



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ**  
**IFCE CAMPUS FORTALEZA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**  
**– PPGECM**

**JOELMA ALVES RODRIGUES**

**O ENSINO DE GEOMETRIA COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA:  
UMA ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO PARA A OLIMPÍADA  
INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA SOB A PERSPECTIVA DA TEORIA DAS  
SITUAÇÕES DIDÁTICAS**

**FORTALEZA**

**2023**

JOELMA ALVES RODRIGUES

O ENSINO DE GEOMETRIA COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA: UMA  
ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO PARA A OLIMPÍADA INTERNACIONAL  
DE MATEMÁTICA SOB A PERSPECTIVA DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Dissertação apresentada ao curso de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PGECM) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) - Campus Fortaleza, como requisito para obtenção do Título de Mestre. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

Coorientador: Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Instituto Federal do Ceará - IFCE  
Sistema de Bibliotecas - SIBI  
Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

RODRIGUES, Joelma Alves.

O ENSINO DE GEOMETRIA COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA : UMA  
ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO PARA A OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE  
MATEMÁTICA SOB A PERSPECTIVA DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICA / Joelma Alves  
RODRIGUES. - 2023.

117 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática,  
Campus Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. FRANCISCO RÉGIS VIEIRA ALVES.

Coorientação: Prof. Dr. DANIEL BRANDÃO MENEZES.

1. Olimpíada Internacional de Matemática. 2. Teoria das Situações Didáticas. 3. Engenharia Didática  
de Formação. 4. Ensino de Geometria. 5. GeoGebra. I. Título.

---

CDD 510.07

JOELMA ALVES RODRIGUES

O ENSINO DE GEOMETRIA COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA: UMA  
ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO PARA A OLIMPÍADA INTERNACIONAL  
DE MATEMÁTICA SOB A PERSPECTIVA DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado  
em Ensino de Ciências e Matemática do  
Instituto Federal de Educação, Ciência e  
Tecnologia do Ceará (IFCE) - Campus  
Fortaleza, como requisito para obtenção do  
Título de Mestre. Área de concentração:  
Ensino de Matemática.

Aprovado (a) em: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves (Orientador)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – *Campus* Fortaleza

---

Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes (Coorientador)

Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)

---

Profa. Dra. Marluce Alves dos Santos (membro externo)

Universidade do Estado da Bahia (UNEB)

---

Profa. Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele (membro externo)

Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)

A Deus.

Aos meus pais, Antônia e  
Domingos (*inmemorian*).

Aos meus professores.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por tudo que fez e faz por mim e por me permitir concluir esta etapa da minha vida acadêmica que tanto almejei.

A minha família, em especial, a minha mãe Antônia, que sempre esteve comigo me dando forças para continuar a caminhada e colo todas as vezes que precisei. Aos meus irmãos e irmãs Gláucia, Juciney, Sirley, Alciney, Antônio, Bernardo e Edney, por todo o apoio, mesmo que indiretamente. A minha companheira Janieila Tibúrcio, pela paciência e motivação todos os dias, pela compreensão e por sempre acreditar em mim.

Ao meu orientador, professor Dr. Francisco Régis Vieira Alves, por não desistir de mim ao longo desses dois anos e por todos os conhecimentos compartilhados.

Ao meu coorientador, professor Dr. Daniel Brandão Menezes, por todas as suas contribuições, pela paciência e incentivo, sobretudo nos momentos difíceis dessa jornada.

Às professoras da banca, Dra. Francisca Cláudia Fernandes Fontenele e Dra. Marluce Alves dos Santos, pela disponibilidade e por suas valiosas contribuições, que com certeza vieram a contribuir para o meu crescimento profissional.

A todos os professores do PPGECEM/IFCE, pelo compromisso, pelos ensinamentos e contribuições no decorrer do meu processo formativo, o que certamente me motivou a continuar.

Aos meus amigos e colegas de estudo, em especial aos que me acompanharam de perto nesta batalha, Renata Teófilo, Arnaldo Dias, Carla Patrícia e Narla Matias, que vivenciaram comigo os desafios e me ajudaram a vencê-los. Agradeço o carinho, o apoio, o acolhimento, a paciência, os conselhos, os ensinamentos e as palavras motivadoras.

Às minhas amigas Andreline Coelho, Gabriela Fernandes, Káren Costa, Nathana Diniz, Simone Alves e Élide Jane, pelo apoio de todos os dias, pelas palavras de conforto, motivação e todo carinho que sempre demonstraram ter por mim. Aos meus amigos Diego Souza, Ramon Firmo e Paulo Vítor, que me ajudaram em momentos cruciais que precisei.

À Secretaria de Educação de Sobral, em especial ao Prof. Dr. Herbert Lima e à gestão da ETI Elda Cavalcante Lima, por proporcionarem a flexibilidade de minha carga horária, permitindo-me ter tempo para me dedicar ao mestrado.

“Le savoir constitué se présente sous des formes diverses, par exemple sous forme de questions et de réponses. La présentation axiomatique est une présentation classique des mathématiques.” (BROUSSEAU, 1986, p. 282).

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta didática desenvolvida com professores em formação inicial, baseada no uso de Problemas Olímpicos (PO) da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), visando relacionar a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e o ensino de geometria, em particular, o estudo dos triângulos. Essa relação é denominada de Situação Didática Olímpica (SDO) e representada pela expressão  $SDO = PO + TSD$ . O objetivo desta pesquisa foi investigar se as Situações Didáticas Olímpicas (SDO), com o auxílio do software GeoGebra, podem contribuir para a formação do professor de matemática ao preparar estudantes para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). A investigação foi estruturada com base na Engenharia Didática (ED). No entanto, devido aos participantes serem futuros professores utilizou-se a terminologia Engenharia Didática de Formação (EDF). A experimentação ocorreu na Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA) em Sobral - CE, com cinco estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, no formato grupo de estudos. A coleta de dados foi realizada por meio de um questionário, fotografias, registros de áudio e vídeo e produções no ambiente do GeoGebra. Com base nos resultados da pesquisa e na análise *a posteriori* e validação interna, percebeu-se que os professores em formação não apresentam uma base sólida sobre a Geometria presente nos problemas olímpicos internacionais. Durante o desenvolvimento das SDOs, cada participante foi, gradativamente, construindo seu conhecimento. E, no que se refere ao uso do GeoGebra, constatou-se pouco conhecimento vindo dos envolvidos. Ainda assim, foi possível verificar que esse *software* auxiliou os sujeitos na busca por estratégias de resolução. Conclui-se que a proposta apresentada por intermédio das SDOs, auxiliada pela utilização do *software* GeoGebra, contribuiu de forma satisfatória para a formação destes futuros professores de matemática no que se refere ao objeto de estudo explorado, viabilizando a discussão e abordagem de conhecimentos como circunferência inscrita no triângulo, desigualdade triangular, relação da potência de um ponto em relação à circunferência, Teorema de Pitágoras, entre outros.

**Palavras-chave:** Olimpíada Internacional de Matemática. Teoria das Situações Didáticas. Engenharia Didática de Formação. Ensino de Geometria. GeoGebra.

## ABSTRACT

This work presents a didactic proposal developed with teachers in initial training, based on the use of Olympic Problems (OP) from the International Mathematical Olympiad (IMO), aiming to relate the Theory of Didactic Situations (TDS) and the teaching of geometry, in particular, the study of triangles. This relationship is called Olympic Didactic Situation (ODS) and represented by the expression  $ODS = OP + TDS$ . The objective of this research was to investigate whether the Olympic Didactic Situations (ODS), with the help of the GeoGebra software, can contribute to the formation of the mathematics teacher by preparing students for the International Mathematical Olympiad (IMO). The investigation was structured based on Didactic Engineering (DE). However, due to the participants being future teachers, the terminology Didactic Engineering of Training (DET) was used. The experimentation took place at the Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA) in Sobral - CE, with five students of the Mathematics Degree course, in the format of a study group. Data collection was carried out through a questionnaire, photographs, audio and video recordings and productions in the GeoGebra environment. Based on the results of the research and on the posterior analysis and internal validation, it was noticed that the teachers in formation do not have a solid base on the geometry present in the international Olympic problems. During the development of the ODS, each participant gradually built up their knowledge. And, with regard to the use of GeoGebra, little knowledge was found from those involved. Even so, it was possible to verify that this software helped the subjects in the search for resolution strategies. It is concluded that the proposal presented through the ODS, aided by the use of the GeoGebra software, contributed satisfactorily to the training of these future mathematics teachers with regard to the object of study explored, enabling the discussion and approach of knowledge such as circumference inscribed in the triangle, triangular inequality, relation of the power of a point in relation to the circumference, Pythagoras theorem, among others.

**Keywords:** International Mathematical Olympiad. Theory of Didactic Situations. Didactic Engineering of Training. Geometry teaching. GeoGebra.

## LISTA DE FIGURAS

|           |                                                                                                                 |    |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1  | — Triângulo Didático .....                                                                                      | 21 |
| Figura 2  | — Diagrama representativo sobre a relação entre o saber e o conhecimento .....                                  | 25 |
| Figura 3  | — Mecanismo de cooperação entre pesquisadores, treinadores e professores na IDD .....                           | 28 |
| Figura 4  | — Descritores da Matriz de Referência de Matemática do Saeb, do 5º ano do Ensino Fundamental .....              | 36 |
| Figura 5  | — Descritores da Matriz de Referência de Matemática do Saeb, do 9º ano do Ensino Fundamental .....              | 37 |
| Figura 6  | — Descritores da Matriz de Referência de Matemática do Saeb, do 3º ano do Ensino Médio .....                    | 38 |
| Figura 7  | — Atividade sobre propriedades e comparação de triângulos .....                                                 | 39 |
| Figura 8  | — Atividade sobre semelhanças de figuras planas .....                                                           | 40 |
| Figura 9  | — Construção do enunciado do problema .....                                                                     | 46 |
| Figura 10 | — Demonstração da linha $BE$ como eixo de simetria .....                                                        | 47 |
| Figura 11 | — Aplicação do Teorema de Ptolomeu .....                                                                        | 48 |
| Figura 12 | — Demonstração de $AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$ .....                                                        | 49 |
| Figura 13 | — Construção do enunciado do problema .....                                                                     | 50 |
| Figura 14 | — Demonstração de $\overline{DJ} = \overline{JE}$ .....                                                         | 51 |
| Figura 15 | — Construção dos triângulos $\triangle FDB$ e $\triangle AKD$ .....                                             | 51 |
| Figura 16 | — Construção dos triângulos isósceles $\triangle CEG$ e $\triangle ALE$ .....                                   | 52 |
| Figura 17 | — Demonstrando que as cordas $\overline{FL}$ e $\overline{FB}$ tem o mesmo comprimento .....                    | 53 |
| Figura 18 | — Demonstrando que as cordas $\overline{KG}$ e $\overline{CG}$ tem o mesmo comprimento .....                    | 53 |
| Figura 19 | — Representação das equações (1) e (2) .....                                                                    | 55 |
| Figura 20 | — Demonstração de $\angle IBP = \angle ICP$ .....                                                               | 56 |
| Figura 21 | — Demonstração de $MB = MC = MI = MP$ .....                                                                     | 57 |
| Figura 22 | — Demonstração de $AP \geq AI$ .....                                                                            | 57 |
| Figura 23 | — Construção do enunciado do problema .....                                                                     | 58 |
| Figura 24 | — Construção dos pontos médios dos segmentos $BP, CQ, PQ, CA$ e $AB$ ....                                       | 59 |
| Figura 25 | — Construção do triângulo isósceles $\triangle KLM$ e dos ângulos $\angle LMP, \angle QPA$ e $\angle LKM$ ..... | 60 |

|           |   |                                                                                                                              |    |
|-----------|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 26 | — | Construção dos ângulos $\angle PQA$ e $\angle KLM$ .....                                                                     | 60 |
| Figura 27 | — | Demonstrando que os segmentos $OP$ e $OQ$ são iguais .....                                                                   | 61 |
| Figura 28 | — | Primeiro contato com a SDO1 por intermédio do GeoGebra .....                                                                 | 62 |
| Figura 29 | — | P3 utilizando o GeoGebra para verificar as medidas de cada lado dos triângulos $\triangle BCD$ e $\triangle EFA$ .....       | 67 |
| Figura 30 | — | P2 demonstrando que os triângulos $\triangle BCD$ e $\triangle EFA$ são equiláteros .....                                    | 68 |
| Figura 31 | — | Etapa de validação do sujeito P2 .....                                                                                       | 69 |
| Figura 32 | — | Etapa de validação do sujeito P5 (demonstração 1) .....                                                                      | 70 |
| Figura 33 | — | Etapa de validação do sujeito P5 (demonstração 2) .....                                                                      | 71 |
| Figura 34 | — | Primeiro contato com a SDO2 por intermédio da visualização no GeoGebra .....                                                 | 72 |
| Figura 35 | — | Momento de interação entre P3 e P1 na etapa de formulação .....                                                              | 73 |
| Figura 36 | — | Passos de 1 à 5 da formulação do sujeito P5 .....                                                                            | 74 |
| Figura 37 | — | Passos de 6 à 9 da formulação do sujeito P5 .....                                                                            | 75 |
| Figura 38 | — | Formulação do sujeito P2 .....                                                                                               | 75 |
| Figura 39 | — | Validação do sujeito P1, demonstrando que as retas $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ são paralelas ..... | 76 |
| Figura 40 | — | Validação do sujeito P5, demonstrando que as retas $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ são paralelas ..... | 77 |
| Figura 41 | — | Validação do sujeito P2, demonstrando que as retas $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ são paralelas ..... | 78 |
| Figura 42 | — | Contato inicial com a SDO3 .....                                                                                             | 78 |
| Figura 43 | — | Contato inicial com a SDO3 .....                                                                                             | 79 |
| Figura 44 | — | P2 verificando as igualdades $\angle PBA = \angle PBC$ e $\angle PCB = \angle PCA$ .....                                     | 80 |
| Figura 45 | — | Rascunho feito por P3 representando suas hipóteses .....                                                                     | 81 |
| Figura 46 | — | Validação do sujeito P2 .....                                                                                                | 82 |
| Figura 47 | — | Primeiro contato com a SDO4 por intermédio do GeoGebra .....                                                                 | 83 |
| Figura 48 | — | Tentativa realizada pelo participante P2 .....                                                                               | 83 |
| Figura 49 | — | Formulação do participante P4 .....                                                                                          | 84 |
| Figura 50 | — | Tentativa realizada pelo participante P5 .....                                                                               | 85 |
| Figura 51 | — | Validação realizada pelo participante P2 .....                                                                               | 86 |

## LISTA DE QUADROS

|                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Quadro 1 — Classificação do Brasil na IMO, de 2014 à 2023 .....                          | 33 |
| Quadro 2 — Situações didáticas propostas .....                                           | 44 |
| Quadro 3 — Cronograma de execução da experimentação do projeto de pesquisa .....         | 64 |
| Quadro 4 — Itens do questionário final .....                                             | 65 |
| Quadro 5 — Questões do questionário final .....                                          | 92 |
| Quadro 6 — Respostas à primeira questão do questionário final .....                      | 93 |
| Quadro 7 — Respostas à segunda questão do questionário final .....                       | 93 |
| Quadro 8 — Respostas à terceira questão do questionário final .....                      | 94 |
| Quadro 9 — Respostas à quarta questão do questionário final .....                        | 95 |
| Quadro 10 — Contribuições da SDO para a formação inicial do professor de matemática .... | 95 |

## LISTA DE SIGLAS

|      |                                                              |
|------|--------------------------------------------------------------|
| BNCC | Base Nacional Comum Curricular                               |
| ED   | Engenharia Didática                                          |
| EDF  | Engenharia Didática de Formação                              |
| IFCE | Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará |
| IMO  | Olimpíada Internacional de Matemática – sigla em português   |
| MMM  | Movimento da Matemática Moderna                              |
| NOIC | Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento                 |
| OBM  | Olimpíada Brasileira de Matemática                           |
| PCN  | Parâmetros Curriculares Nacionais                            |
| PDE  | Plano de Desenvolvimento da Educação                         |
| PO   | Problema Olímpico                                            |
| SAEB | Sistema de Avaliação Permanente da Educação Básica           |
| SDO  | Situação Didática Olímpica                                   |
| TSD  | Teoria das Situações Didáticas                               |
| UVA  | Universidade Estadual Vale do Acaraú                         |

## SUMÁRIO

|            |                                                                            |           |
|------------|----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>   | <b>INTRODUÇÃO .....</b>                                                    | <b>16</b> |
| <b>2</b>   | <b>REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO .....</b>                            | <b>20</b> |
| <b>2.1</b> | <b>Teoria das Situações Didáticas (TSD) .....</b>                          | <b>20</b> |
| 2.1.1      | <i>Situação de ação .....</i>                                              | 22        |
| 2.1.2      | <i>Situação de formulação .....</i>                                        | 22        |
| 2.1.3      | <i>Situação de validação .....</i>                                         | 23        |
| 2.1.4      | <i>Situação de institucionalização .....</i>                               | 24        |
| <b>2.2</b> | <b>Situação Didática Olímpica (SDO) .....</b>                              | <b>25</b> |
| <b>2.3</b> | <b>Engenharia Didática de Formação (EDF) .....</b>                         | <b>26</b> |
| <b>3</b>   | <b>ANÁLISES PRELIMINARES .....</b>                                         | <b>30</b> |
| <b>3.1</b> | <b>Análise de trabalhos relacionados às Olimpíadas de Matemática .....</b> | <b>30</b> |
| <b>3.2</b> | <b>Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) .....</b>                   | <b>32</b> |
| <b>3.3</b> | <b>O ensino de Geometria e o estudo dos triângulos .....</b>               | <b>34</b> |
| <b>3.4</b> | <b>O GeoGebra como recurso tecnológico .....</b>                           | <b>41</b> |
| <b>4</b>   | <b>ANÁLISE A PRIORI DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS .....</b>                      | <b>43</b> |
| <b>4.1</b> | <b>Descrição das Situações Didáticas .....</b>                             | <b>45</b> |
| 4.1.1      | <i>Situação Didática Olímpica 1 (SDO1) .....</i>                           | 45        |
| 4.1.2      | <i>Situação Didática Olímpica 2 (SDO2) .....</i>                           | 49        |
| 4.1.3      | <i>Situação Didática Olímpica 3 (SDO3) .....</i>                           | 54        |
| 4.1.4      | <i>Situação Didática Olímpica 4 (SDO4) .....</i>                           | 59        |
| <b>5</b>   | <b>EXPERIMENTAÇÃO .....</b>                                                | <b>63</b> |
| <b>5.1</b> | <b>Caracterização do lócus e sujeitos da pesquisa .....</b>                | <b>63</b> |
| <b>5.2</b> | <b>O grupo de estudos .....</b>                                            | <b>65</b> |
| <b>5.3</b> | <b>Descrição da experimentação .....</b>                                   | <b>66</b> |
| 5.3.1      | <i>Experimentação da Situação Didática Olímpica 1 .....</i>                | 67        |
| 5.3.2      | <i>Experimentação da Situação Didática Olímpica 2 .....</i>                | 73        |
| 5.3.3      | <i>Experimentação da Situação Didática Olímpica 3 .....</i>                | 79        |
| 5.3.4      | <i>Experimentação da Situação Didática Olímpica 4 .....</i>                | 82        |
| <b>6</b>   | <b>ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO INTERNA .....</b>                      | <b>87</b> |
| <b>6.1</b> | <b>Análise a posteriori e validação da SDO1 .....</b>                      | <b>87</b> |
| <b>6.2</b> | <b>Análise a posteriori e validação da SDO2 .....</b>                      | <b>89</b> |

|     |                                                                         |     |
|-----|-------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.3 | <i>Análise a posteriori</i> e validação da SDO3 .....                   | 90  |
| 6.4 | <i>Análise a posteriori</i> e validação da SDO4 .....                   | 91  |
| 6.5 | Análise do questionário final .....                                     | 92  |
| 7   | CONSIDERAÇÕES FINAIS .....                                              | 96  |
|     | REFERÊNCIAS .....                                                       | 98  |
|     | APÊNDICE A — TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E<br>ESCLARECIDO (TCLE) ..... | 103 |
|     | APÊNDICE B — QUESTIONÁRIO FINAL .....                                   | 106 |
|     | APÊNDICE C — SITUAÇÕES DIDÁTICAS .....                                  | 107 |
|     | APÊNDICE D — FORMULÁRIO DE CADASTRO GRUPO DE<br>ESTUDO .....            | 111 |
|     | ANEXO A – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA E PESQUISA .....                   | 114 |

## 1 INTRODUÇÃO

As competições olímpicas de matemática, com o passar dos anos, vem se mostrando mais presentes nas escolas brasileiras, indicando um crescimento na participação dos estudantes. Essas olimpíadas, de acordo com Araújo Filho (2019, p. 13) “objetivam aprimorar o aperfeiçoamento da cultura matemática e identificar quais alunos apresentam domínio na resolução de problemas e que demonstram uma agilidade no raciocínio”.

Todavia, uma grande quantidade de alunos da Educação Básica ainda apresenta uma resistência em aprender matemática, por achar algo difícil de assimilar e, muitas vezes, por julgar ser um conhecimento desnecessário para o seu cotidiano (ARAÚJO FILHO, 2019). Consequentemente, isto reflete na preparação para as olimpíadas de matemática. Diante disso, os docentes precisam dar significado ao conhecimento matemático e encontrar formas de tornar as aulas atrativas para os estudantes, visando uma melhor preparação para este tipo de competição.

Estas competições tem o intuito de estimular os discentes ao estudo de conteúdos que compõem o currículo da Educação Básica de forma criativa, desenvolvendo habilidades e competências em matemática, além de contribuir também para a formação dos professores que participam desse processo de preparação (WIEST, 2017). As competições matemáticas existem há bastante tempo: por volta do século XVI já existiam desafios através de torneios onde “importantes matemáticos empenhavam sua reputação, razoáveis quantias em dinheiro e, até mesmo, suas cátedras em importantes universidades italianas” (MACIEL, 2009, p. 2). Nestas competições, vencia aquele que respondesse corretamente o maior número de questões-problema.

Este modelo de competição deu origem a estruturação da primeira Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), que ocorreu em 1959, na Romênia (IMO, 2023). A IMO é uma competição realizada anualmente e conta com a participação de mais de 100 países, sendo a cada ano sediada por um país diferente. De acordo com Chan (2018, p. 66), “Cada país pode levar até seis competidores, que devem ter menos de 20 anos e não podem estar em cursos universitários”. Sua prova consiste em seis (06) problemas matemáticos, sendo realizada em dois dias subsequentes, “em cada dia, os alunos dispõem de quatro horas e meia para resolver três problemas, que abrangem disciplinas como teoria dos números, geometria, álgebra e combinatória” (CHAN, 2018, p. 66).

