didática 3	
AÇÃO	Demonstração, por indução matemática, da relação da equação característica $x^2 - x - 1 = 0$ e das relação entre as raízes denominadas α e β .
FORMULAÇÃO	Escrita da fórmula de Binet: $L_n = \alpha^n + \beta^n$
VALIDAÇÃO	Demonstração da relação $L_{-n} = (-1)^n \cdot L_n$ a partir da fórmula de Binet.
INSTITUCIONALIZAÇÃO	Formalização e generalização da relação $L_{-n} = (-1)^n \cdot L_n$ para $(L_{-n})_{n \in \mathbb{Z}}$.
Situação didática 4	
AÇÃO	A partir da relação $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, caracterizar a matriz da Sequência de Lucas.
FORMULAÇÃO	Verificação das propriedades das matrizes.
VALIDAÇÃO	Demonstração dos resultados dos determinantes das operações realizadas com as matrizes da Sequência de Lucas.
INSTITUCIONALIZAÇÃO	Generalização das matrizes da Sequência de Lucas.
Situação didática 5	
AÇÃO	Reconhecer o desenvolvimento do processo histórico nas pesquisas da Sequência de Lucas.
FORMULAÇÃO	Identificação da aplicação e dos conhecimentos adquiridos na prática dos professores em formação inicial.
VALIDAÇÃO	Compreender o processo histórico e evolutivo da Sequência de Lucas.
INSTITUCIONALIZAÇÃO	Formalização e generalização da Sequência de Lucas e suas propriedades.
Situação didática 6	
AÇÃO	Identificação da Sequência Polinomial de Lucas.
FORMULAÇÃO	Reconhecer a equação característica, as raízes, a fórmula de Binet.
VALIDAÇÃO	Demonstração por indução matemática da relação $L_{n+1}(x) = X \cdot L_n(x) + L_{n-1}(x)$

INSTITUCIONALIZAÇÃO	Formulação e generalização da Sequência Polinomial de Lucas. (conclusão)
Situação didática 7	
AÇÃO	Identificação dos Quatérnions da Sequência de Lucas.
FORMULAÇÃO	Construção da relação dos Quatérnions da Sequência de Lucas.
VALIDAÇÃO	Demonstração, por indução matemática, da relação dos Quatérnions da Sequência de Lucas.
INSTITUCIONALIZAÇÃO	Formulação e generalização do Quatérnion da Sequência de Lucas.

Fonte: Elaboração da autora.

Contudo, vale ressaltar que, no período de experimentação, surgiram alguns obstáculos epistemológicos e cognitivos. Nesse caso, alguns alunos apresentaram dúvidas e dificuldades em desenvolver algumas situações didáticas.

Sobre a primeira situação didática, os alunos conseguiram, a partir da apresentação da história que originou a Sequência de Lucas e seus primeiros termos, construir relações e destacar algumas propriedades. Os alunos compararam a SL com a SF, pois era o conteúdo que eles tinham estudado anteriormente e isso ajudou muito no desenvolvimento da segunda situação didática. Desse modo, alcançamos nosso objetivo para a primeira aula.

A segunda situação didática, em que abordamos as relações da Sequência de Lucas com a Sequência de Fibonacci, os alunos, por meio do estudo dos termos das duas sequências, conseguiram desenvolver muitas propriedades, que, para eles, até então, eram desconhecidas. Seguindo com a possibilidade da extensão da SL a índices inteiros, com as propriedades vistas anteriormente, surgiram alguns nomes para a possibilidade de extensão da SL, tivemos um bom debate relativo aos modelos constituídos. Nesse sentido, alcançamos o objetivo da segunda situação didática.

Relativo à terceira situação, podemos caracterizar que os alunos, a partir dos estudos anteriores e com as questões norteadoras, obtiveram a equação característica e, com o estudo de suas raízes, formularam o termo geral da SL, a fórmula de Binet e, por meio de alguns cálculos, perceberam a utilização da mesma e conseguiram a extensão da SL a índices inteiros. Vale destacar que os alunos tiveram dificuldade para provar essa extensão.