Os problemas abordados na IMO, sobretudo os de Geometria envolvendo o estudo dos triângulos, apresentam competências destacadas na BNCC, o que justifica a importância do seu

uso na Educação Básica pelos professores de matemática. Para resolvê-los, é necessária uma preparação minuciosa, uma vez que este tipo de problema “[...] foge do padrão encontrado em muitos livros didáticos, pois suas soluções não dependem da simples aplicação de modelos matemáticos prontos, e sim da utilização criativa dos conhecimentos matemáticos dos estudantes” (ARAÚJO et al., 2016, p. 4). Conforme observado nos livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio em 2018, os problemas de competições matemáticas são pouco apresentados e, muitas vezes, não são abordados (SILVA et al., 2020).

Nos estudos de Azevedo (2020, p. 16) é salientado que “[...] são notórias as dificuldades enfrentadas por alguns professores de matemática quando a situação é resolver problemas de olimpíadas, pois exige maior investimento profissional, ou seja, mais estudo e formação aprofundada nos conteúdos matemáticos”, o que implica no fato de que quanto menos programas de formação, menos professores preparados.

Partindo deste panorama, este trabalho traz uma abordagem de problemas relacionados à IMO, por apresentar-se como um certame que inclui alunos do Ensino Médio de escolas públicas e privadas de diferentes países. Além disso, apesar de ser uma olimpíada pouco abordada nas instituições de ensino, considera-se que o estudo dos problemas da IMO tem grande potencial para elevar o conhecimento geométrico dos estudantes e professores de Matemática, o que nos instiga a divulgar sua existência.

O objeto matemático de estudo desta pesquisa é a Geometria, de modo específico, o estudo dos triângulos. Assim, propomos uma abordagem de problemas da IMO com foco neste tópico, em que é utilizado o software GeoGebra como suporte tecnológico, no intuito de estimular diferentes perspectivas de visualização e abordagem deste conhecimento, visto que, se o aluno entender o que lhe foi proposto, provavelmente seu desempenho na resolução de problemas será melhor.

O interesse em abordar o estudo dos triângulos surgiu a partir de vivências em sala de aula, da observação do trabalho de outros professores de matemática, bem como do desempenho dos estudantes, em que foi constatada uma grande dificuldade em assimilar os conceitos e propriedades do referido conteúdo. Também foi observada a carência na diversificação de metodologias de ensino para melhor transmitir esse conhecimento, o que entendemos que está diretamente ligado à falta de formação dos professores de matemática.

Perante os anseios citados e a relação da autora com o trabalho em âmbitos preparatórios para a IMO, justificamos a construção desta pesquisa. Observamos a importância do desenvolvimento desta temática, buscando um aprimoramento no ensino da geometria, visando

sua ampliação e estímulo à preparação para as olimpíadas internacionais.

Em vista disso, este estudo pretende ampliar as reflexões do futuro docente para o ensino de conceitos e propriedades dos triângulos, almejando despertar diferentes percepções e atitudes em sua futura prática, provocando a vontade de reinventar a abordagem de seus conceitos.

Nessa perspectiva, desenvolvemos este trabalho a partir da metodologia de pesquisa Engenharia Didática (ED), com ênfase na Engenharia Didática de Formação (EDF), através do uso de Problemas Olímpicos (PO) estruturados na Teoria das Situações Didáticas (TSD), com aporte do software GeoGebra. O desenvolvimento deste trabalho visa contribuir para o desenvolvimento profissional do licenciando, apresentando-os ao conceito de Situação Didática Olímpica (SDO), que remete à junção dos Problemas Olímpicos e da Teoria das Situações Didáticas (ALVES, 2019). As situações didáticas construídas a partir de POs, de acordo com Silva, Alves e Menezes (2021, p. 6), “criam um ambiente de ensino semelhante ao de competições junto à inclusão de ferramentas tecnológicas que proporciona uma maior atratividade aos estudantes”.

Considerando que o professor deve estar em formação constante e, além disso, ser também um pesquisador, no intuito de adquirir metodologias capazes de aprimorar o ensino da matemática, buscamos desenvolver nossa pesquisa sob a égide da seguinte pergunta: Que contribuições a Situação Didática Olímpica (SDO) intermediada pela tecnologia pode proporcionar à formação do professor de matemática?

Desse modo, com o propósito de responder a indagação apresentada, foi definido como objetivo geral: **Investigar como as Situações Didáticas Olímpicas (SDO), com o auxílio do software GeoGebra, podem contribuir para a formação do professor de matemática no estudo dos triângulos e em sua preparação para trabalhar com a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO).** Assim, traçamos alguns objetivos específicos que permitirão atingir o principal:

- a) Compreender como as questões olímpicas abordam o estudo dos triângulos a partir de problemas retirados das provas da IMO;
- b) Analisar o papel da Situação Didática Olímpica e seus contributos com base no objeto de estudo;
- c) Avaliar a contribuição do software GeoGebra para a resolução de Problemas Olímpicos e construção de Situações Didáticas Olímpicas.

Alguns teóricos foram utilizados como referência para esta pesquisa, como: Brousseau (1986, 1996, 2002 e 2008), no que diz respeito à Teoria das Situações Didáticas; Almouloud

(2007), Almouloud e Coutinho (2008), Almouloud e Silva (2012), Alves (2019; 2021), Alves e Catarino (2017), Artigue (1988), Perrín-Glorian (2009 e 2019), Perrin-Glorian e Bellemain (2019), Santos (2018) e Santos e Alves (2017), para a compreensão da Engenharia Didática; Crescenti (2008), Filho (2019), Nunes (2010) e Pavanello (1993), sobre o ensino de Geometria; Maciel (2009), Oliveira (2016), Silva, Alves e Menezes (2021) e Wiest (2017) acerca das Olimpíadas de Matemática e, por fim, Alves (2021), Chan (2018) e Santiago (2021) com abordagens sobre a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO).

A presente pesquisa está estruturada em sete capítulos. No capítulo 1, apresentamos esta introdução, onde discutimos brevemente o contexto das competições olímpicas de matemática, sobretudo da IMO, além de expor também a metodologia do estudo, a problemática, a justificativa e os objetivos.

No capítulo 2 discorremos sobre o referencial teórico que foi o aporte desta investigação, principiando com a TSD e suas quatro dialéticas. Posteriormente, trazemos a EDF, como metodologia da pesquisa.

No capítulo 3 realizamos as Análises Preliminares, em que trazemos um estudo sobre a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), em busca de conhecer melhor essa competição. Além disso, discorremos sobre o ensino de geometria, principalmente, o estudo dos triângulos, fazendo uma análise acerca da fragilidade desse conteúdo ao longo do tempo. Trazemos também o olhar do currículo de matemática para a abordagem da geometria na sala de aula e o GeoGebra como recurso tecnológico.

Na sequência temos o capítulo 4, trazendo a análise *a priori* e a construção das situações didáticas, onde são apresentados os quatro Problemas Olímpicos (PO) trabalhados na experimentação dessa pesquisa vale lembrar que, todos os problemas foram retirados das provas da IMO de anos anteriores.

No capítulo 5 discorremos sobre a experimentação, com a caracterização do lócus e sujeitos da pesquisa, o grupo de estudos criado para o seu desenvolvimento e a descrição das quatro Situações Didáticas Olímpicas.

No capítulo 6 trazemos a análise dos dados obtidos e a validação interna, onde ocorre o confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*. Além da análise *a posteriori* de cada SDO, verificando as hipóteses e cumprimento dos objetivos da pesquisa.

Por fim, no capítulo 7, apresentamos as considerações finais, nessa seção expomos informações sobre a pesquisa como um todo, bem como se os objetivos foram alcançados.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO

Neste capítulo, apresentamos os principais aspectos teóricos e metodológicos abordados no referido trabalho, baseado em uma revisão de literatura de alguns autores que contribuíram para esta pesquisa. Também especificamos os procedimentos metodológicos escolhidos para esta investigação, bem como a análise e interpretação de dados.

O desenvolvimento deste trabalho é norteado pela Teoria das Situações Didáticas, na perspectiva da Engenharia Didática de Formação, no intuito de fornecer suporte para o desenvolvimento do professor em formação inicial, como explicitado nas subseções seguintes.

### 2.1 Teoria das Situações Didáticas (TSD)

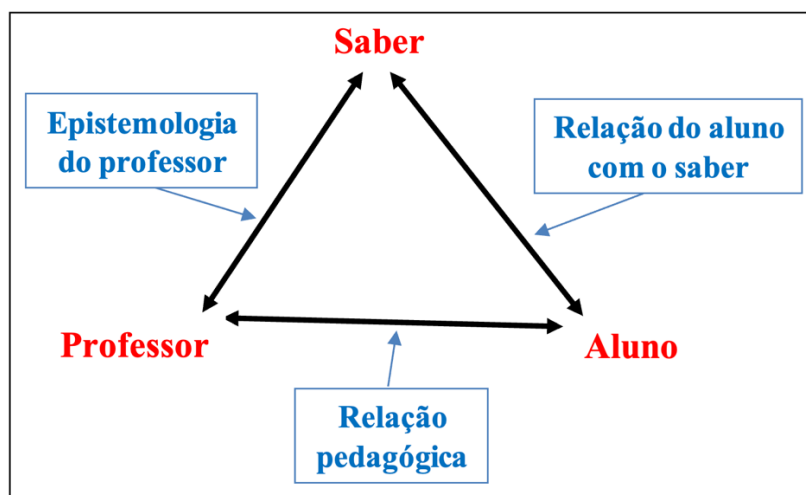
No século XX, na França, foi desenvolvida a Teoria das Situações Didáticas (TSD), idealizada por Guy Brousseau (1986). Este autor estava em busca de uma estratégia de ensino que ligasse o professor, o aluno e o saber, como forma de compreender a aprendizagem em Matemática. Esta teoria tenciona construir um modelo de interação entre o aprendiz, o saber e o *milieu*. Sobre isso, Almouloud (2007, p. 32), diz que “o objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática na qual são identificadas as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber”.

Como proposta para o ensino de matemática, esta interação entre o sujeito e o meio modela a compreensão dos processos de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, por intervenção do que o autor nomina por situações didáticas. Essas situações, segundo Brousseau (2008, p.19), seguem:

O modelo de interação de um sujeito com um meio específico que determina um certo conhecimento, como recurso de que o sujeito dispõe para alcançar ou conservar, neste meio, um estado favorável. Algumas dessas situações requerem a aquisição anterior de todos conhecimentos e esquemas necessários, mas há outras que dão ao sujeito a possibilidade de construir, por si mesmo, um conhecimento novo em um processo de gênese artificial. (BROUSSEAU, 2008, p. 19).

Nesse sentido, Brousseau (1996) sugere um modelo de sistema didático constituído por estes três elementos, conforme a Figura 1:

Figura 1 – Triângulo Didático.



Fonte: Adaptado de Almouloud (2007).

Na Figura 1, o triângulo didático traz os três elementos essenciais que compõem a relação didática, considerando-os como elementos característicos de uma relação que se modifica continuamente e evolui. Deste modo, podemos perceber que são consideradas três relações dialéticas importantes:

i) *Professor e aluno*: é a relação pedagógica. O professor é o responsável pela organização da sequência e exerce o papel de mediador.

ii) *Professor e saber*: é titulada como epistemologia do professor. Além de possuir o domínio do conteúdo matemático, o docente precisa desenvolver estratégias que estimulem o processo da situação didática, possibilitando ao discente um conhecimento significativo.

iii) *Aluno e saber*: nesta relação devem ser considerados os conhecimentos prévios dos estudantes, proporcionando um ambiente tranquilo e capaz de estimular a realização de investigações, conjecturas e validação de suas ideias.

Nestas interações os “docentes e discentes são atores indispensáveis da relação de ensino e aprendizagem, bem como o meio (*milieu*) em que a situação didática se faz presente” (TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p. 157).

A TSD organiza o processo de aprendizagem do aluno a partir das dialéticas/situações de ação, formulação, validação e institucionalização, que no caso deste trabalho serviram de base para a estruturação dos Problemas Olímpicos (PO). A modelização destas situações foi embasada em problemas retirados de provas da IMO. Esses problemas de olimpíadas “[...] envolvem um viés intrínseco do conhecimento matemático, que não pode ser separado e diferenciado de uma abordagem didática” (ALVES, 2019, p. 97) e, desse modo, pensamos em uma adequação visando a sala de aula e a formação inicial do professor de matemática. A seguir,

apresentamos uma descrição de cada situação ou dialética da TSD, segundo Brousseau (2002, 2004, 2008), entre outras obras.

### *2.1.1 Situação de ação*

Nesta dialética, os estudantes têm a oportunidade de interagir com o meio, executando procedimentos através da tomada de decisão para solucionar o problema apresentado. Através da observação, o estudante torna-se capaz de induzir uma tática, explicá-la e, por fim, estabelecer suas decisões. Durante este processo, o aluno vai descobrir técnicas para resolver o problema. Sobre essa etapa, Almouloud (2007, p. 37), explica que ela “coloca um problema para o aluno cuja melhor solução, nas condições propostas, é o conhecimento a ensinar; o aluno passa agir sobre essa situação e que ela lhe retorne informações sobre sua ação”. No fragmento, referindo-se à situação de ação como “dialética de ação”, Brousseau (2002) enfatiza que:

Essa sucessão de interações entre o aluno e o meio constitui o que chamamos de “dialética da ação”. Usamos a palavra “dialética” em vez da palavra “interação” porque, por um lado, o aluno é capaz de antecipar os resultados de suas escolhas e, por outro lado, suas estratégias são, de certa forma, proposições confirmadas ou invalidado pela experimentação em uma espécie de diálogo com a situação. (BROUSSEAU, 2002, p. 9).

Desta forma, o aluno estabelece suas estratégias, elaborando uma representação da situação, o que lhe serve de modelo para nortear a sua tomada de decisões (BROUSSEAU, 2002). A denominação de um modelo demonstra relações entre as informações que o estudante entende como importantes para a situação.

Brousseau (2004) considera que o modelo didático proporciona um estudo no que diz respeito à densidade das escolhas realizadas e suas decorrências, conduzindo o olhar do professor para o acervo de conhecimentos que os estudantes colocam em ação. Assim, ao defrontar-se com o problema, o discente vai em busca de seus conhecimentos prévios e, através da sua interação com o meio, adquire elementos que o auxiliam na construção da solução correta. Brousseau (2002) denota que, na situação de ação, o *milieu* que age sobre o estudante pode envolver ou não o professor ou outro(s) estudante(s).

### *2.1.2 Situação de formulação*

Na situação de formulação são mostradas as interações efetivas nas atividades, onde o aluno utiliza alguma ideia teórica para a resolução do problema, criando um ambiente propício

à troca de saberes entre os estudantes e outros indivíduos. Conforme Almouloud (2007, p. 38):

O objetivo da dialética da formulação é a troca de informações. Por exemplo, se o aluno deve agir e não dispõe de toda a informação e seu parceiro no jogo dispõe das informações que lhe faltam, pode haver, nessas trocas, julgamentos, debates de validade, sem que isto constitua necessariamente uma situação de formulação. (ALMOULOU, 2007, p. 38).

Dessa forma, ocorre a comunicação entre os participantes, onde cada envolvido analisa as contribuições dos seus colegas, refletindo sobre o entendimento da situação-problema. Para Brousseau (2008, p. 29), o esquema de uma situação de formulação é dado por:

A formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do sujeito de retomá-lo (reconhecê-lo, identificá-lo, decompô-lo e reconstruí-lo em um sistema linguístico). O meio que exigirá do sujeito o uso de uma formulação deve, então, envolver (efetivamente ou de maneira fictícia) um outro sujeito, a quem o primeiro deverá comunicar uma informação. (BROUSSEAU, 2008, p. 29).

Assim sendo, o autor aponta que a dialética de formulação é uma etapa na qual o estudante pressupõe suas ideias, sem se prender às nomenclaturas matemáticas, porém considerando elementos da linguagem que passem clareza naquilo que deseja transmitir e que faça sentido para os receptores.

No que concerne ao seu trajeto dentro da TSD, a formulação antecede a etapa intelectual de persuasão, que ocorre antes da demonstração formal (BROUSSEAU, 2002), tencionando responder às necessidades de comunicação de uma ação, seja ela verbal ou escrita.

### *2.1.3 Situação de validação*

A situação de validação é o momento de o aluno convencer os interlocutores das afirmações que são feitas, por meio da elaboração de provas e demonstrações. Conforme Almouloud (2007, p. 40):

O aluno deve mostrar a validade das possíveis soluções dos diversos modelos criados por eles em linguagem matemática (modelo da situação) submetendo à apreciação e ao julgamento de seus colegas de grupo ou de sala, onde ele deve mostrar de forma clara e precisa a pertinência do desenvolvimento do seu modelo, e caso possível, fazer a sua validação. (ALMOULOU, 2007, p. 40).

De acordo com Santos e Alves (2017, p. 453) a validação é a “fase de convencimento dos interlocutores sobre a veracidade, ou não, dos argumentos apresentados à solução do

problema”. Neste momento o aluno deve utilizar uma linguagem mais formalizada e aparatos para provar suas conjecturas. Assim, “supõe-se que as provas e validações explícitas se apoiem mutuamente como evidência, mas sua articulação certamente não é automática” (BROUSSEAU, 2002, p. 83). Desta forma, as diferentes maneiras de comunicação para a validação dispõem de mecanismos de demonstração, como forma de estruturar e organizar uma argumentação matemática.

Nesta ocasião, os sujeitos se unem para discutir suas conclusões, podendo haver divergência entre elas. Assim, cada um deles pode buscar e apresentar argumentos para demonstrar matematicamente seu raciocínio, chegando a uma afirmação ou negação, pois “um problema de validação é muito mais um problema de comparação, avaliação, rejeição de provas do que uma busca de demonstração” (BROUSSEAU, 1986, p. 46).

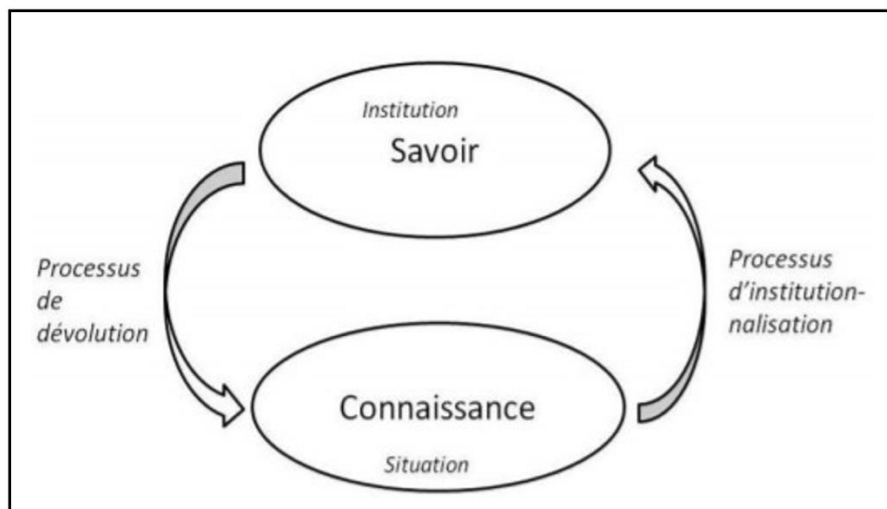
#### *2.1.4 Situação de institucionalização*

Na situação de institucionalização espera-se que o aluno assuma o significado de um saber elaborado por ele mesmo durante o desenvolvimento das etapas anteriores. Nesse sentido, Brousseau (1996, p. 45) fundamenta a importância dessa fase “para a apropriação dos saberes pelo aluno”. Na presente etapa, o docente apresenta uma solução do problema discutido, fazendo intervenção no momento de interação e socialização do saber ensinado.

Alves (2019), sobre as dialéticas da TSD, explica que estas requerem um expediente minucioso de atenção e análise, de acordo com a perspectiva e compreensão da ação do professor, arrimada em fundamentos que contribuem para uma metodologia de ensino para Matemática. Assim, ao analisar as dialéticas/situações didáticas no panorama de Brousseau (2002; 2008), observa-se que o momento em que o estudante constrói o conhecimento acontece na situação adidática, construída para que o discente interaja com o meio sem o intermédio do professor. Esta situação compreende as três primeiras fases da TSD.

No caso da institucionalização, como apresentamos na Figura 2, esta manifesta-se como membro da transformação do conhecimento através do processo de devolução. Para Margolinas (2015), o conhecimento quando não corresponde ao saber, ou seja, quando não institucionalizado, torna-se frágil.

Figura 2 – Diagrama representativo sobre a relação entre o saber e o conhecimento.



Fonte: Margolinas (2015, p. 5).

De acordo com Margolinas (2015), o propósito de ensinar representa o processo de busca em transmitir o saber, de gerar conhecimento em uma situação. Para Sousa (2022, p. 34), nessa dialética “a figura do professor entra em cena para sintetizar tudo o que foi exposto e dialogado pelos estudantes nas etapas anteriores, de maneira formal e com linguagem matemática adequada”.

## 2.2 Situação Didática Olímpica (SDO)

As questões que pertencem à prova da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, sigla em inglês) requerem do estudante um conhecimento mais elaborado acerca dos conteúdos abordados, uma boa compreensão, além de concentração e habilidade matemática. No decorrer deste trabalho, apresentamos quatro problemas olímpicos da IMO, como uma revisão do conteúdo de triângulos para a preparação para esta competição. Alves (2021) define um Problema Olímpico (PO) por:

[...] um conjunto de situações-problema de Matemática, abordado em um contexto competitivo ou de maratonas, com a participação apenas (e de modo restritivo) dos estudantes competidores, cuja abordagem e características de ação individual e solitária destes envolve apenas objetivo/escopo de se atingir as metas (medalhas e certificados) definidas a priori em cada competição por intermédio do emprego de estratégias especializadas, raciocínios e argumentos matemáticos eficientes, instrumentalizados previamente por professores de Matemática. (ALVES, 2021, p. 125).

Os problemas de olimpíadas aqui são vinculados com o que é denominado por Situação

Didática Olímpica (SDO), definida por Oliveira (2016), como sendo situações de ensino para a resolução de problemas olímpicos, seguindo as fases dialéticas de Brousseau (2008), apresentadas no decorrer deste trabalho.

O primeiro pesquisador a usar de modo aplicado o conceito de SDO foi Oliveira (2016), na sua dissertação, sucessivamente, nas dissertações mais recentes, de Santos (2018), Araújo Filho (2019), Silva (2020), Santiago (2021). Segundo Alves (2021), uma SDO é:

um conjunto de relações estabelecidas implícita ou explicitamente, balizado por uma metodologia de ensino (TSD) entre um aluno ou grupo(s) de alunos, um certo meio (compreendo, ainda, o conhecimento matemático abordado por intermédio de problemas de competição e de olimpíadas) e um sistema educativo, com o objetivo de permitir a apropriação, por parte destes alunos, a um conhecimento constituído ou em vias de constituição, oriundo de um ambiente de competição coletiva e debate científico do grupo, a competição solidária e problemas ou conjunto de problemas característicos e abordados nas olimpíadas de Matemática. (ALVES, 2021, p.125-126).

A partir dessa definição, Alves (2021, p. 126) denota a seguinte equação característica: “ $SDO = TSD + PO$ ”. Dessa forma, podemos afirmar que uma Situação Didática Olímpica é uma conexão da TSD a um Problema Olímpico (PO), com o propósito de criar um ambiente de aprendizagem no intuito de se chegar à solução desse problema, sem mostrar diretamente a solução, mas sim organizando um caminho para o aluno construir seu saber matemático. Assim, a Situação Didática Olímpica (SDO) surge no contexto olímpico como uma metodologia para o ensino deste tipo de questão matemática, de modo incorporado às fases da Teoria das Situações Didáticas

Alves (2021) salienta que o uso de SDOs como metodologia de ensino proporciona ao ambiente da sala de aula situações particulares de exercícios associados à análise matemática que ocorre em preparações para competições olímpicas.

### **2.3 Engenharia Didática de Formação (EDF)**

Quando se pensa em formação de professores avalia-se a necessidade de ajustar as metodologias e ferramentas capazes de contribuir para o planejamento, construção e transposição de situações didáticas que proporcionem um ensino mais significativo na Educação Básica.

Por volta das décadas de 1980 e 1990, surgiu a terminologia Engenharia Didática de Formação (EDF), denominada por Perrín-Glorian e Bellemain (1993) como Engenharia Didática de Desenvolvimento ou Engenharia Didática de 2ª geração, sendo esta dedicada à

formação do professor ou do futuro professor. A EDF é assim denominada por se basear em uma Engenharia Didática de 1ª geração, ou seja, o modelo clássico de Engenharia Didática e seguir também as suas quatro fases. Em pesquisa, a EDF é utilizada tanto para formação quanto para o estudo de questões de formação, tal como a Engenharia Didática Clássica. Mas no caso da EDF, os alunos são adultos e supostamente já conhecem a matemática em estudo, o que altera as questões e o ambiente.

De acordo com Alves e Catarino (2017, p.122), quando se trata do trabalho do professor de matemática, sustentam-se três fases essenciais e com características fundamentais, a saber: “a preparação/concepção, a realização de uma mediação em sala de aula e a correspondente avaliação das etapas predecessoras”, tanto em seu conjunto, quanto de maneira individual ou local. Segundo Perrin-Glorian (2009, apud ALMOULOU; SILVA 2012, p. 32), a EDF:

É uma engenharia didática para o desenvolvimento de recursos e para a formação de professores envolvidos no projeto. [...] A engenharia de desenvolvimento está fortemente ligada às investigações nos saberes matemáticos necessários aos professores para ensinar a matemática. É neste sentido que ela está ligada à formação. (PERRÍN-GLORIAN, 2009 apud ALMOULOU; SILVA 2012, p. 32).

Ainda sobre a EDF, Perrín-Glorian e Bellemain (2019, p. 73) referem-se a ela como Engenharia Didática para o Desenvolvimento porque:

[...] visa estudar a adaptação das situações produzidas às condições comuns de ensino e às necessidades dos professores. É uma questão de estudar a difusão dessas situações na educação básica, através da produção de recursos e das necessidades de treinamento e apoio dos professores, para que eles possam usá-los efetivamente para melhorar a qualidade da aprendizagem de seus alunos. Isso requer um estudo mais aprofundado das condições para a implementação da sala de aula e das maneiras pelas quais os professores lidam com as dificuldades deixada pela situação. (PERRÍN-GLORIAN; BELLEMAIN, 2019, p. 73).

Assim, a EDF trata de desenvolver ou retomar uma proposta de transposição didática e estudar as condições de sua disseminação no ensino de conteúdos matemáticos bastante amplo. Perrin-Glorian (2011), distingue dois níveis de interrogação para uma pergunta de pesquisa estruturada com base na EDF:

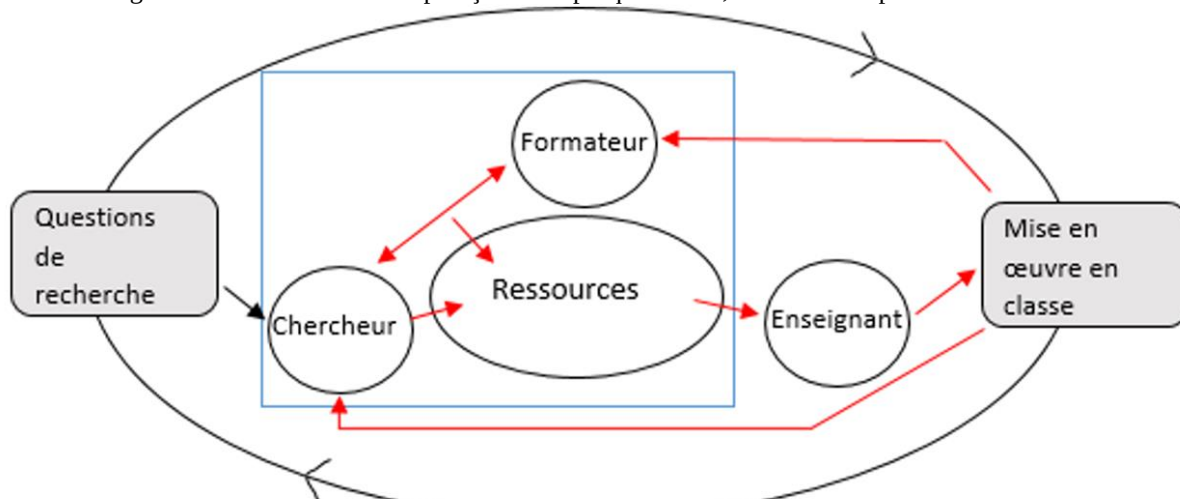
- (a) Um primeiro nível em que o objetivo principal é testar a validade teórica das situações de um ponto de vista epistemológico e cognitivo e identificar as escolhas essenciais da engenharia didática.
- (b) Um segundo nível sobre as práticas atuais de ensino destes conteúdos e a identificação das necessidades dos alunos (dificuldades de aprendizagem) e dos professores

(dificuldades de ensino).

Esta metodologia necessita da participação dos professores em formação, de maneira que lhes propicie adequações das situações didáticas. Em tal caso, busca-se o uso do PO, por apresentar uma complexidade para ser resolvido no âmbito da sala de aula, visando o alcance de uma melhoria para o ensino da matemática, além da inclusão desses estudantes em competições olímpicas.

Assim como a natureza periódica da metodologia, que requer diversas realizações e uma colaboração das atribuições e da teoria entre pesquisadores, professores e formadores, buscamos entender como funciona a integração entre pesquisadores, treinadores e professores na Engenharia Didática de Desenvolvimento, conforme ilustrado na Figura 3:

Figura 3 – Mecanismo de cooperação entre pesquisadores, treinadores e professores na IDD.



Fonte: Perrin-Glorian (2019).

O diagrama apresentado na Figura 3, descreve os níveis de cooperação entre os sujeitos envolvidos no desenvolvimento da EDF: a primeira esfera indica notoriamente a contribuição do grupo maior, em que o pequeno grupo que está representado no retângulo dentro da elipse integra um grupo estendido aos professores que testam as situações e proporcionam um *feedback* entre os participantes da pesquisa.

A equipe de pesquisadores comanda o dispositivo e desenvolve versões interinas do recurso que serão testadas pelos formadores. Desse modo, o *design* de recursos é organizado de acordo com o âmbito das setas vermelhas, em que o propósito é produzir sequências de ensino adaptáveis para serem utilizadas no ensino regular (PERRÍN-GLORIAN, 2019). Nesse sentido, enxergam-se alguns elementos a serem refletidos na formação e no aprimoramento de uma perspectiva encaminhada à formação de professores.

A Engenharia Didática de Formação é subdividida em quatro fases, sendo estas as mesmas da Engenharia Didática Clássica, mas com um intuito diferente desta. Nas análises preliminares realiza-se o estudo epistemológico do objeto de pesquisa, através de uma revisão bibliográfica. No caso deste trabalho, a investigadora estruturou os conceitos matemáticos e realizou uma análise dos conhecimentos prévios dos envolvidos, bem como, suas dificuldades com relação a aprendizagem do conteúdo. Foi a partir desta análise preliminar que as construções das demais fases da EDF se apoiaram.

A segunda fase é a concepção e análise *a priori*, tendo como objetivo construir um dispositivo para a formação de professores, com base nos pressupostos apontados nas análises preliminares. Também foi a etapa de determinar as variáveis didáticas que, de acordo com Artigue (1995), podem ser elencadas como: variáveis *macrodidáticas* ou globais, que falam da organização global da engenharia, e as variáveis *microdidáticas* ou locais, referentes à organização local da engenharia.

Na experimentação, nossa terceira fase, foi o momento de aplicar as situações didáticas olímpicas construídas na fase anterior, consolidar o contrato didático e coletar os dados referentes à pesquisa. Visamos, nesta etapa, verificar a possibilidade de corrigir as dificuldades que foram encontradas pelos sujeitos, via discussão em grupo e visualização com o GeoGebra. Segundo Almouloud (2007), a fase da experimentação é o momento de exercitar o material construído e corrigi-lo quando necessário.

Por fim, na quarta e última fase, realizamos a análise *a posteriori* e validação interna, em que nos baseamos nos dados coletados no desenvolvimento das SDOs. Para Almouloud e Coutinho (2008), a análise *a posteriori* é a discussão do conjunto de resultados retirados dos dados adquiridos e que contribuem para a melhoria dos conhecimentos didáticos do estudo em questão.

A partir do que foi estruturado neste referencial teórico e metodológico, seguimos para o capítulo 3, que inicia a descrição das etapas da EDF desenvolvidas neste estudo.

### 3 ANÁLISES PRELIMINARES

Na presente seção discorreremos sobre a análise preliminar deste estudo que, segundo Almouloud e Silva (2012, p. 26), é a primeira fase da Engenharia Didática e apresenta:

Considerações sobre o quadro teórico didático geral e os conhecimentos já adquiridos sobre o assunto em questão, incluem a análise epistemológica do ensino atual e seus efeitos, das concepções dos alunos, dificuldades e obstáculos, e análise do campo das restrições e exigências no qual vai se situar a efetiva realização didática. (ALMOULOU; SILVA, 2012, p. 26).

Neste sentido, trazemos uma análise acerca de trabalhos relacionados as Olimpíadas de Matemática, informações sobre a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), uma compreensão acerca da Geometria e do objeto matemático em questão, bem como, o levantamento de aspectos epistemológicos e didáticos no seu ensino, considerando a forma como o estudo dos triângulos é tratado no ensino superior e o papel do GeoGebra na construção da resolução de problemas olímpicos.

#### 3.1 Análise de trabalhos relacionados às Olimpíadas de Matemática

A competição é a essência da vida. Todos os dias, os organismos da natureza e os assuntos econômicos da sociedade competem por recursos, melhores condições de vida e maior eficiência. O desejo de superar os desafios estão profundamente enraizados na natureza humana e têm sido usados há séculos para ajudar as pessoas a melhorar suas habilidades e seu desempenho em uma variedade de atividades (KENDEROV, 2009).

Entretanto, verificamos a mobilização de curiosidades no conhecimento tácito e debate perspicaz, decorrentes da resolução de problemas matemáticos, dado o importante papel adquirido e reconhecido por um grupo de intelectuais e representantes da matemática. Porém, o solucionador podia ter um papel de real excelência social, intelectual e científica reconhecido por seus pares.

As competições de Matemática atraem cada vez mais a atenção dos alunos das escolas brasileiras. Observamos um aumento na participação dos estudantes nas competições nacionais e internacionais a cada ano. Isso ocorre porque essas olimpíadas, em si, não exigem do estudante a memorização de fórmulas ou um entendimento global da disciplina de Matemática, mas sim o pensamento criativo para solucionar problemas. Também podemos destacar o fato de que as instituições de ensino que participam de competições olímpicas de matemática,

disponibilizam aos alunos e aos docentes uma coleção de problemas provocantes e desafiadores (ALIEVI, 2013). Vale ressaltar que a competição a que este trabalho faz referência é a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO).

Ademais, “[...] um outro agente social extremamente importante no contexto dos parágrafos predecessores, constitui ser precisamente o professor de Matemática” (ALVES, 2020, p. 320). Diante deste cenário, a tarefa estruturada e questionadora de problemas matemáticos constitui, de modo inquestionável, uma habilidade e competência que deve ser cultivada e fortemente determinada no âmbito da formação inicial e continuada de docentes de Matemática (ALVES, 2016).

Os problemas olímpicos criam um ambiente de ensino idêntico ao de olimpíadas internacionais e, junto à inclusão de recursos tecnológicos, possibilitam uma maior interatividade aos alunos (SILVA; ALVES; MENEZES, 2021). Isso posto, apresentamos o conceito de Situação Didática Olímpica (SDO) que, de modo resumido, busca inserir uma perspectiva de transposição didática para os Problemas Olímpicos (PO), visando propiciar a discussão de elementos didáticos que podem ser incluídos na prática de ensino do professor de Matemática.

A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) percorreu um longo caminho nos últimos anos com o desenvolvimento das competições internacionais e o aumento da participação dos alunos. Os professores responsáveis por essas competições estão cada vez mais envolvidos e, com base nisso, para a preparação dos alunos o professor deve passar por um processo de formação voltado para a abordagem da matemática olímpica, cursos preparatórios, clubes de matemática, além de incorporar o uso de materiais de apoio em formato online e/ou presencial (SANTIAGO; ALVES, 2021).

Com isso, para melhor compreender como os alunos interpretam este tipo de problema matemático, foram consideradas diferentes abordagens que podem ser trazidas para a sala de aula (ALVES, 2016; 2018). Alguns autores apontam resultados e perspectivas com muito potencial para essa compreensão.

Rodrigues e Alves (2019) descrevem como aprender a usar situações cotidianas e materiais apropriados para estimular os alunos no processo de ensino e aprendizagem e facilitar a compreensão de novos conhecimentos.

Santiago, Alves e Maia (2021) afirmam que existem várias classificações de problemas matemáticos, mas independentemente do tipo de uso em sala de aula, a resolução de situações-problemas deve dar aos estudantes oportunidades de pensamento crítico e análise, proporcionando confronto e conquista natomada de decisões em diferentes situações. Além

disso, com a IMO, os professores formados na área estão fortemente envolvidos no desenvolvimento de aprendizados relevantes para toda a comunidade escolar.

Os autores Santiago, Alves e Maia (2021) propõem a importância da SDO na resolução de problemas olímpicos, que podem ser estruturados de diferentes formas, aplicados em níveis de acordo com a situação-problema da IMO. Ainda tendo em conta os resultados obtidos, destaca a importância de reformular a pedagogia do currículo de matemática com base nas competências gerais/específicas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

No entanto, apontamos um problema com outros elementos que nem sempre são visíveis ou proeminentes no processo de aprendizagem, como o papel do professor de matemática. Grande parte dos docentes não está diretamente envolvida na formulação de problemas e escolha das questões em todos os níveis de apresentação, voltadas para a competição da IMO.

Isso não deveria acontecer, pois a participação do docente nesse momento é essencial para acompanhar o desenvolvimento dos discentes na resolução de problemas. Portanto, inferimos que o papel do professor de matemática, na maioria dos casos, está voltado exclusivamente para a prática pedagógica e totalmente distante de modelos matemáticos vinculados ao ambiente de competição olímpica.

### **3.2 Olimpíada Internacional de Matemática (IMO)**

A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, sigla em inglês) é uma competição mundial de matemática direcionada para os alunos do Ensino Médio e é realizada anualmente em um país diferente. No primeiro ano em que essa olimpíada ocorreu poucos países participaram: em 1959 foi realizada a primeira IMO, na Romênia, com apenas sete países participantes. Mas com o passar dos anos, essa quantidade foi aumentando e, atualmente, essa competição conta com a presença de mais de cem países (IMO, 2023).

As competições olímpicas de matemática proporcionam aos discentes uma melhoria em seu desempenho e um maior aproveitamento da disciplina. Além disso, beneficia também o professor de matemática, aperfeiçoando suas habilidades (SANTIAGO, 2021).

Um dos objetivos da IMO é estimular estudantes habilidosos na disciplina de matemática, podendo promover laços de amizade internacional entre matemáticos de diferentes países. De acordo com Alves (2021, p. 119, apud Kenderov et al., 2011, p. 58), temos que:

O estilo das Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO) está sujeito e restrito a determinadas regras formais, que regulam cada aspecto da competição: participação, seleção minuciosa de problemas, acesso ao conteúdo das soluções, distribuição de

medalhas e muitos outros detalhes essenciais. (ALVES, 2021, p. 119, apud KENDEROV et al., 2011, p. 58).

O Brasil iniciou sua participação na IMO em 1979 e, segundo a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), o país sediou a olimpíada em 2017 na cidade do Rio de Janeiro, em que o evento foi um sucesso e obteve um recorde de participantes (CHAN, 2018).

De acordo com Chan (2018), a prova da IMO consiste de seis problemas matemáticos, sendo realizada em dois dias subsequentes. Os países participantes podem levar até seis estudantes. Em cada dia, os competidores dispõem de quatro horas e meia para resolver três problemas, podendo incluir conteúdos como Teoria dos Números, Geometria, Álgebra e Análise Combinatória.

Segundo Santiago (2021), os representantes da delegação de um país são compostos por seis estudantes e dois professores (um líder e um vice-líder). O autor reforça ainda que cada delegação, exceto o país sede do ano em questão, pode submeter questões para compor o banco de dados da IMO.

No Brasil, de acordo com o Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento (NOIC), a seleção para participar da IMO é realizada pela Comissão Nacional de Olimpíadas de Matemática da SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), tendo como primeira fase a prova da OBM, e mais alguns testes considerados como fases seguintes, podendo variar de três a cinco etapas (NOIC, 2023). No final de todas as fases, os seis primeiros colocados são selecionados para representar o país.

Com relação ao desempenho do Brasil nas provas da IMO, apresentamos no Quadro 1 a classificação e as premiações do país nos últimos 10 anos (2014-2023) e também, a quantidade de países participantes:

Quadro 1 – Classificação do Brasil na IMO, de 2014 a 2023.

| ANO  | CLASSIFICAÇÃO | PRÊMIOS |       |        |                   | TOTAL DE<br>PAÍSES<br>PARTICIPANTES |
|------|---------------|---------|-------|--------|-------------------|-------------------------------------|
|      |               | Ouro    | Prata | Bronze | Menção<br>Honrosa |                                     |
| 2014 | 34º           | 0       | 3     | 2      | 1                 | 101                                 |
| 2015 | 22º           | 0       | 3     | 3      | 0                 | 104                                 |
| 2016 | 15º           | 0       | 5     | 1      | 0                 | 109                                 |
| 2017 | 37º           | 0       | 2     | 1      | 3                 | 110                                 |
| 2018 | 28º           | 1       | 0     | 4      | 1                 | 107                                 |
| 2019 | 29            | 0       | 2     | 4      | 0                 | 110                                 |

|      |     |   |   |   |   |     |
|------|-----|---|---|---|---|-----|
| 2020 | 10° | 1 | 5 | 0 | 0 | 104 |
| 2021 | 35° | 0 | 2 | 3 | 1 | 107 |
| 2022 | 19° | 2 | 1 | 2 | 1 | 104 |
| 2023 | 16° | 1 | 2 | 3 | 0 | 112 |

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Observando o Quadro 1, percebemos que o Brasil permaneceu entre os 37 mais bem colocados ao longo desses anos, o que não é ruim, considerando a participação de mais de 100 países, porém, buscamos melhorar ainda mais. Destacamos aqui os resultados de 2018, 2020, 2022 e 2023, onde o país ganhou medalhas de ouro. Entendemos como uma conquista para o ensino de olimpíadas matemáticas. No total, entre 2014 e 2023, o Brasil conquistou 5 medalhas de ouro, 25 de prata, 23 de bronze e 7 menções honrosas.

Fazendo uma análise das últimas provas da IMO, nesse mesmo período, verificamos que há pelo menos dois problemas em cada prova envolvendo a Geometria. Isso mostra a frequência com que nosso objeto de estudo está presente nessa olimpíada e como é de grande importância trabalhar esse conteúdo com os estudantes do Ensino Médio que desejam participar da IMO, o que certamente pode contribuir para o seu bom desempenho.

### 3.3 O ensino de Geometria e o estudo dos triângulos

Ao se pensar em Geometria vem de imediato à memória alguns conceitos. Segundo Souza, Quartieri e Marchi (2017, p. 100, apud Ferreira, 1999), a Geometria é a:

Ciência que investiga as formas e as dimensões dos seres matemáticos” ou ainda “um ramo da matemática que estuda as formas, plana e espacial, com as suas propriedades”, ou ainda, “ramo da matemática que estuda a extensão e as propriedades das figuras (geometria plana) e dos sólidos (geometria no espaço). (SOUZA; QUARTIERI; MARCHI, 2017, p. 100, apud FERREIRA, 1999).

Tal área do conhecimento matemático é estudada em toda a Educação Básica, desde os Anos Iniciais até o Ensino Médio. Diante da sua definição, é fundamental reconhecer que a Geometria está presente em quase tudo que envolve a ação humana ou sua maneira de ver o mundo. Passos (2000), considera a Geometria como um dos “[...] ramos da Matemática que pode estimular o interesse pelo aprendizado dessa ciência, pois pode revelar a realidade que rodeia o aluno, dando oportunidades de desenvolver habilidades criativas” (PASSOS, 2000, p. 49).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2001), conhecer os conceitos geométricos é essencial para o estudante e é indispensável a sua presença no currículo de Matemática, porque:

Por meio deles o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. [...] A geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. (BRASIL, 2001, p. 55-56).

Nos cursos de licenciaturas em Matemática, por exemplo, a formação dos licenciandos expande-se ao modo como os conteúdos de Geometria são transmitidos, o que reflete na forma como são ensinados na Educação Básica. Sobre isso, Adilson e Rodrigues (2014, p. 2) salientam que nos cursos de graduação “[...] a geometria é tratada de forma abstrata muitas vezes sem nenhuma conexão dos conteúdos”.

Conforme abordado na proposta curricular, nem sempre esse tema recebeu a devida importância por parte dos professores e do próprio sistema educacional, mesmo conhecendo sua contribuição na formação do aluno. Há algumas décadas, a Geometria passou por momentos de fragilidade. Autores como Pavanello (1993), Crescenti (2008) e Nunes (2010) trazem debates relacionados a esses problemas e seus reflexos, que persistiram por algumas décadas, desde a criação de um movimento chamado Movimento da Matemática Moderna (MMM), ocorrido nos anos 60.