Sobre a quarta situação didática, os alunos, inicialmente, tiveram dificuldades de encontrar uma possível caracterização de matrizes para a Sequência de Lucas, porém, com as questões norteadoras e com o auxílio da relação de recorrência, foi possível encontrar propriedades envolvendo as matrizes da SL.

Para a quinta situação didática, apresentamos uma revisão, pois alguns alunos estavam com dificuldades em alguns problemas, foi muito proveitosa para a continuidade do estudo, foi esclarecedora e, por meio de questões, conseguimos discussões bem interessantes sobre o que já tínhamos estudado. Dessa forma, alcançamos nosso objetivo para a quinta situação didática.

Quanto à sexta situação didática, podemos caracterizar que os alunos conseguiram obter a Sequência Polinomial de Lucas. Para essa situação, tivemos que fazer algumas intervenções para orientar os alunos. Posteriormente às intervenções, observamos que os alunos conseguiram ir além do que tinha sido solicitado, apresentando propriedades para extensão da sequência polinomial a índices inteiros. Com isso, nosso objetivo, para a sexta situação didática, foi alcançado.

Na sétima situação didática, os alunos já estavam mais confortáveis na resolução das questões e observamos que eles não tiveram dificuldades em encontrar a relação de recorrência para os quaternions de Lucas, conhecendo os cinco primeiros termos e encontrando os termos seguintes. Desse modo, alcançamos nosso objetivo para a sétima situação didática.

Assim, fizemos uma análise das situações didáticas, como já falamos anteriormente, que foram organizadas e aplicadas, fundamentadas na Teoria das Situações Didáticas. Portanto, com base nas discussões anteriores, destacamos a validade da utilização da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa e a TSD como teoria de ensino. À vista disso, foi possível apresentar a identificação, exploração e a descrição de propriedades relativas à Sequência de Lucas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com os objetivos da pesquisa, apresentamos elementos de um estudo relativo aos modelos de generalização da Sequência Generalizada de Lucas, que promoveram a identificação, a descrição e a exploração de suas propriedades, com direcionamentos da Engenharia Didática e da Teoria das Situações Didáticas.

Tanto a Engenharia Didática quanto a Teoria das Situações Didáticas, possibilitam aos professores seja em formação inicial ou continuada, articular pesquisa e ação didática em sala de aula, para planejar suas estratégias de ensino.

Inicialmente, na fase de análises prévias, realizamos um levantamento e uma investigação bibliográfica, em que foi possível realizar um resgate histórico por meio de artigos sobre a análise e desenvolvimento do modelo de generalização da Sequência de Lucas,

como também a fórmula de Binet, outras extensões e relações com outros conteúdos matemáticos, alcançando, assim, o primeiro objetivo específico da pesquisa.

Vale ressaltar que, desse grupo de modelos, podemos destacar: Fórmula de Binet, extensão aos inteiros, função geradora da Sequência de Lucas, relação com a Sequência de Fibonacci, Polinômio, número de k-Lucas, Matrizes e quatérnions.

No segundo momento, que são as análises *a priori* e, de acordo com o segundo objetivo específico da pesquisa, descrevemos uma estrutura direcionada para o ensino dos modelos observados, elaboramos as concepções e análises *a priori* de sete situações didáticas de alguns dos modelos da generalização da Sequência de Lucas.

Sobre o terceiro momento, que é a experimentação, o momento da prática em sala de aula, vale destacar que a aplicação foi realizada em sete situações didáticas com alunos da disciplina de História da Matemática, do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará –IFCE.

A aplicação seguiu os passos da Teoria das Situações Didáticas, que possibilitou a caracterização e a formulação de definições por parte dos estudantes participantes da pesquisa. Assim, atingimos o nosso terceiro objetivo específico.

Desse modo, a quarta fase da pesquisa, que é a análise *a posteriori* e validação, foi o momento de reunir, analisar e validar os dados obtidos na aplicação das sete situações didáticas.

À vista disso, as fases da organização da pesquisa, possibilitou:

- Mostrar a importância do estudo do processo de desenvolvimento dos conteúdos matemáticos;

- Ampliação dos conhecimentos para além do que é exigido na disciplina de História da Matemática e que contribuem de forma significativa para a formação inicial dos professores;
- Um estudo pormenorizado da generalização da Sequência de Lucas.