Segundo Nunes (2010), a Geometria foi praticamente excluída da proposta curricular no período do MMM, dando ênfase à interpretação simbólica e nomenclaturas, o que descaracterizou o ensino desta área e ocasionou sua quase exclusão da sala de aula. Pavanello (1993) observou outro fator que pode ter contribuído para essa situação, que foi a publicação da Lei 5.692/71. Essa lei permitia liberdade total às escolas na organização do planejamento anual e, como consequência, deixaram de incluir a Geometria, o principal motivo disso acontecer era a insegurança dos professores acerca da disciplina.

Um dos fatores responsáveis pela ausência e percalços no ensino da Geometria é a formação docente. Nunes (2010, p. 112) destaca a “[...] formação insuficiente que futuros professores de matemática recebem em Geometria, e que se percebe também que os cursos de formação continuada não estão atendendo aos objetivos em relação à Geometria”. Muitos professores evitam abordar o conteúdo em sala de aula por não ter conhecimento o suficiente, sobre isso, Nascimento (2012), diz que:

O ensino da Geometria apresenta problemas de desempenho docente em face de que parte dos professores não quer aprofundar estudos por falta de base na sua vida escolar, ou então, porque não sabem usar as tecnologias mais simples, mediante a utilização dos instrumentos: régua, compasso, transferidor, esquadro, bem como, as tecnologias de computação entre elas: informática básica, programas educativos em matemática, entre outras, de uma maneira segura e eficiente. (NASCIMENTO, 2012, p. 30).

Além do conhecimento matemático, é importante que o professor conheça as tecnologias e faça uma conexão entre o conteúdo matemático e as ferramentas tecnológicas. No caso desta pesquisa foi utilizado o *software* GeoGebra para auxiliar no estudo dos triângulos, em busca de facilitar a aprendizagem desse conteúdo.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) referentes ao 3º e 4º ciclos, o estudo dos triângulos pertence ao bloco de conteúdos “Espaço e Forma”. Dependendo do livro adotado pela instituição de ensino, esse conteúdo é abordado em anos distintos e com diferentes níveis de dificuldade.

Outro documento norteador do currículo analisado nesta pesquisa foi a Matriz de Referência de Matemática do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica/Prova Brasil) (INEP, 2011), trazendo alguns descritores com objetivos que contemplam o estudo dos triângulos. Na Figura 4 temos os descritores pertencentes ao tema 1 (Espaço e Forma), da Matriz de Referência de Matemática do SAEB para o 5º ano do Ensino Fundamental.

Figura 4 – Descritores da Matriz de Referência de Matemática do SAEB do 5º ano do Ensino Fundamental.

| I. Espaço e Forma |                                                                                                                                                                  |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| D1 –              | Identificar a localização/movimentação de objeto em mapas, croqui e outras representações gráficas.                                                              |
| D2 –              | Identificar propriedades comuns e diferenças entre poliedros e corpos redondos, relacionando figuras tridimensionais com suas planificações.                     |
| D3 –              | Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais pelo número de lados, pelos tipos de ângulos.                                          |
| D4 –              | Identificar quadriláteros observando as posições relativas entre seus lados (paralelos, concorrentes, perpendiculares).                                          |
| D5 –              | Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas. |

Fonte: INEP (2011).

Dentre os cinco descritores pertencentes ao tema Espaço e Forma da respectiva Matriz de Referência, o D3 e D5 abordam o conteúdo de triângulos. No descritor 3, o objetivo é

reconhecer um triângulo como um polígono que possui três lados, três ângulos, três vértices e três arestas. Já no descritor 5, deve-se utilizar as suas propriedades e realizar cálculos para verificar a conservação ou modificação das medidas dos lados, do perímetro e da área de um triângulo, após a ampliação e/ou redução da figura.

Na Figura 5, apresenta-se os descritores pertencentes ao tema 1 (Espaço e Forma), da Matriz de Referência de Matemática do Saeb, do 9º ano do Ensino Fundamental:

Figura 5 – Descritores da Matriz de Referência de Matemática do Saeb, do 9º ano do Ensino Fundamental.

| I. Espaço e Forma |                                                                                                                                                                                  |
|-------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| D1 –              | Identificar a localização/movimentação de objeto em mapas, croquis e outras representações gráficas.                                                                             |
| D2 –              | Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais e tridimensionais, relacionando-as com as suas planificações.                                          |
| D3 –              | Identificar propriedades de triângulos pela comparação de medidas de lados e ângulos.                                                                                            |
| D4 –              | Identificar relação entre quadriláteros por meio de suas propriedades.                                                                                                           |
| D5 –              | Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas.                 |
| D6 –              | Reconhecer ângulos como mudança de direção ou giros, identificando ângulos retos e não-retos.                                                                                    |
| D7 –              | Reconhecer que as imagens de uma figura construída por uma transformação homotética são semelhantes, identificando propriedades e/ou medidas que se modificam ou não se alteram. |
| D8 –              | Resolver problema utilizando propriedades dos polígonos (soma de seus ângulos internos, número de diagonais, cálculo da medida de cada ângulo interno nos polígonos regulares).  |
| D9 –              | Interpretar informações apresentadas por meio de coordenadas cartesianas.                                                                                                        |
| D10 –             | Utilizar relações métricas do triângulo retângulo para resolver problemas significativos.                                                                                        |
| D11 –             | Reconhecer círculo/circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.                                                                                                    |

Fonte: INEP (2011).

Dos onze descritores representados na Figura 5, sete deles incluem o estudo dos triângulos, sendo eles: D2, D3, D5, D6, D7, D8 e D10.

No descritor 2 é necessário reconhecer as características de um triângulo e identificar sua presença na planificação de sólidos geométricos. No descritor 3, deve-se classificar um triângulo de acordo com seus lados (equilátero, isósceles e escaleno) e seus ângulos (acutângulo, retângulo e obtusângulo), bem como, usar suas propriedades para calcular a medida de lados e ângulos desconhecidos. No descritor 5 precisa-se utilizar as propriedades dos triângulos e realizar cálculos para verificar a conservação ou modificação das medidas dos

lados, do perímetro e da área de um triângulo, após a ampliação e/ou redução da figura.

O descritor 6 visa identificar a conservação ou modificação dos lados e ângulos de um triângulo após a rotação da figura, não sendo necessário realizar cálculos. Já no descritor 7 deve-se utilizar as propriedades dos triângulos para determinar a razão de semelhança em casos de homotetia e encontrar a medida de lados desconhecidos, por meio de cálculos, além disso, reconhecer a conservação ou alteração dos elementos em uma transformação homotética.

No descritor 8, deve-se determinar a soma dos ângulos internos de um triângulo, seu número de diagonais e a medida de cada um de seus ângulos internos. Por fim, o descritor 10 demanda a realização de cálculos para encontrar medidas desconhecidas de um triângulo retângulo, utilizando suas relações métricas, que são cinco. A primeira e mais conhecida é o Teorema de Pitágoras:  $a^2 = b^2 + c^2$ , a segunda:  $a = m + n$ , a terceira:  $h^2 = m \cdot n$ , a quarta:  $a \cdot h = b \cdot c$  e, a quinta relação:  $c^2 = m \cdot a$  ou  $b^2 = n \cdot a$ .

Na Figura 6 temos os descritores pertencentes ao tema 1 (Espaço e Forma), da Matriz de Referência de Matemática do SAEB, do 3º ano do Ensino Médio:

Figura 6 – Descritores da Matriz de Referência de Matemática do Saeb, do 3º ano do Ensino Médio.

| I. Espaço e Forma |                                                                                                                                       |
|-------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| D1 –              | Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.                                           |
| D2 –              | Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais.            |
| D3 –              | Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.                                                  |
| D4 –              | Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema.                            |
| D5 –              | Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).                                |
| D6 –              | Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.                                                                              |
| D7 –              | Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.                                                                   |
| D8 –              | Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.                          |
| D9 –              | Relacionar a determinação do ponto de interseção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas. |
| D10 –             | Reconhecer, dentre as equações do 2º grau com duas incógnitas, as que representam circunferências.                                    |

Fonte: INEP (2011).

Como mostra na Figura 6, dez descritores pertencem ao tema 1 (Espaço e Forma) e, dentre eles, três abordam o estudo dos triângulos. No descritor 1 deve-se identificar triângulos

semelhantes e, a partir da proporcionalidade, determinar a razão de semelhança entre triângulos, a altura de um triângulo, seu perímetro e sua área.

O descritor 2 traz como sendo necessário utilizar as relações métricas do triângulo retângulo para encontrar medidas desconhecidas, tais como, altura, catetos e hipotenusa, inseridos dentro de uma situação-problema. O último descritor a ser citado aqui é o 5, onde é preciso encontrar a medida da altura, dos catetos e hipotenusa de um triângulo retângulo dentro de uma situação-problema, por meio da trigonometria, utilizando seno, cosseno e tangente.

Diante da análise apresentada, é possível perceber a presença do estudo dos triângulos em toda a Educação Básica, em que o aluno precisa desenvolver habilidades diferentes, dependendo do descritor abordado, para resolver uma situação-problema envolvendo o estudo dos triângulos.

De acordo com o Plano de Desenvolvimento da Educação (PDE) voltado para o SAEB (INEP, 2011), os alunos ainda demonstram deficiência na aprendizagem de alguns dos descritores citados anteriormente, que abordam o estudo dos triângulos. Na Figura 7, apresenta-se um exemplo de atividade para avaliar o Descritor 3, “Identificar propriedades de triângulos pela comparação de medidas de lados e ângulos” (BRASIL, 2011, p. 152), da Matriz de Referência de Matemática do Saeb do 9º ano do Ensino Fundamental. Tal atividade tem como resposta correta o item (B) destacado:

Figura 7 – Atividade sobre propriedades e comparação de triângulos.

**Exemplo de item:**

Para fazer um aviãozinho, Felipe tomou uma folha retangular de papel e observou os passos indicados nas figuras a seguir.

1º passo      2º passo      3º passo      4º passo

O triângulo ABC é

☐ (A) retângulo e escaleno.  
☒ (B) retângulo e isósceles.  
☐ (C) acutângulo e escaleno.  
☐ (D) acutângulo e isósceles.

Fonte: PDE Saeb/Prova Brasil (2011, p. 158).

Segundo o PDE Saeb/Prova Brasil (2011), 27% das respostas obtidas apontavam o item (A) como a resposta certa. Isso indica que:

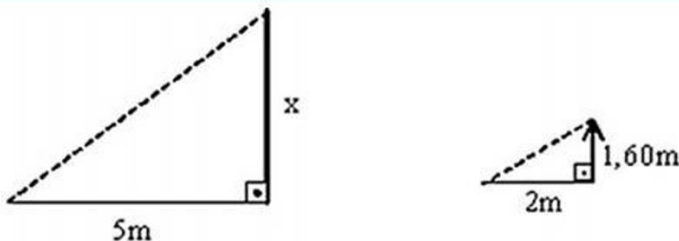
[...] boa parte dos alunos identifica a formação de um ângulo reto na construção proposta, mas não reconhece um triângulo escaleno. Talvez o desconhecimento seja da terminologia. Os 31% que optaram pelas duas últimas alternativas não identificaram o ângulo reto no triângulo formado. (BRASIL, 2011, p. 158).

Outro exemplo de atividade está representado na Figura 8, abordando o descritor 7 que solicita “Reconhecer que as imagens de uma figura construída por uma transformação homotética são semelhantes, identificando propriedades e/ou medidas que se modificam ou não se alteram” (BRASIL, 2011, p. 162), também da Matriz de Referência de Matemática do SAEB do 9º ano do Ensino Fundamental. Seu objetivo é avaliar a “habilidade de o aluno verificar a semelhança de figuras planas, reconhecendo a manutenção ou a alteração nas medidas dos elementos das figuras (lados, ângulos, alturas, etc)” (BRASIL, 2011, p. 162):

Figura 8 – Atividade sobre semelhança de figuras planas.

**Exemplo de item:**

No pátio de uma escola, a professora de matemática pediu que Júlio, que mede 1,60m de altura, se colocasse em pé, próximo de uma estaca vertical. Em seguida, a professora pediu a seus alunos que medissem a sombra de Júlio e a da estaca. Os alunos encontraram as medidas de 2m e 5m, respectivamente, conforme ilustram as figuras abaixo.



A altura da estaca media

(A) 3,6m.    ➡ (B) 4m.    (C) 5m.    (D) 8,6m.

Fonte: PDE – SAEB/Prova Brasil (2011, p. 162).

Dados registrados no SAEB sobre esse item nos fornecem que “apenas 30% dos alunos mostraram dominar estahabilidade. Os demais provavelmente repetiram a medida da primeira figura ou somaram números apresentados nas figuras” (BRASIL, 2011, p. 163).

A partir desta análise, percebemos que ainda há muito trabalho a ser feito para elevar o desempenho dos estudantes da Educação Básica no que diz respeito ao estudo dos triângulos.

Com a realização desta pesquisa, pretendemos fornecer subsídios para melhorar este cenário, onde consideramos que a formação do professor de matemática pode contribuir para esses resultados, uma vez que um docente com domínio de conteúdo, uso de aulas práticas e abordagem com novas metodologias de ensino tem melhores condições de trabalho.

No que se refere ao Ensino de Geometria, presente nas provas da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), não encontramos acervo de trabalhos direcionados ao tema de modo específico. Porém, ao analisar as provas da IMO realizadas entre 2014 e 2023, constatamos que todas apresentam, no mínimo, dois problemas envolvendo este tema de estudo, evidenciando sua relevância neste tipo de olimpíada.

### 3.4 O GeoGebra como recurso tecnológico

Para realizar uma aula significativa é importante utilizar metodologias que atraiam a atenção dos estudantes. Sobre isso, Martins (2008, p. 30) afirma que:

A ausência do material concreto, do experimental no ensino da Geometria é um dos principais motivos da falta de entendimento da disciplina por parte dos alunos. É preciso oferecer situações onde eles visualizem, comparem e desenhem formas [...] Pode parecer um passa tempo, mas é uma etapa de fundamental importância para a aprendizagem das formas geométricas. (MARTINS, 2008, p. 30).

O GeoGebra é um *software* de representação dinâmica, que pode ser utilizado em todos os níveis de ensino da matemática, com possibilidades de abordagem relacionada à Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos. No que concerne à compreensão do mundo à nossa volta a partir da visualização geométrica, Alves (2019) assegura que com o *software* GeoGebra os discentes podem descobrir ou desenvolver uma capacidade de realizar análises globais e locais, proporcionada pelo ambiente computacional.

Santos, Silva e Moura (2016) explicam que o GeoGebra é um programa atribuído à construção de conceitos e objetos matemáticos, podendo ser compreendido como uma ferramenta de estudo, que abrange tópicos de Geometria, Álgebra e Cálculo. Este *software* apresenta contribuições significativas para o ensino de matemática, por sua dinâmica e funcionalidade. Sua utilização no ensino proporciona ao estudante uma melhor compreensão dos conteúdos estudados, facilitando a assimilação e a visualização de conceitos, além de ser um recurso livre e de fácil acesso. Conforme Simm (2013, p. 5):

O GeoGebra pode ser um grande aliado para inovar o processo de ensino e aprendizagem, dado que possui características que o tornam ideal para esta aplicação são: software de livre distribuição, extremamente dinâmico e interface amigável. Está disponível em <http://www.geogebra.org> tanto em plataforma Windows quanto Linux, além das plataformas portáteis como Android. (SIMM, 2013, p. 5).

A escolha pelo GeoGebra surgiu a partir da possibilidade de construir um conhecimento que associe a visualização de elementos ao desenvolvimento da abstração e do significado e generalização de algumas fórmulas. Segundo Abar (2020), o uso de tecnologias digitais como o GeoGebra serve como um aporte para o professor na busca por estratégias metodológicas.

Para o estudo dos triângulos, o GeoGebra disponibiliza diversas ferramentas, como por exemplo, o botão “polígono”: localizado na barra de ferramentas, este serve para construir um triângulo qualquer e de medidas aleatórias. Já na opção “polígono regular” podemos construir um triângulo equilátero e escolher o valor de seus lados. Para a construção de um triângulo isóceles ou escaleno, utilizamos três ferramentas, que são: “segmento com comprimento fixo” para obter a base do triângulo com a medida desejada; “círculo: centro e raio”, para traçar corretamente os outros dois lados do triângulo, juntamente à ferramenta “interseção de dois objetos”. Com o botão “ângulo”, é fácil verificar a medida de todos os ângulos de um triângulo e, mesmo sabendo que a medida da soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é  $180^\circ$ , podemos comprovar esse cálculo colocando, na caixa de entrada do *software*, com o comando “ $S = \alpha + \beta = \gamma$ ”.

Além disso, o GeoGebra disponibiliza também a ferramenta “distância, comprimento ou perímetro” para obter de maneira simples e rápida a medida de um lado desconhecido ou o perímetro de um triângulo com apenas um clique. Com o botão “área”, podemos encontrar a área de um triângulo. Aprofundando um pouco mais os conhecimentos, ainda na barra de ferramentas, há um botão chamado “círculo definido por três pontos”: com ele é possível construir um triângulo inscrito na circunferência e, através da ferramenta “homotetia” podemos construir triângulos semelhantes e, assim, trabalhar suas propriedades.

As ferramentas citadas são importantes e foram utilizadas nas situações didáticas olímpicas deste trabalho, com a intenção de mostrar que este *software* pode ser de grande valia dentro desse modelo de abordagem. Vale ressaltar que existem muitas outras ferramentas.

#### 4 ANÁLISE A PRIORI DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Em busca de responder aos problemas e validar os pressupostos apontados nas análises preliminares, nessa fase, “o pesquisador deve elaborar e analisar uma sequência de situações-problema” (ALMOULOU, 2007, p. 174). É o momento em que a pesquisadora deve fazer suas observações e controlar a dimensão das perguntas e dúvidas que os investigados podem encontrar nas fases posteriores.

Nesse sentido, buscamos elencar situações didáticas de ensino que abordam as propriedades do triângulo, onde foram identificadas dificuldades em sua assimilação a partir da análise preliminar realizada. Com base nisto, elaboramos um conjunto de SDOs para explorar essas propriedades pela perspectiva da visualização dinâmica, a partir da construção das soluções dessas situações no GeoGebra, de modo a buscar formas de superar essas dificuldades.

De acordo com Almouloud e Silva (2012, p. 26), na análise *a priori* “o pesquisador, orientado pelas análises preliminares, delimita certo número de variáveis pertinentes ao sistema sobre os quais o ensino pode atuar, chamadas de variáveis de comando (microdidáticas ou macrodidáticas)”. Nessa perspectiva, as variáveis da pesquisa precisam estar bem definidas, de forma que se possa obter êxito nos objetivos esperados.

Segundo Artigue (1988), as variáveis *macrodidáticas* ou globais, são relativas à organização global da engenharia, enquanto as variáveis *microdidáticas* ou locais, são relativas à organização local da engenharia. No caso desta investigação, as variáveis consideradas foram:

- (i) **Variável global:** a construção das Situações Didáticas Olímpicas com o uso de problemas da IMO com o arrimo do *software* GeoGebra, baseando-se na Teoria das Situações Didáticas (TSD).
- (ii) **Variáveis locais:** hipóteses particulares inerentes ao comportamento dos indivíduos participantes da pesquisa, diante das situações didáticas aplicadas, são elas:
  - a) O *software* GeoGebra pode não proporcionar aos estudantes a construção de novas estratégias durante a resolução das Situações Didáticas Olímpicas;
  - b) Os conhecimentos prévios dos sujeitos relacionados ao conteúdo matemático abordado nos problemas da IMO podem não ser suficientes para a compreensão e solução das Situações Didáticas Olímpicas.

A partir destas variáveis foram determinadas as partes mais importantes a serem desenvolvidas na próxima fase. Desta forma, determinamos o que foi executado e buscando prever as reações e comportamentos do aluno diante do tema trabalhado. De acordo com Almouloud e Coutinho (2008), nesta fase também deve-se levar em consideração as variáveis

didáticas do estudo em questão e todas as peculiaridades da situação didática a ser desenvolvida, em busca de prever os possíveis comportamentos dos estudantes, pois “as ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem” (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p. 67).

Ainda segundo Artigue (1988), em uma análise *a priori* há uma parte de descrição e outra de previsão, em que se busca saber: que problema o futuro professor tem para resolver? O que o futuro professor precisa saber para compreender estes problemas? O que o futuro professor precisa saber para resolver o problema? Que tipo de controle o futuro professor tem sobre sua ação? Essas são perguntas norteadoras que nortearam a análise dos dados desta pesquisa.

Nesse sentido, elaboramos situações didáticas olímpicas de ensino abordando o estudo de triângulos, exploradas por uma perspectiva geométrica, por meio da construção de suas soluções no GeoGebra. As situações visam analisar, a partir do seu desenvolvimento com o *software*, como ocorre a compreensão de elementos e propriedades do triângulo por parte dos sujeitos. Também visa compreender como se manifesta, dentro do campo epistêmico, o pensamento geométrico a partir da percepção e da visualização das SDOs no decorrer da interação entre os pares e resolução das situações propostas na etapa de experimentação.

Deste modo, elencamos 04 SDOs para esse desenvolvimento, mostradas no Quadro 2:

Quadro 2 – Situações didáticas propostas.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>SITUAÇÃO DIDÁTICA I:</b> (IMO 1995 – Geometria – 2º Dia – Questão 5). Seja <math>ABCDEF</math> um hexágono convexo com <math>AB = BC = CD</math> e <math>DE = EF = FA</math>, de modo que <math>\angle BCD = \angle EFA = \pi/3</math>. Suponha que <math>G</math> e <math>H</math> sejam pontos no interior do hexágono tais que <math>\angle AGB = \angle DHE = 2\pi/3</math>. Prove que <math>AG + GB + GH + DH + HE \geq CF</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <p><b>SITUAÇÃO DIDÁTICA II:</b> (IMO 2018 – Geometria – 1º Dia – Questão 1). Seja <math>\Gamma</math> o circuncírculo do triângulo acutângulo <math>ABC</math>. Os pontos <math>D</math> e <math>E</math> estão sobre os segmentos <math>\overline{AB}</math> e <math>\overline{AC}</math>, respectivamente, de modo que <math>\overline{AD} = \overline{AE}</math>. As mediatrizes de <math>\overline{BD}</math> e <math>\overline{CE}</math> intersectam os arcos menores <math>\widehat{AB}</math> e <math>\widehat{AC}</math> de <math>\Gamma</math> nos pontos <math>F</math> e <math>G</math>, respectivamente. Prove que as retas <math>\overleftrightarrow{DE}</math> e <math>\overleftrightarrow{FG}</math> são paralelas (ou são a mesma reta).</p> |
| <p><b>SITUAÇÃO DIDÁTICA III:</b> (IMO 2006 – Geometria – 1º Dia – Questão 1). Seja <math>ABC</math> um triângulo com incentro <math>I</math>. Um ponto <math>P</math> no interior do triângulo verifica <math>\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB</math>. Prove que <math>AP \geq AI</math>, com igualdade se, e somente se, <math>P = I</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |

**SITUAÇÃO DIDÁTICA IV:** (Problema da IMO 2009 – Geometria – 1º Dia – Questão 2). Seja  $ABC$  um triângulo cujo circuncentro é  $O$ . Sejam  $P$  e  $Q$  pontos interiores dos lados  $CA$  e  $AB$ , respectivamente. Sejam  $K$ ,  $L$  e  $M$  os pontos médios dos segmentos  $BP$ ,  $CQ$  e  $PQ$ , respectivamente, e  $\Gamma$  a circunferência que passa por  $K$ ,  $L$  e  $M$ . Suponha que a reta  $PQ$  é tangente à circunferência  $\Gamma$ . Demonstre que  $OP = OQ$ .

Fonte: Seleção realizada pela autora (2023).

Todas as questões selecionadas foram retiradas de provas de edições anteriores da IMO, envolvendo o conteúdo de triângulos, buscando analisar a compreensão dos sujeitos da pesquisa acerca do tema abordado.

Na subseção seguinte, realizamos a descrição de cada situação, na perspectiva da TSD, segundo as ideias de Brousseau (1986, 2002, 2008).

#### 4.1 Descrição das Situações Didáticas

Nesta subseção apresentamos quatro situações didáticas olímpicas estruturadas a partir de problemas de provas da IMO, abordando o estudo dos triângulos. As situações aqui descritas norteiam-se pelos pressupostos da Teoria das Situações Didáticas (TSD), visando analisar os comportamentos dos sujeitos.

Em todas as SDOs utilizamos o software GeoGebra como suporte tecnológico, almejando proporcionar uma melhor visualização da construção dos problemas e, consequentemente, facilitar a compreensão do tema.

##### 4.1.1 Situação Didática Olímpica 1 (SDO1)

Esta SDO traz um problema da IMO 1995 (Questão 5), aplicado no segundo dia de prova. Observe a seguir o que se pede no referido problema:

**Problema 1.** Seja  $ABCDEF$  um hexágono convexo com  $AB = BC = CD$  e  $DE = EF = FA$ , de modo que  $\angle BCD = \angle EFA = \pi/3$ . Suponha que  $G$  e  $H$  sejam pontos no interior do hexágono tais que  $\angle AGB = \angle DHE = 2\pi/3$ . Prove que  $AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$ .

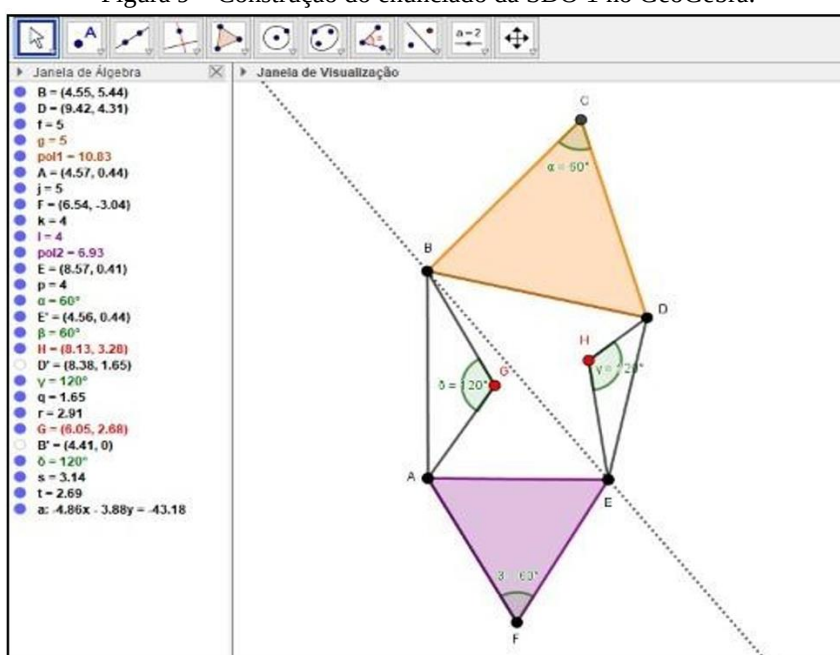
Diante deste problema, a proposta tem como base uma sequência didática organizada pela Teoria das Situações Didáticas (TSD), em quatro dialéticas (ação, formulação, validação e institucionalização). Assim, pretende-se conduzir o futuro professor a refletir e construir um

novo modelo de ensino, a partir do aprendizado desenvolvido nesta SDO. Durante o percurso, deve-se utilizar o GeoGebra como suporte tecnológico, considerando que, ao transpor o problema olímpico para o *software*, o futuro professor pode ter uma melhor visualização do problema e precisão dos cálculos. A seguir, tem-se o desenvolvimento das etapas que se espera que ocorram, segundo as dialéticas da TSD.

**Dialética de Ação:** Nessa etapa, os futuros professores devem analisar o enunciado da questão e buscar identificar os elementos matemáticos presentes nela. Em seguida, espera-se que partam para uma tomada de decisão, em busca de técnicas para resolvê-la.

Espera-se que os professores em formação reconheçam que os triângulos  $\triangle BCD$  e  $\triangle EFA$  são ambos equiláteros, tendo em vista as hipóteses dadas pelo problema. Sendo a linha  $BE$  a mediatriz dos pontos  $A$  e  $D$ , eles podem concluir que os triângulos  $\triangle ABD$  e  $\triangle AED$  são isósceles de base  $AD$ . Para localizar a posição dos pontos  $G$  e  $H$ , espera-se que seja feita a construção do arco capaz. Vale lembrar que os ângulos  $\angle AGB = \angle DHE = 120^\circ$ . Na Figura 9 temos a construção do enunciado do problema no GeoGebra:

Figura 9 – Construção do enunciado da SDO 1 no GeoGebra.



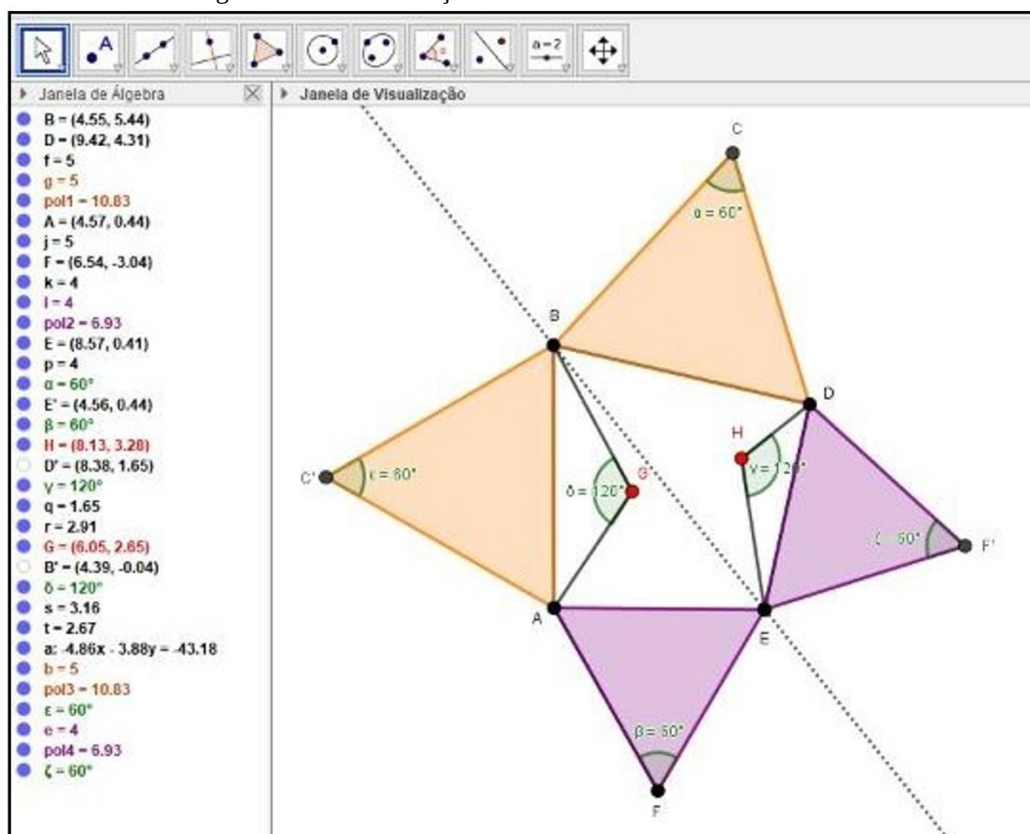
Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Observe que com o uso das ferramentas do GeoGebra é possível construir o que se pede na questão. Ao finalizar a construção, o professor em formação pode ter uma visão mais clara dos elementos matemáticos, conferindo os cálculos com exatidão, dentre outras vantagens, o que certamente pode ajudar na resolução do problema.

**Dialética da Formulação:** Na presente etapa, espera-se que os participantes interajam entre si. É o momento da troca de saberes, em que cada indivíduo deve expor sua opinião e os demais podem analisar as contribuições dos colegas.

Nessa ocasião, os futuros professores devem utilizar a linha  $BE$  como eixo de simetria. Logo, temos que os pontos  $C'$  e  $F'$  são simétricos aos pontos  $C$  e  $F$ . Assim, nota-se que  $CF = C'F'$  (Figura 10). Ainda por simetria, em relação à linha  $BE$ , os triângulos  $\triangle ABC'$  e  $\triangle DEF'$  são equiláteros e os quadriláteros  $AGBC'$  e  $DHEF'$  são inscriíveis (Figura 10):

Figura 10 – Demonstração da linha  $BE$  como eixo de simetria.



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Dando continuidade à resolução do problema, conforme apresentado na Figura 11, os investigados precisam aplicar o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero  $AGBC'$ , obtendo:

$$AG \cdot BC'' + GB \cdot AC'' = C''G \cdot AB. \text{ Logo, } AG + GB = C''G.$$

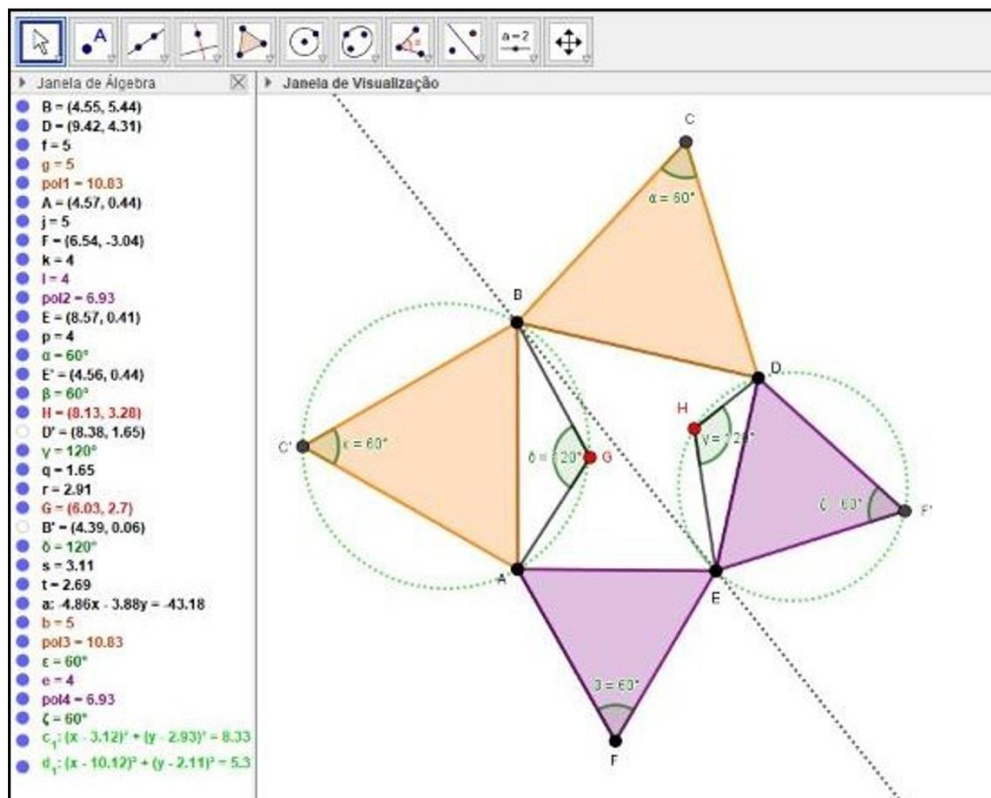
De modo similar, ao aplicar o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero  $DHEF'$ , deve-se

obter:

$$DH \cdot EF' + HE \cdot DF' = HF' \cdot DE. \text{ Logo, } DH + HE = HF'.$$

o que se encontra ilustrado na Figura 11:

Figura 11 – Aplicação do Teorema de Ptolomeu.



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

**Dialética da Validação:** Nesta etapa, espera-se que os futuros professores elaborem demonstrações e provas para convencer os interlocutores das afirmações feitas na etapa anterior.

Conforme a Figura 12 e somando as duas equações obtidas anteriormente, tem-se:

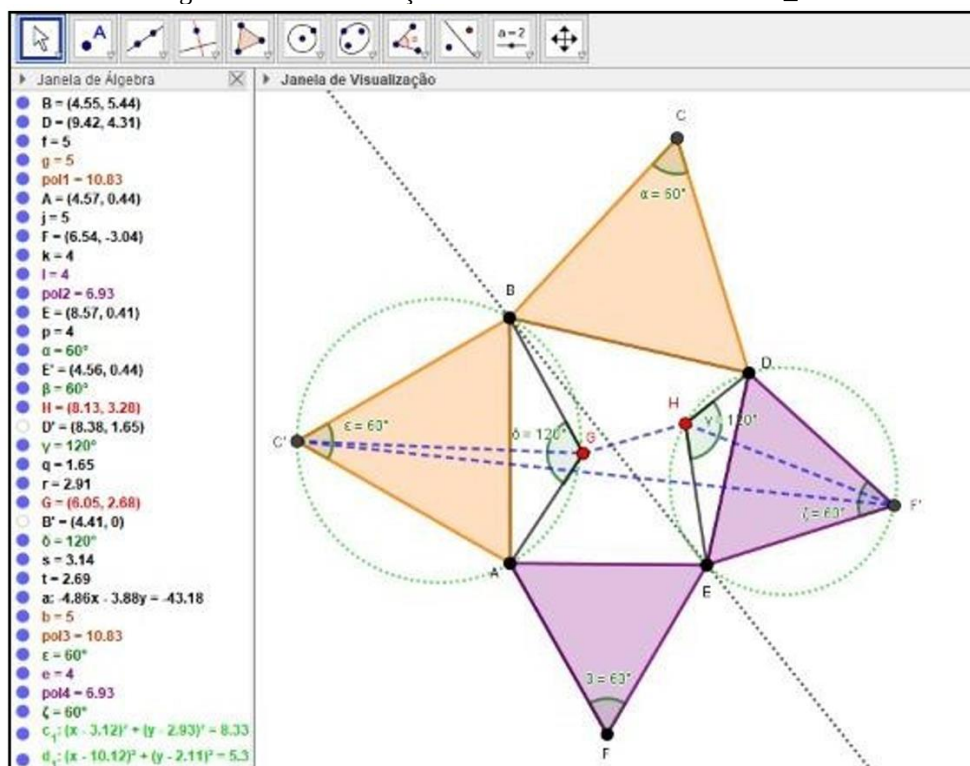
$$AG + GB + DH + HE = C''G + HF'.$$

Em seguida, somando-se  $GH$  aos dois membros, podemos encontrar:

$$AG + GB + GH + DH + HE = C''G + GH + HF'.$$

Logo, pela desigualdade triangular segue que:

$$C''G + GH + HF'' \geq C''F'' = CF:$$

Figura 12 – Demonstração de  $AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$ .

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

**Dialética da Institucionalização:** É nesta etapa que a professora pesquisadora deve assumir o seu papel, realizando a formalização do conhecimento e verificando o que foi produzido pelos participantes, buscando sanar eventuais dúvidas que possam surgir e corrigindo possíveis erros.

Dessa forma, a docente deve apresentar formalmente os conceitos sobre os assuntos abordados na resolução do problema olímpico, que são: triângulos, seus elementos e suas propriedades, mediatriz, arco capaz, quadriláteros inscritíveis e o Teorema de Ptolomeu.

#### 4.1.2 Situação Didática Olímpica 2 (SDO2)

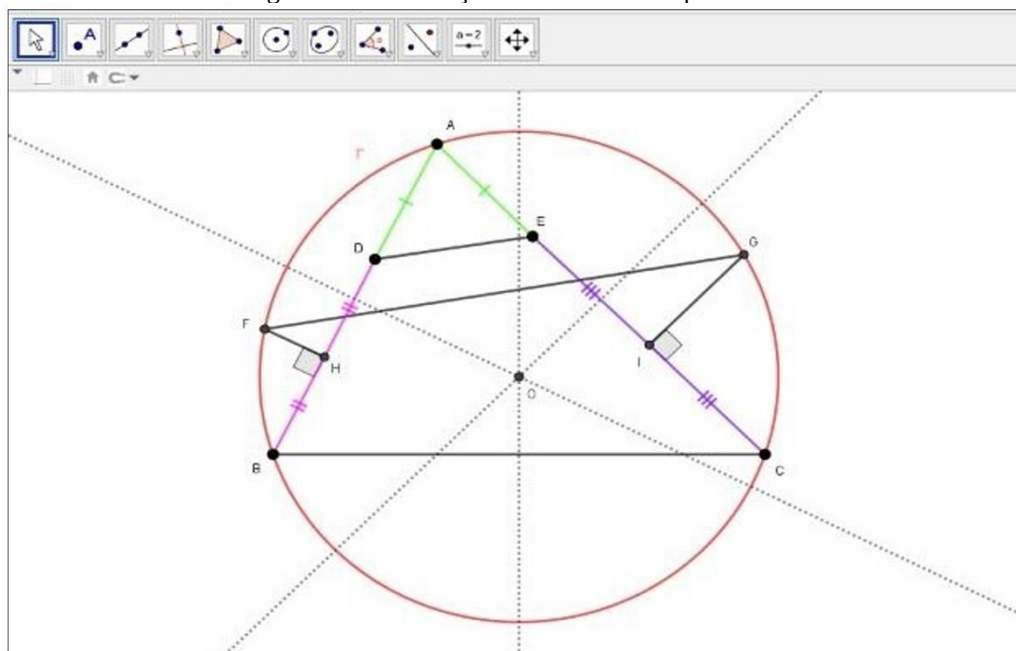
Este segundo Problema Olímpico foi extraído da prova da IMO 2018 (questão 1), sendo realizado no primeiro dia de prova. A situação propõe que o competidor prove que duas retas são paralelas ou são a mesma reta. Os conhecimentos prévios necessários para a resolução da questão, são: circuncírculo, mediatriz, bissetriz e altura de um triângulo, retas paralelas e ângulos excêntricos interiores, centrais e inscritos.

**Problema 2.** Seja  $\Gamma$  o circuncírculo do triângulo acutângulo  $ABC$ . Os pontos  $D$  e  $E$  estão sobre os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente, de modo que  $\overline{AD} = \overline{AE}$ . As mediatrizes de  $\overline{BD}$  e  $\overline{CE}$  intersectam os arcos menores  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{AC}$  de  $\Gamma$  nos pontos  $F$  e  $G$ , respectivamente. Prove que as retas  $\overleftrightarrow{DE}$  e  $\overleftrightarrow{FG}$  são paralelas (ou são a mesma reta).

Diante do problema apresentado, espera-se que ocorra um percurso como segue:

**Dialética de Ação:** Nesta etapa, os futuros professores têm contato com o enunciado da SDO escrita e no GeoGebra (Figura 13). Desta forma, esperamos que eles se lembrem de como construir um circuncírculo de um triângulo acutângulo, mediatriz de segmento de reta, bem como, a demonstração de retas paralelas:

Figura 13 – Construção do enunciado do problema.



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Observando a Figura 13, é possível perceber o impacto positivo causado pelo *software* GeoGebra na visualização e construção do enunciado do Problema Olímpico (PO) apresentado. Vislumbrando um matematizar significativo utilizando a tecnologia que temos ao nosso alcance, contribuindo para o aprendizado do aluno.

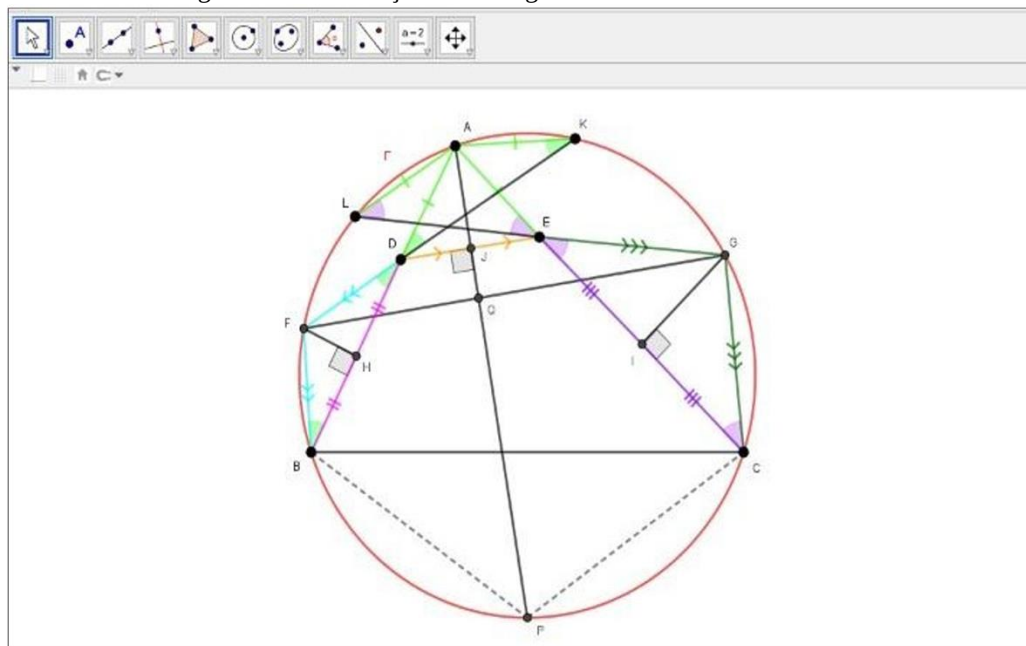
**Dialética da Formulação:** Nessa etapa, almeja-se que ocorra uma interação entre os envolvidos, na busca da solução da questão, configurando um momento de troca de saberes.