Assim sendo, alcançamos o objetivo geral da pesquisa: desenvolver elementos de um estudo relativo aos modelos de generalização da Sequência de Lucas, que promovam a identificação, a descrição e a exploração de suas propriedades.

Dessa maneira, esperamos que o trabalho desenvolvido venha contribuir de forma significativa para os estudos, que completem e contemplem não só a generalização da Sequência de Lucas, mas também assuntos que apresentem utilidade de futuras pesquisas.

REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, S. **A Teoria das Situações Didáticas**. São Paulo: PUC, 2004.
- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.
- ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem.**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012.
- ALMOULOUD, S.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 3, n. 1, p.62-77, 2008.
- ALVES, F.R.V. Engenharia didática (análises preliminares e análise a priori): o caso das equações diferenciais de segunda ordem. **Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista**, v, n. 2, p. 1-22, 2016a.
- ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.18, n.1, pp. 61-93, 2016b.
- ALVES, F. R. V. Didática das ciências e matemática (dcem): surgimento e implicações para a formação do professor. **Investigação em Ensino de Ciências**, v. 22, n. 3, p. 291-320, dez. 2017. Disponível em: < <http://dx.doi.org/10.22600/1518-8795.ienci2017v22n3p291>>. Acesso em: 5 jul. 2019.
- ARTIGUE, M. “**Ingénierie Didactique**”: Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 1988. v. 9.3, p. 281-308.
- ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 4. p. 193-217.
- BICKNELL, M. A primer for Fibonacci Numbers: part XIII. **The Fibonacci Quarterly**, v. 11, nº 5, p. 511 – 517, dez. 1973.
- BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. Tradução de Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 2008.
- CARLITZ, L.; FERNS, H.H. Some Fibonacci and Lucas identities. **Fibonacci Q**, v. 8, p. 61-73, 1970.
- D’ AMORE, B. **Elementos da didática da matemática**. Tradução de Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da física, 2007.
- D’, AMORE, B. **Epistemologia, didática e prática de ensino**. 2007. Disponível em: < <http://www.redalyc.org/html/2912/291221871010/>>. Acesso em: 5 jul. 2019.
- GUEDES, A. M. S. **Visão panorâmica da disciplina de história da matemática no atual movimento da educação básica no Ceará**. 2017. 50 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2017.

GUEDES, A. M. S. Generalized Lucas Sequences. **The Fibonacci Quartely**, [S.l.], v.15, n. 2, p. 131-140, apr. 1977. Disponível em: <<http://www.fq.math.ca/Scanned/15-2/hoggatt2.pdf>>. Acesso em: 16 maio 2018.

HOGGAT JUNIOR. V. **Fibonacci and Lucas numbers**. Santa Clara: The Fibonacci Association, 1969. Disponível em: <<http://www.fq.math.ca/Books/Complete/fibonacci-lucas.pdf>>. Acesso em: 16 maio 2018.

IAKIN, A.L. Generalized quaternions with quaternion components. **Fibonacci Q**, v. 15, p. 350-352, 1977.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas Numbers and Applications**. New York: John Willey and Sons, 2011.

LIMA, E. L. et. al. **A matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática: uma introdução**. 2. ed. São Paulo: Educ, 2002. p. 197-208.

MARTINEZ, L.; SALES, A. H. Convergence of Quotients of Consecutive Terms of a generalized Secondary Fibonacci Sequence. **International Mathematical Forum**, v. 6, n. 40, p. 1955-1964, 2011.

NATIONAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ROURKELA ODISHA. **Lucas sequence, its properties and generalizations**. [S.l.]: Department of Mathematics, 2013.

OLIVEIRA, R.R. **Engenharia Didática sobre o Modelo de Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci**: Relações Recorrentes n-dimensionais e representação Polinomiais e Matriciais. 2018. 220f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciências e Matemática, Fortaleza, 2018 .

POMMER, W. M. **A Engenharia Didática em sala de aula**: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares. São Paulo: [s.n.], 2013. 72 p.

SANTOS, A. A.; ALVES, F. R. V. A Engenharia Didática em articulação com a Teoria das Situações Didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de Matemática. **Acta Scientiae**, v.19, n. 3, maio/jun. 2017.