Para provar que as retas  $\overleftrightarrow{DE}$  e  $\overleftrightarrow{FG}$  são paralelas, uma possível estratégia seria traçar uma reta perpendicular a uma delas, mostrando que a intersecção com a outra reta também



De modo semelhante, temos que  $\overline{IG}$  é mediatriz de  $\overline{EC}$ , gerando o triângulo isósceles  $\triangle CEG$  (identificado na cor verde-escuro), onde os ângulos  $\angle GCE$  e  $\angle GEC$ ,  $\angle ACG$  e  $\angle ALG$ ,  $\angle GEC$  e  $\angle AEL$  são congruentes, lembrando que o triângulo  $\triangle ALE$  é isósceles (identificado na cor verde-claro) (Figura 16):

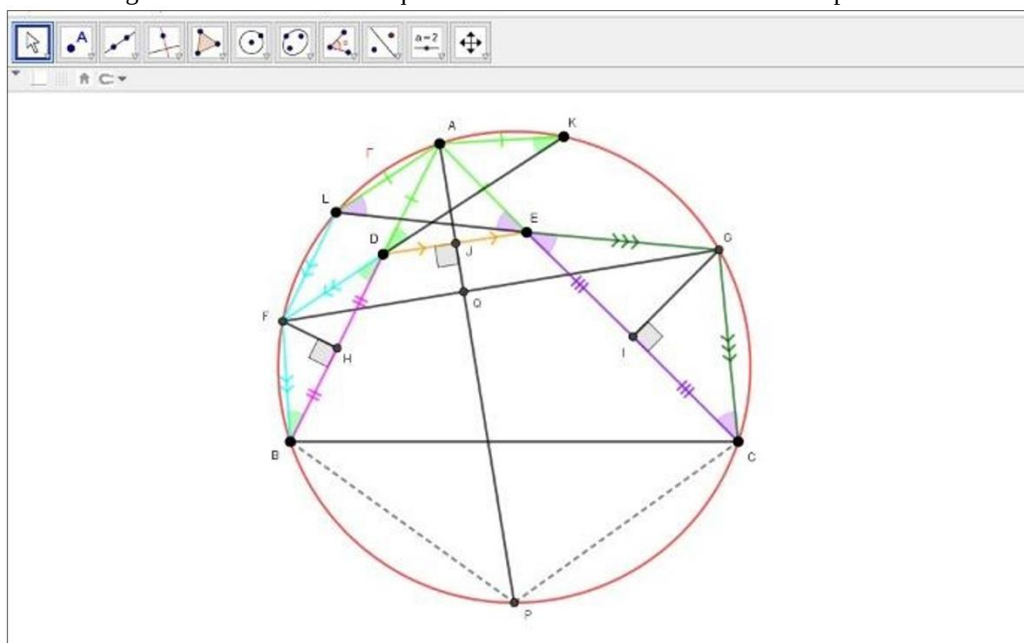
Figura 16 – Construção dos triângulos isósceles  $\triangle CEG$  e  $\triangle ALE$ .



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

A partir desse ponto, espera-se que seja mostrado que a corda  $\overline{FL}$  tem o mesmo comprimento da corda  $\overline{FB}$ , ambas identificadas na cor azul. Como o ângulo  $\angle FBD$  é inscrito na circunferência, seu valor é metade do ângulo central indicado pela soma dos arcos  $\widehat{FL}$  e  $\widehat{LA}$ . Como o ângulo  $\angle FDB$  é excêntrico interior, ele é metade da soma dos arcos  $\widehat{FB}$  e  $\widehat{AK}$ . Por fim, como os ângulos  $\angle FBD$  e  $\angle FDB$  e os arcos  $\widehat{AK}$  e  $\widehat{LA}$  são congruentes, segue que os arcos  $\widehat{BF}$  e  $\widehat{FL}$  são congruentes (Figura 17):

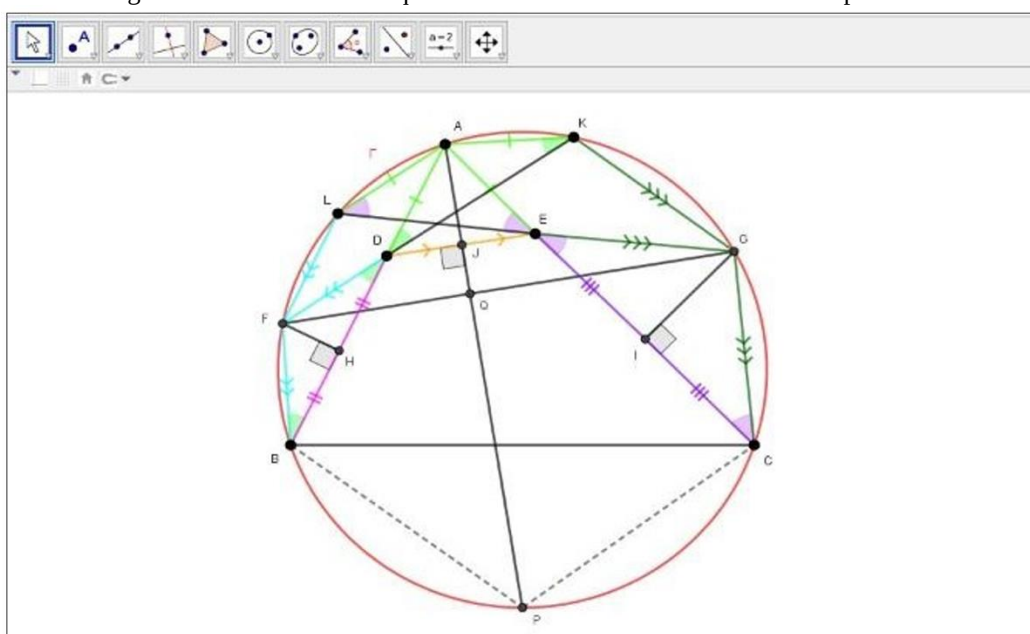
Figura 17 – Demonstrando que as cordas  $\overline{FL}$  e  $\overline{FB}$  tem o mesmo comprimento.



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Provando que a corda  $\overline{KG}$  tem o mesmo comprimento da corda  $\overline{CG}$ , ambas identificadas na cor verde-escuro. Como o ângulo  $\angle ECG$  é inscrito, ele é metade do ângulo central, indicado pela soma dos arcos  $\widehat{AK}$  e  $\widehat{KG}$ . Como o ângulo  $\angle CEG$  é excêntrico interior, ele é metade da soma dos arcos  $\widehat{AL}$  e  $\widehat{CG}$ . Por fim, como os ângulos  $\angle ECG$  e  $\angle CEG$  e os arcos  $\widehat{AK}$  e  $\widehat{AL}$  são congruentes, segue que os arcos  $\widehat{KG}$  e  $\widehat{CG}$  são congruentes. (Figura 18):

Figura 18 – Demonstrando que as cordas  $\overline{KG}$  e  $\overline{CG}$  tem o mesmo comprimento.



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

**Dialética da Validação:** Na presente etapa, espera-se que os professores em formação tragam argumentos viáveis e que possam ser incorporados à resolução do problema, apresentando as estratégias utilizadas.

Segue-se agora para o passo final da resolução desse problema, calculando, de fato quanto vale o ângulo  $\angle AQF$ , que é um ângulo excêntrico interior. Temos que:

$$\angle AQF = \frac{\widehat{AF} + \widehat{FG}}{2}$$

O arco  $\widehat{AF}$  tem duas partes, assim como o arco  $\widehat{PG}$  também tem. Dessa forma:

$$\angle AQF = \frac{\widehat{AL} + \widehat{LF} + \widehat{PC} + \widehat{CG}}{2}$$

Por sua vez, o arco  $\widehat{AL}$  é metade do arco  $\widehat{KL}$ , o arco  $\widehat{LF}$  é metade do arco  $\widehat{LB}$ , o arco  $\widehat{PC}$  é metade do arco  $\widehat{BC}$  e o arco  $\widehat{CG}$  é metade do arco  $\widehat{CK}$ . Sendo assim:

$$\angle AQF = \frac{\widehat{KL} + \widehat{LB} + \widehat{BC} + \widehat{CK}}{4}$$

Observando a soma dos arcos  $\widehat{KL}$ ,  $\widehat{LB}$ ,  $\widehat{BC}$  e  $\widehat{CK}$  completa na circunferência, percebe-se que foi dada a volta:

$$\angle AQF = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$

e com isso, prova-se que o ângulo  $\angle AQF = 90^\circ$ , logo, as retas  $\overleftrightarrow{DE}$  e  $\overleftrightarrow{FG}$  são paralelas.

**Dialética da Institucionalização:** A professora pesquisadora entra em cena nessa última etapa, realizando a formalização do conhecimento matemático associada à construção, para que fique claro o saber em jogo.

Com isso, deve-se tirar as dúvidas existentes sobre os assuntos abordados no problema, tais como, circuncírculo de um triângulo acutângulo, mediatriz, bissetriz e altura de um triângulo, retas paralelas e ângulos excêntricos interiores, centrais e inscritos. Além disso, a pesquisadora também pretende fazer reflexões voltadas para o uso de estratégias simples e discutir sobre a utilização do software GeoGebra.

#### 4.1.3 Situação Didática Olímpica 3 (SDO3)

Este Problema Olímpico foi retirado da IMO 2006 (questão 1), realizado no primeiro dia de prova. A questão propõe que o participante da competição prove que um determinado segmento é maior ou igual a um outro segmento. Para tal, são necessários alguns conhecimentos prévios, como circunferência, pontos notáveis do triângulo, ângulos na

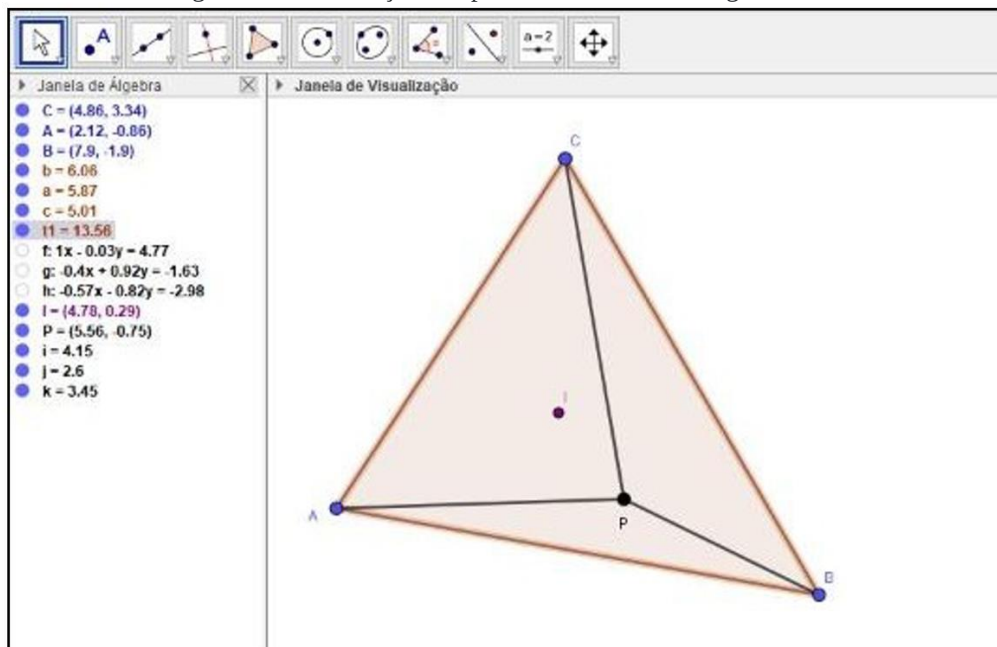
circunferência e relações métricas no triângulo.

**Problema 3.** Seja  $ABC$  um triângulo com incentro  $I$ . Um ponto  $P$  no interior do triângulo verifica  $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$ . Prove que  $AP \geq AI$ , com igualdade se, e somente se,  $P = I$

A partir do enunciado proposto, a SDO foi embasada nas dialéticas da Teoria das Situações Didáticas (TSD) e o suporte do *software* GeoGebra na construção dessa SDO. Assim, descrevemos suas fases com o que se espera dos participantes a seguir.

**Dialética da Ação:** Nesta etapa inicial, os participantes da pesquisa têm um primeiro contato com o problema, onde podem analisar o enunciado da questão e identificar os elementos matemáticos que se fazem presentes e quais as melhores estratégias para tentar solucioná-lo. Espera-se que os professores em formação reconheçam os pontos notáveis do triângulo  $\Delta ABC$ , diferenciem suas características e utilizem os comandos no GeoGebra para construir os ângulos na circunferência e as relações métricas do triângulo (Figura 19):

Figura 19 – Construção dos pontos notáveis do triângulo  $\Delta ABC$ .



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

**Dialética da Formulação:** Nesta etapa esperamos que os envolvidos interajam entre si, expondo suas ideias e teorias. Assim, por meio da comunicação e reflexão podem chegar a um entendimento ou consenso da melhor estratégia e solucionar o problema.

Dessa forma, espera-se que os participantes reconheçam a seguinte descrição,

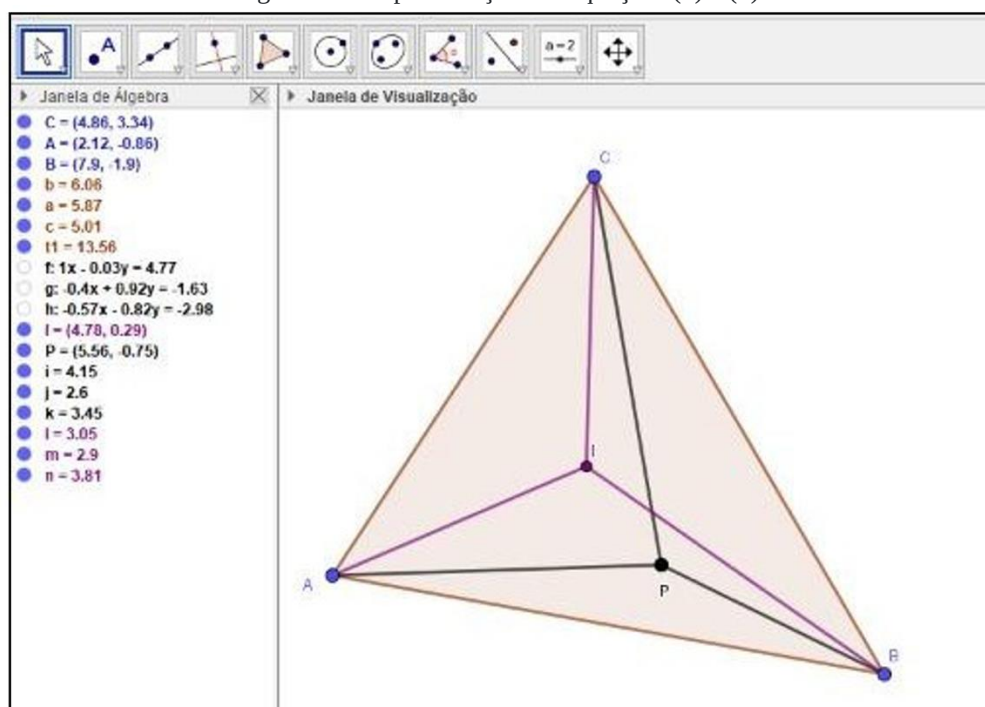
representada na Figura 20:

$$\angle IBP = \angle IBC - \angle PBC = \frac{1}{2} \angle ABC - \angle PBC = \frac{1}{2} (\angle PCB - \angle PCA) \quad (1),$$

assim como,

$$\angle ICP = \angle PCB - \angle ICB = \angle PCB - \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2} (\angle PBA - \angle PBC) \quad (2).$$

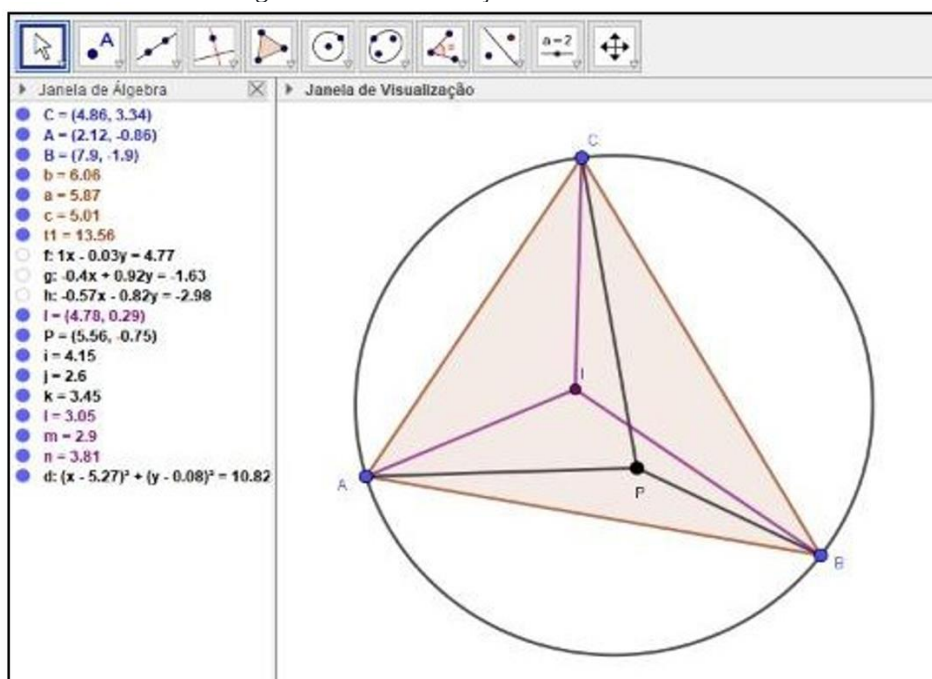
Figura 20 – Representação das equações (1) e (2).



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

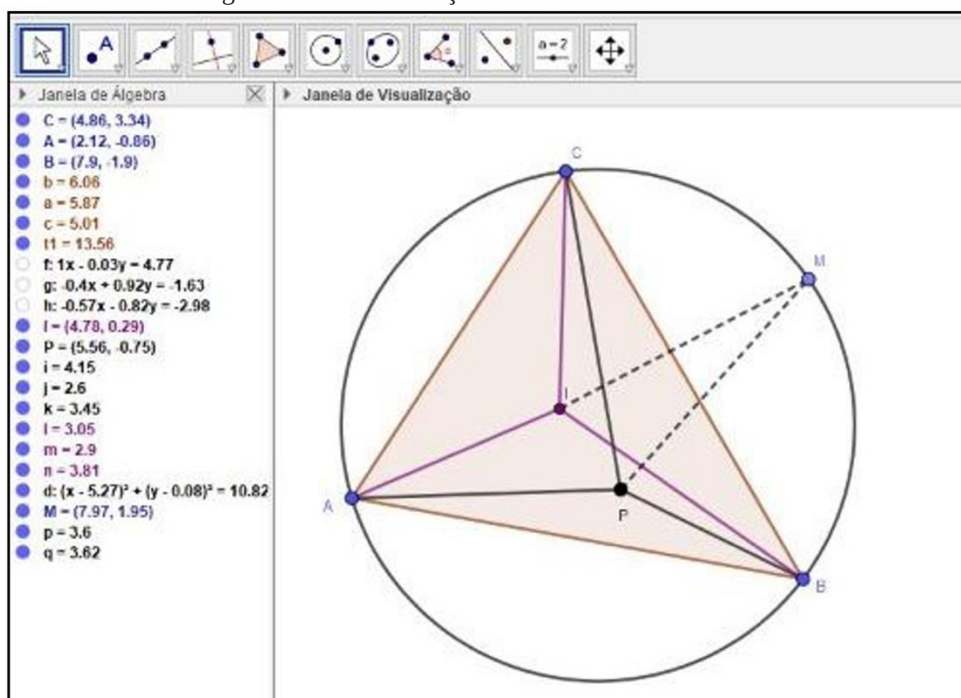
Desse modo, os futuros professores podem concluir que o incentro (intersecção das bissetrizes internas de um triângulo) do triângulo  $\triangle ABC$  tem seu ângulo interno medindo  $180^\circ$ . Assim, podem chegar à conclusão de que  $\angle PBA + \angle PCA - \angle PBC + \angle PCB$ . Logo, ao ligar os pontos, pode-se obter:  $\angle PBA - \angle PBC = \angle PCB - \angle PCA$  (3).

Por conseguinte, ao unir as expressões (1), (2) e (3), é possível encontrar:  $\angle IBP = \angle ICP$ . Portanto, os pontos  $B, I, P$  e  $C$  são concíclicos, ou seja, pertencem à mesma circunferência. Isto está ilustrado na Figura 21:

Figura 21 – Demonstração de  $\angle IBP = \angle ICP$ .

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

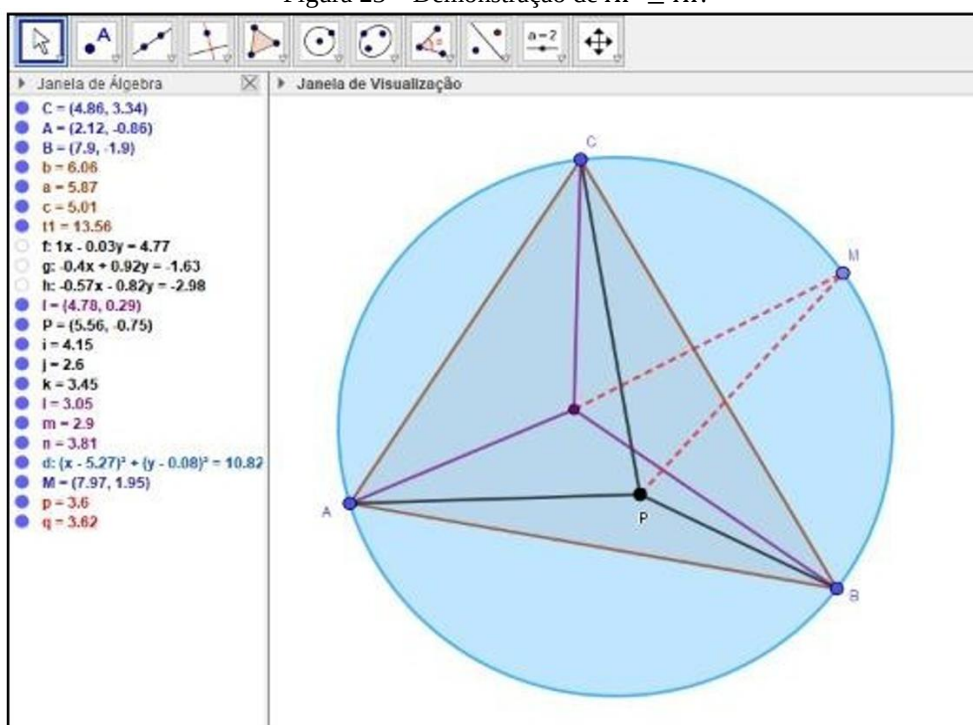
Considerando que a área do triângulo  $\Delta ABC$  é dividida pelo incentro ligado aos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , com o segmento  $AI$  sendo a medida do raio, pode-se encontrar na circunferência referente ao triângulo  $\Delta ABC$  um ponto  $M$ , o que permite chegar à conclusão de que  $MB = MC = MI = MP$ , como apresentado na Figura 22:

Figura 22 – Demonstração de  $MB = MC = MI = MP$ .

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

**Dialética de Validação:** A presente etapa é o momento de argumentar para persuadir os interlocutores daquilo que foi afirmado na dialética anterior. Os futuros professores devem apresentar as estratégias praticadas e, diante dos pressupostos realizados, concluir que  $AP \geq AI$ , ou seja,  $AP + MP \geq AM = AI + IM$ . Esta conclusão pode ser obtida, dado o fato de que o triângulo  $\triangle APM$  pode ser alterado, ocorrendo somente quando  $P = I$ , em que  $MI = MP$ , e, portanto,  $AP \geq AI$  (Figura 23):

Figura 23 – Demonstração de  $AP \geq AI$ .



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Conforme apresentado na Figura 23, conclui-se que a igualdade é válida vale se, e somente se,  $P$  estiver no segmento de linha  $AI$ , que ocorre se e somente se  $P = I$ .

**Dialética de Institucionalização:** Nesta etapa a professora organiza os elementos apresentados na fase adidática, formalizando o que foi desenvolvido pelos participantes da pesquisa. Segundo Almouloud (2007, p. 40), essa é a etapa em que “o professor fixa, convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber”.

Nesse momento, é papel da professora pesquisadora provar matematicamente uma solução para o problema, explicando como alguns elementos foram utilizados, tais como, circunferência, pontos notáveis do triângulo, ângulos na circunferência e relações métricas no triângulo.

#### 4.1.4 Situação Didática Olímpica 4 (SDO4)

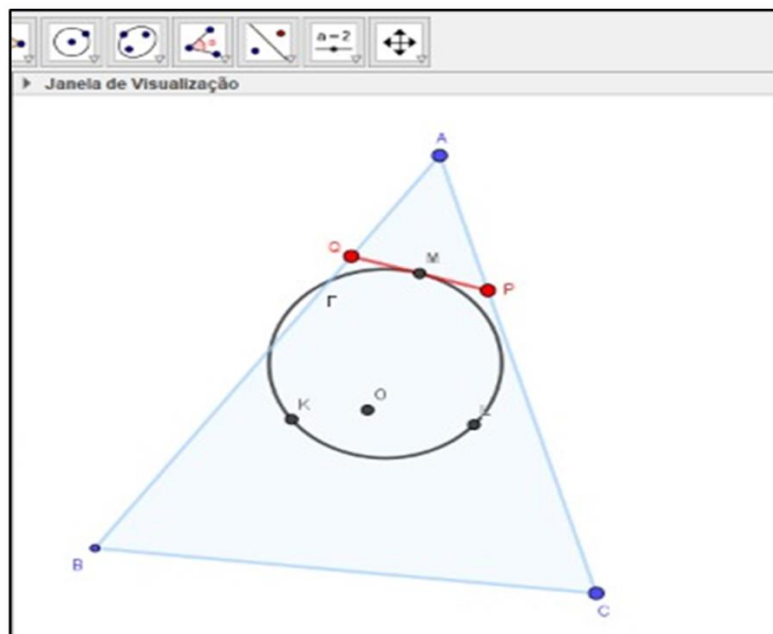
Este PO foi retirado da IMO 2009 (questão 2), aplicado no primeiro dia de prova. Tal problema propõe que o competidor demonstre que dois segmentos são iguais. Os conhecimentos prévios necessários são: os elementos do triângulo, a circunferência, circuncentro, pontos interiores, segmentos, ponto médio, mediatriz e reta tangente.

**Problema 4.** Seja  $ABC$  um triângulo cujo circuncentro é  $O$ . Sejam  $P$  e  $Q$  pontos interiores dos lados  $CA$  e  $AB$ , respectivamente. Sejam  $K$ ,  $L$  e  $M$  os pontos médios dos segmentos  $BP$ ,  $CQ$  e  $PQ$ , respectivamente, e  $\Gamma$  a circunferência que passa por  $K$ ,  $L$  e  $M$ . Suponha que a reta  $PQ$  é tangente à circunferência  $\Gamma$ . Demonstre que  $OP = OQ$ .

Diante do problema, fundamentamos seu desenvolvimento como segue a descrição dos parágrafos subsequentes.

**Dialética da Ação:** Na presente etapa, os futuros professores têm contato com o enunciado do problema escrito e sua construção no GeoGebra (Figura 24). Desse modo, espera-se que eles tragam como conhecimento prévio como construir um circuncentro de um triângulo, bem como, a mediatriz de cada um de seus lados e, a partir destas, indicar a reta tangente e os pontos interiores informados na questão:

Figura 24 – Construção do enunciado do problema.

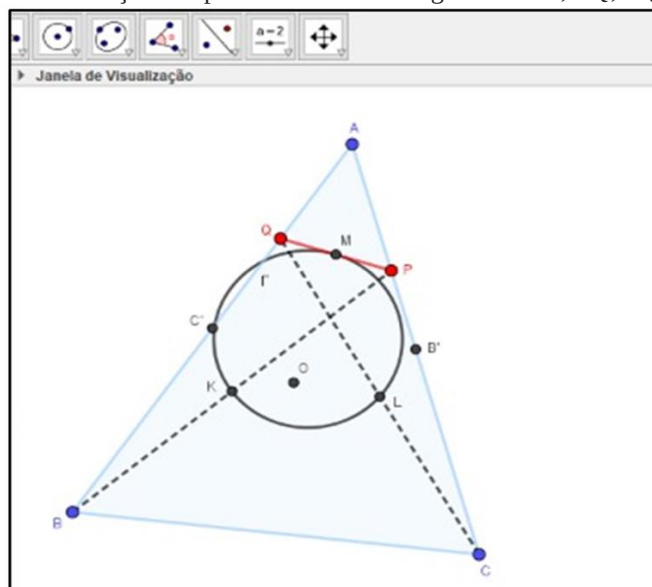


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

**Dialética da Formulação:** Nessa etapa, no decorrer da interação entre os participantes,

espera-se que ocorra uma troca de saberes. Aqui, almeja-se que o futuro professor inicie explorando no *software* as propriedades matemáticas necessárias à solução da SDO, como a descrição dos pontos  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $B'$  e  $C'$  e, os pontos médios dos segmentos  $BP$ ,  $CQ$ ,  $PQ$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente (Figura 25):

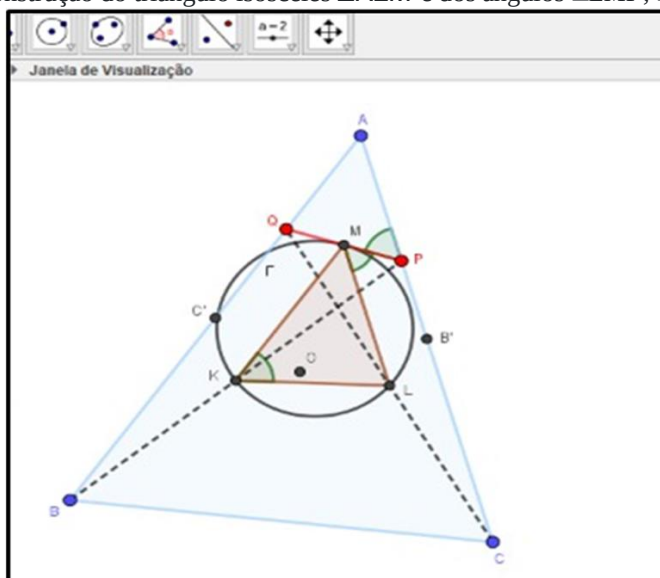
Figura 25 – Construção dos pontos médios dos segmentos  $BP$ ,  $CQ$ ,  $PQ$ ,  $CA$  e  $AB$ .



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Logo, ampliando a relação de  $CA \parallel LM$ , obtém-se que  $\angle LMP = \angle QPA$ . Considerando que o ponto  $K$  toca o segmento  $PQ$  no ponto  $M$ , tem-se a igualdade  $\angle LMP = \angle LKM$ . Assim, temos um triângulo isósceles  $\triangle KLM$  dentro da circunferência, conforme a Figura 26:

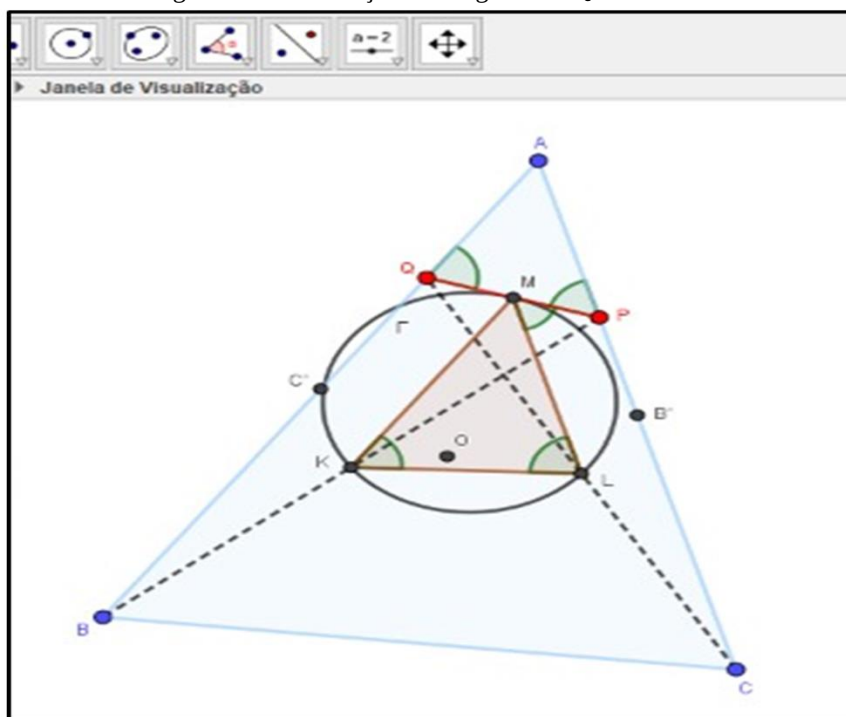
Figura 26 – Construção do triângulo isósceles  $\triangle KLM$  e dos ângulos  $\angle LMP$ ,  $\angle QPA$  e  $\angle LKM$ .



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Dessa forma, tem-se que  $\angle QPA = \angle LKM$ . Para descrever os pontos médios de seus lados, é necessário realizar cada intersecção ao triângulo  $\triangle ABC$ . Do mesmo modo, tem-se que  $AB \parallel MK$  onde  $\angle PQA = \angle KLM$ . Logo, os triângulos  $\triangle APQ$  e  $\triangle MKL$  são semelhantes, como pode ser visto na Figura 27:

Figura 27 – Construção dos ângulos  $\angle PQA$  e  $\angle KLM$ .

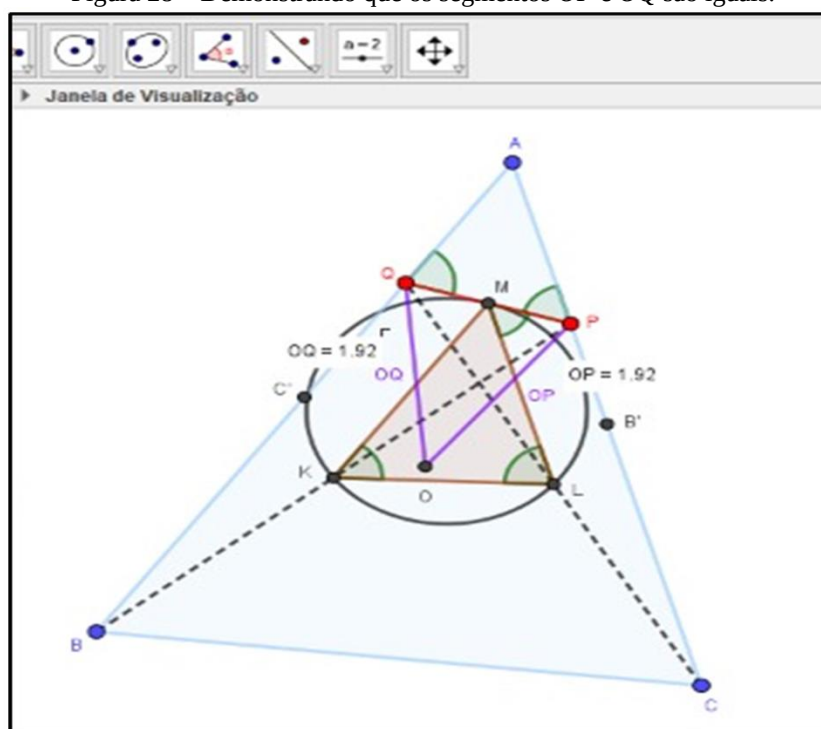


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

**Dialética de Validação:** É nessa etapa que se espera que os futuros professores tragam argumentos convincentes para validar a solução do problema, apresentando as estratégias utilizadas.

Na Figura 28 temos uma possibilidade de validação, em que são apresentados os pontos correspondentes a  $AP \cdot PC = AQ \cdot QB$ . Isso significa que a potência dos pontos  $P$  e  $Q$  em relação ao círculo do  $\triangle ABC$  é igual e, portanto, tem-se que  $OP = OQ$ .

Figura 28 – Demonstrando que os segmentos  $OP$  e  $OQ$  são iguais.



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

**Dialética de Institucionalização:** Nessa última etapa, a pesquisadora espera poder contribuir com a formação dos participantes, com a formalização do conhecimento matemático relativo à construção da solução do problema.

Dessa forma, pretende-se nesta etapa esclarecer quaisquer dúvidas que possam surgir sobre os tópicos abordados no problema, tais como, triângulo, circunferência, circuncentro, pontos interiores, segmentos, ponto médio, mediatriz e reta tangente. Ademais, considera-se importante realizar reflexões sobre a utilização do *software* GeoGebra em sua resolução, obtendo um *feedback* da experiência dos envolvidos.

Findando esta análise a priori, no capítulo seguinte temos uma descrição dos procedimentos realizados para a experimentação deste estudo.

## 5 EXPERIMENTAÇÃO

Neste capítulo descrevemos como foram realizados os encontros para a aplicação da pesquisa, bem como quais foram os procedimentos para a seleção dos participantes. Para Almouloud e Silva (2012, p. 27), a fase de experimentação da Engenharia Didática “consiste na aplicação da sequência didática, tendo como pressupostos apresentar os objetivos e condições da realização da pesquisa, estabelecer o contrato didático e registrar as observações feitas durante a experimentação”.

As SDOs apresentadas foram adaptadas para o uso com o GeoGebra, *software* utilizado como suporte na visualização e exploração de conceitos matemáticos discutidos nos POs. Os registros de dados foram coletados por meio de imagens, áudios, vídeos e as observações realizadas durante a aplicação, baseando-se na TSD e na própria ED.

Nas subseções seguintes apresentamos uma caracterização do lócus e dos sujeitos da pesquisa, como foi criado o grupo de estudos e a descrição dos encontros realizados.

### 5.1 Caracterização do lócus e sujeitos da pesquisa

Os encontros foram ofertados como atividade de pesquisa em formato presencial, por meio de um grupo de estudos com discentes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), com carga horária total de 20 horas, sendo expedido certificado aos participantes. O local de realização dos encontros foi o Laboratório de Informática do Curso de Matemática (LIMA).

O grupo de estudos foi divulgado durante o mês de agosto/2022 nas aulas presenciais do curso de Licenciatura em Matemática pelos professores, bem como no grupo de *WhatsApp* referente as disciplinas e as inscrições se mantiveram abertas.

Inicialmente, foram abertas 10 vagas para os licenciandos interessados. A seleção dos participantes foi realizada de modo virtual, por meio do preenchimento de uma ficha de inscrição via formulário eletrônico, em que foram solicitadas informações básicas, como e-mail, nome completo, telefone, nível de conhecimento acerca do GeoGebra e se já cursou as disciplinas “Geometria Espacial”, “Geometria Euclidiana” e “Geometria Analítica Vetorial” da matriz curricular do curso de graduação.

Das 10 vagas, apenas 7 foram preenchidas. Dentre estes inscritos, somente 5 sujeitos participaram de todos os encontros, cumprindo 100% da carga horária e estando aptos para serem analisados nesta pesquisa. Os sujeitos foram identificados por P1, P2, P3 P4 e P5 no

decorrer da dissertação para preservar suas identidades. Além disso, os sujeitos assinaram um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), assentindo sua participação. Um grupo de *WhatsApp* foi criado para repassar informações referentes à realização dos encontros e também para incentivar os sujeitos a dialogarem entre si.

O cronograma das atividades foi estruturado para ocorrer entre Setembro/2022 e Outubro/2022. Os encontros ocorreram com frequência semanal, sendo realizados no turno da manhã, às quartas-feiras, como ilustrado no Quadro 3:

Quadro 3 – Cronograma de execução da experimentação do projeto de pesquisa.

| Encontros  | PERÍODO    |                                                                                                                                       |
|------------|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|            | Data       | Descrição                                                                                                                             |
| Encontro 1 | 16/09/2022 | Orientações iniciais sobre a realização do projeto, apresentação do contrato didático e apresentação da Situação Didática Olímpica I. |
| Encontro 2 | 28/09/2022 | Apresentação da Situação Didática Olímpica II.                                                                                        |
| Encontro 3 | 05/10/2022 | Apresentação da Situação Didática Olímpica III.                                                                                       |
| Encontro 4 | 19/10/2022 | Apresentação da Situação Didática Olímpica IV.                                                                                        |
| Encontro 5 | 26/10/2022 | Questionário final e encerramento.                                                                                                    |

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Conforme descrito no Quadro 3, no encontro 1 foram repassadas as orientações iniciais sobre a realização do projeto aos participantes: o total de encontros, horários e objetivos. Em seguida, foi apresentado o contrato didático, lido por todos os sujeitos leram, em que concordaram e assinaram. Nesse contrato, estabelece que:

- (i) Os participantes da pesquisa são responsáveis por tentar resolver as situações didáticas propostas com base em seus conhecimentos prévios, da melhor forma possível, podendo fazer perguntas durante o desenvolvimento de cada uma das situações, bem como trocar ideias entre si. Eles também têm a liberdade de não resolver alguma etapa da situação didática, caso não compreendam ou não se sintam à vontade para tal;
- (ii) Os participantes da pesquisa estão cientes de que a pesquisadora necessita de materiais para a coleta de dados e estes dados serão coletados em forma de fotografias, áudios, vídeos, produções no ambiente do GeoGebra e todo e qualquer material escrito elaborado por eles. Assim, eles se comprometem fornecer todas as suas produções como material para análise;
- (iii) Os participantes estão cientes de que sua presença em todos os encontros é de suma

importância para o bom andamento da pesquisa e realização da coleta de dados, e se comprometem a fazer um esforço para manter a assiduidade nos encontros.

Posteriormente, foi aplicada a SDOI onde a pesquisadora disponibilizou de total autonomia para o desenvolvimento do aprendizado dos sujeitos. O mesmo ocorreu no encontro 2, encontro 3 e encontro 4, na aplicação da SDOI, SDOI e SDOI.

No encontro 5, foi aplicado o questionário final relacionado à pesquisa, com os itens descritos a seguir, no Quadro 4:

Quadro 4 – Itens do questionário final.

|   |                                                                                                                                                                                                                                  |
|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Descreva, pelo menos, dois aprendizados que você adquiriu durante os encontros.                                                                                                                                                  |
| 2 | Através das Situações Didáticas Olímpicas (SDO) abordadas durante os encontros, é possível que o futuro professor de matemática construa o seu próprio conhecimento acerca do objeto de estudo presente nos problemas olímpicos? |
| 3 | Qual a importância da formação do professor de matemática na preparação de alunos para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO)?                                                                                            |
| 4 | Na sua opinião, o software GeoGebra contribui na resolução de problemas olímpicos? Justifique sua resposta.                                                                                                                      |

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Ainda no encontro 5, para encerrar o grupo de estudos, a pesquisadora fez uma síntese dos encontros e deu uma barra de chocolate para cada participante como forma de agradecimento pela participação de cada um na experimentação do projeto.

O material necessário para cada encontro foi lápis ou caneta, régua, folhas A4, PO impresso, *data show* e computador com o *software* GeoGebra instalado. O GeoGebra foi utilizado como recurso didático, aprimorando a visão geométrica do futuro professor no momento da elaboração de conjecturas para solucionar as situações didáticas propostas.

Todas as SDOs abordadas na pesquisa foram retiradas das provas da IMO de anos distintos (1995, 2006, 2009 e 2018), além disso, os problemas são referentes ao conteúdo de geometria, especificamente, o estudo dos triângulos.

Na próxima seção trazemos mais detalhes sobre o grupo de estudos criado para realizar a experimentação desse projeto.

## 5.2 O grupo de estudos

O grupo de estudos foi proposto pela pesquisadora e seus orientadores a uma comissão no colegiado do curso de Matemática, o qual foi aprovado em reunião entre os professores. A escolha dos sujeitos que poderiam participar da pesquisa teve como pré-requisito ser aluno do

curso de Matemática da UVA e ter cursado as seguintes disciplinas da matriz curricular: Geometria Espacial, Geometria Euclidiana e Geometria Analítica Vetorial.

Para resolver as SDOs propostas nos encontros, é muito importante que os sujeitos tenham um conhecimento sólido acerca dos entes da geometria, pois os Problemas Olímpicos abordados foram todos retirados de provas da Olimpíada Internacional de Matemática, o que requer alto nível de conhecimento e aplicabilidade de conceitos.

Em relação ao que se pretende com esse grupo de estudos e baseando-nos no objeto da pesquisa, definimos os seguintes objetivos:

- **Objetivo Geral**

Realizar um processo formativo referente ao ensino de geometria, especificamente o estudo dos triângulos, a partir dos problemas da IMO, visando um modelo de ensino com o auxílio do *software* GeoGebra e a Teoria das Situações Didáticas.

- **Objetivos Específicos**

- (a) Resolver Problemas Olímpicos (POs) abordando o estudo dos triângulos, com base na Teoria das Situações Didáticas e com apoio do *software* GeoGebra;
- (b) Proporcionar a vivência de métodos de estudos inerentes ao uso de Problemas Olímpicos (POs), com foco na preparação para a IMO;
- (c) Verificar o desenvolvimento dos sujeitos em relação ao uso do *software* GeoGebra na resolução dos problemas da IMO.

Esse grupo procurou ampliar as reflexões sobre o ensino de geometria, sobretudo, o estudo dos triângulos, por interposto de POs, buscando despertar diferentes percepções e condutas na prática docente, ocasionando o desejo de restabelecer o aspecto de abordagem dos conceitos matemáticos debatidos através da Teoria das Situações Didáticas e o uso do *software* GeoGebra. Esperou-se também que este grupo de estudos percorresse trilhas que levassem à reflexão, promovendo seu desenvolvimento profissional como futuro professor de matemática.

### 5.3 Descrição da experimentação

Essa seção foi constituída por quatro SDOs, todas elas construídas de forma adaptada ao *software* GeoGebra e disponibilizadas pela pesquisadora. O GeoGebra foi um suporte tecnológico que auxiliou na visualização e exploração de conceitos matemáticos compreendidos nos Problemas Olímpicos (PO).

Esse espaço da organização das Situações Didáticas Olímpicas (SDO) propôs à extração de um diálogo entre professor, aluno e o meio no decurso da experiência das situações didáticas.

De acordo com Lablém e Bittar (2018, p. 207), sobre a estruturação desse meio, ressaltam que “[...] é uma variável pensada e organizada pelo professor com intenções de provocar desequilíbrios cognitivos, a fim de que possa ocorrer a aprendizagem à medida que o aluno vai adaptando-se”.

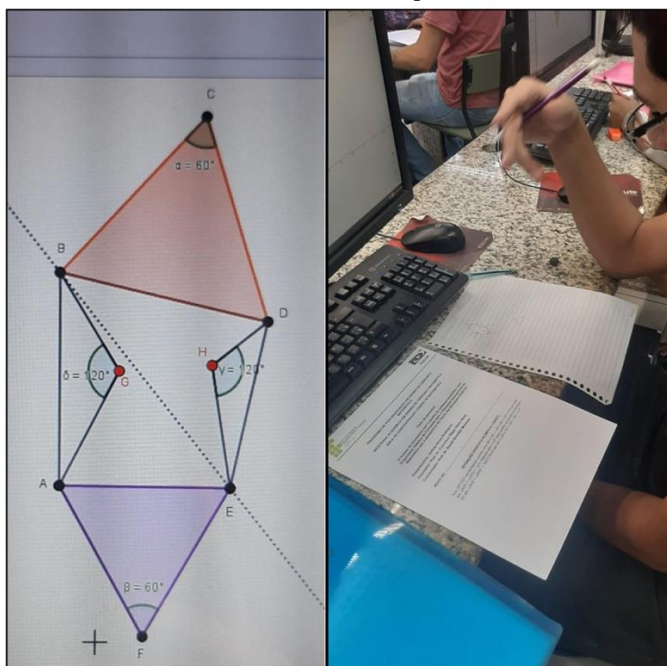
Nesta etapa realizamos a coleta dos dados através de registros fotográficos, gravações em áudio e/ou vídeo com a devida autorização dos participantes, registros de anotações das respostas das situações didáticas, as produções no GeoGebra e também um questionário final sobre os encontros e o aprendizado proporcionado. A partir destes dados, realizamos a análise *a posteriori*, com base nos pressupostos da Engenharia Didática, observando minuciosamente as construções realizadas pelos envolvidos na pesquisa e as discussões entre si, a fim de verificar a evolução de cada participante durante o desenvolvimento das dialéticas da TSD.

Apresenta-se a experimentação de cada uma das situações didáticas desta pesquisa, observando a participação dos sujeitos, assim como as demonstrações de seus conhecimentos adquiridos ao longo de sua trajetória como estudantes.

### 5.3.1 Experimentação da Situação Didática Olímpica I

A pesquisadora disponibilizou a Figura construída no *software* GeoGebra e o PO1 impresso e os licenciandos em formação tiveram o primeiro contato com este (Figura 29):

Figura 29 – Primeiro contato com a SDO1 por intermédio do GeoGebra.



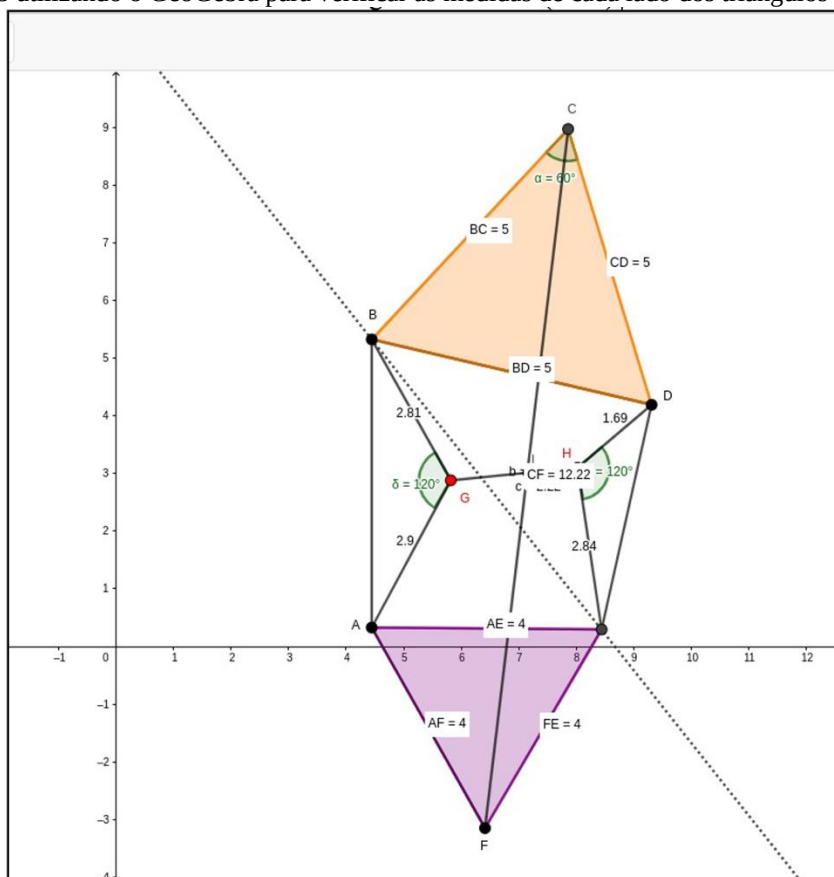
Fonte: Registro da autora (2023).

Neste momento, os futuros professores realizaram a leitura da questão e tentaram interpretar as informações contidas no seu enunciado, na busca por estabelecer hipóteses que possivelmente solucionassem o problema. Esse momento de exploração denomina-se a etapa de Ação (LABLÉM; BITTAR, 2018).

Ao receber a construção no GeoGebra, o sujeito P2 já fez a primeira pergunta: “*A gente pode usar essas informações disponíveis aqui no GeoGebra?*”, a professora, prontamente, respondeu que sim. Aqui, o licenciando já percebeu que o *software* seria um recurso aliado.

Na tentativa de encontrar estratégias de resolução, o sujeito P3 utilizou a ferramenta “Distância, Comprimento ou Perímetro” para verificar a medida de cada um dos lados dos triângulos  $\triangle BCD$  e  $\triangle EFA$  (Figura 30):

Figura 30 – P3 utilizando o GeoGebra para verificar as medidas de cada lado dos triângulos  $\triangle BCD$  e  $\triangle EFA$ .

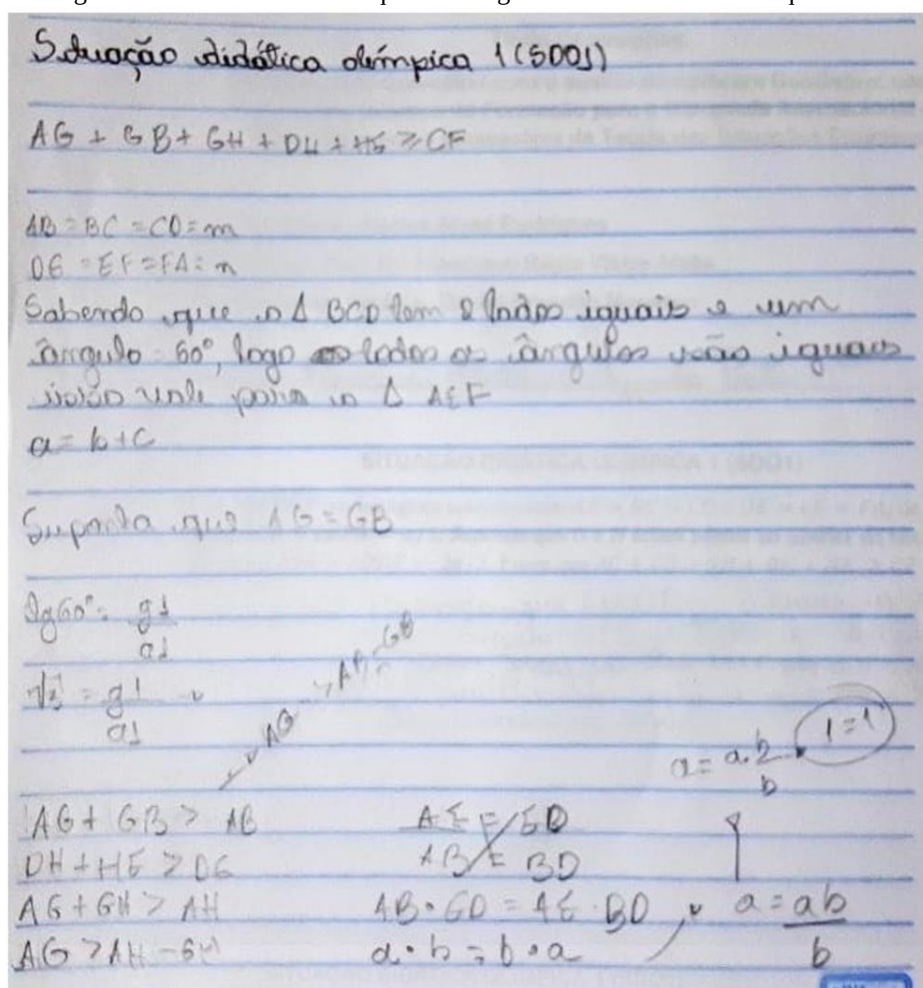


Fonte: Registro da autora (2023).

Dessa forma, P3 observou que os lados do triângulo  $\triangle BCD$  medem 5 unidades de medida e os lados do triângulo  $\triangle EFA$  medem 4 unidades de medida, concluindo que os dois triângulos são equiláteros, conforme esperado na análise *a priori*, o que configurou o primeiro passo para construir a solução do problema.

O participante P2 teve o seguinte raciocínio: “Sabendo que o triângulo  $\triangle BCD$  tem dois lados iguais e um ângulo igual a  $60^\circ$ , logo, todos os ângulos são iguais. Isso vale também para o triângulo  $\triangle EFA$ . Assim, também se sabe que os dois triângulos têm o mesmo lado”, conforme Figura 31, chegando à mesma conclusão de P3:

Figura 31 – P2 demonstrando que os triângulos  $\triangle BCD$  e  $\triangle EFA$  são equiláteros.



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Na imagem, P2 interpretou o enunciado da questão, onde afirma que  $\angle BCD = \angle EFA = \pi/3$ . Sabendo que  $\pi/3 = 60^\circ$ , concluiu que os triângulos  $\triangle BCD$  e  $\triangle EFA$  são equiláteros. Observando a participação dos colegas P2 e P3, o sujeito P5 também se manifestou, com o seguinte posicionamento:

P5: Eu fiz dessa forma aqui! Usei o GeoGebra para descobrir as medidas dos segmentos e simplesmente somei seus valores  $AG + GB + DH + HE$ . Agora falta o segmento  $GH$  que não tem aqui, a não ser que eu trace esse segmento utilizando o GeoGebra.

Professora: Você pode fazer isso! Traçar um segmento do ponto  $G$  ao ponto  $H$ .

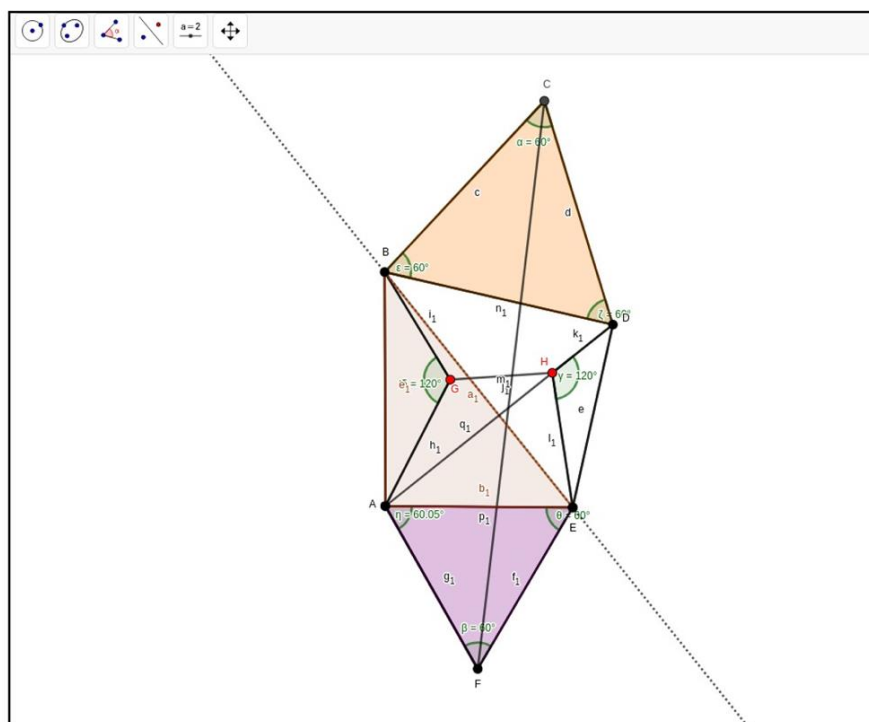
P5: Pronto! Ai depois é só verificar que essa soma é sempre menor que essa ( $CF < AG + GB + GH + DH + HE$ ).

Professora: Ok!

O participante P5 percebeu que através das ferramentas “Segmento” e “Distância, Comprimento ou Perímetro” no GeoGebra seria possível chegar à solução do problema. Esse momento de discussão entre os sujeitos configurou a etapa de *Formulação* da TSD, que segundo Brousseau (2010, p. 3), “[...] é uma situação que coloca pelo menos dois atores em contato com um meio”.

Na etapa de Validação, apenas os sujeitos P2 e P5 conseguiram apresentar uma solução fechada para o PO e demonstrar suas estratégias. P2 validou sua resposta utilizando a semelhança de triângulos, apontando que: “Com a ajuda do GeoGebra eu consigo mostrar que  $\overline{BC} = \overline{CD}$  e  $\overline{AF} = \overline{EF}$  e, dessa forma, posso provar que  $\angle CBD = \angle CDB$  e  $\angle FAE = \angle FEA$ , conforme a Figura 32:

Figura 32 – Etapa de validação do sujeito P2.



Fonte: Registro da autora (2023).

O participante P2 utilizou a ferramenta “Distância, Comprimento ou Perímetro” para verificar as medidas dos segmentos da figura construída e, através do Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos, que afirma que “toda reta paralela a um dos lados do triângulo que intercepta os outros dois lados determina um segundo triângulo semelhante ao primeiro”, ele demonstrou que  $\angle CBD = \angle CDB$  e  $\angle FAE = \angle FEA$ .

Já P5 apresentou duas demonstrações. Uma delas foi usando o conceito de distância entre dois pontos, através da fórmula deduzida a partir do Teorema de Pitágoras, em que temos:  $d_{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ . Observe os cálculos realizados por ele na Figura 33. Observamos que o participante utilizou o GeoGebra para verificar os cálculos realizados no caderno:

Figura 33 – Etapa de validação do sujeito P5 (demonstração 1).

Top sheet calculations:

$$C = (x_1, y_1) = (7.96, 9.09)$$

$$P = (x_2, y_2) = (6.54, -3.04)$$

$$d(C, P) = \sqrt{(7.96 - 6.54)^2 + (9.09 - (-3.04))^2}$$

$$= \sqrt{(1.42)^2 + (12.13)^2} =$$

$$\sqrt{2.0164 + 147.1369} = \sqrt{149.1533}$$

$$= 12.21283341 \approx 12.2$$

Bottom sheet calculations:

Left side:

$$\|\vec{AG}\| = 3.07$$

$$\|\vec{GB}\| = 0.69$$

$$\|\vec{GH}\| =$$

$$\|\vec{DH}\| = 1.65$$

$$\|\vec{HE}\| = 2.91$$

Right side:

$$10.28 + 2.1 = 12.28$$

$$\|\vec{AG}\| + \|\vec{GB}\| + \|\vec{GH}\| + \|\vec{DH}\| + \|\vec{HE}\| = 10.28$$

$$\|\vec{GH}\| \approx 2.1$$

$$H = (x_1, y_1) = (8.13148, 3.2812)$$

$$G = (x_2, y_2) = (5.95348, 3.136)$$

$$d(G, H) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{(8.13148 - 5.95348)^2 + (3.2812 - 3.136)^2}$$

$$= \sqrt{(2.178)^2 + (0.1452)^2}$$

$$= \sqrt{4.743684 + 0.02108304}$$

$$= \sqrt{4.76476704} \approx 2.1$$

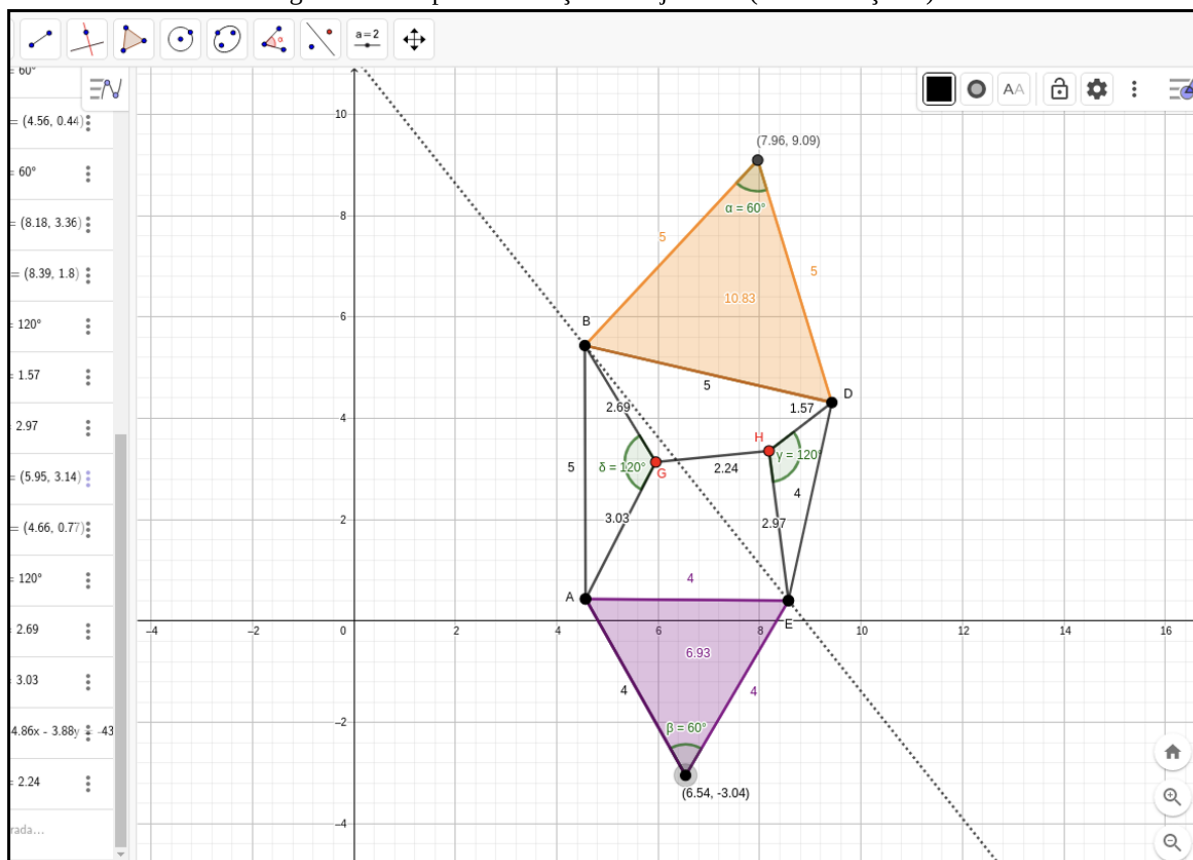
Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Na sua primeira demonstração, P5 calculou a soma dos segmentos  $AG + GB + GH + DH + HE$ , com o aporte da fórmula da distância entre dois pontos, encontrando um resultado aproximado de 12,2. Por meio do mesmo teorema, calculou a medida de  $CF$ , encontrando um resultado aproximado de 2,1. Assim, concluiu que  $AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$ .

A segunda demonstração que P5 apresentou, foi utilizando as ferramentas do GeoGebra: “Segmento”, para construir um novo segmento de reta, e “Distância, Comprimento ou Perímetro”, para verificar a medida de cada segmento e, assim, demonstrar que  $AG + GB +$

$GH + DH + HE \geq CF$ ), como vemos na Figura 34:

Figura 34 – Etapa de validação do sujeito P5 (demonstração 2).



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Como mostrado na Figura 34, P5 construiu o segmento  $GH$ , depois somou todos os segmentos  $AG + GB + GH + DH + HE$  e verificou que essa soma é maior que a medida do segmento  $CF$ .

Após isso, ocorreu a última etapa, que foi a *Institucionalização*, que segundo Almouloud (2007, p. 40), define-se “[...] como aquela em que o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber”. Nesse momento, a professora organizou todas as informações e conceitos mostrados pelos participantes, com a intenção de fixar o aprendizado. Assim, a professora apresentou sua proposta final de solução do problema e a construção no *software* GeoGebra.

Durante a resolução da SDO1, a pesquisadora foi apresentando alguns conceitos, tais como: triângulos, seus elementos e suas propriedades, mediatriz, arco capaz, quadriláteros inscritíveis e o Teorema de Ptolomeu, sendo este último desconhecido pelos participantes.

Todos os conhecimentos apresentados no decurso da SDO1 foram desenvolvidos durante a mediação realizada pela docente, que por sua vez deu total autonomia às ações dos

participantes.

### 5.3.2 Experimentação da Situação Didática Olímpica 2

Dando início à aplicação da SDO2, a professora disponibilizou o PO2 impresso, bem como, a construção do enunciado do problema no computador de cada sujeito no *software* GeoGebra, para que os participantes tivessem o suporte na visualização da figura construída.

É possível observar o contato inicial dos indivíduos com o enunciado da SDO e as informações contidas nele na Figura 35:

Figura 35 – Primeiro contato com a SDO2 por intermédio da visualização no GeoGebra.

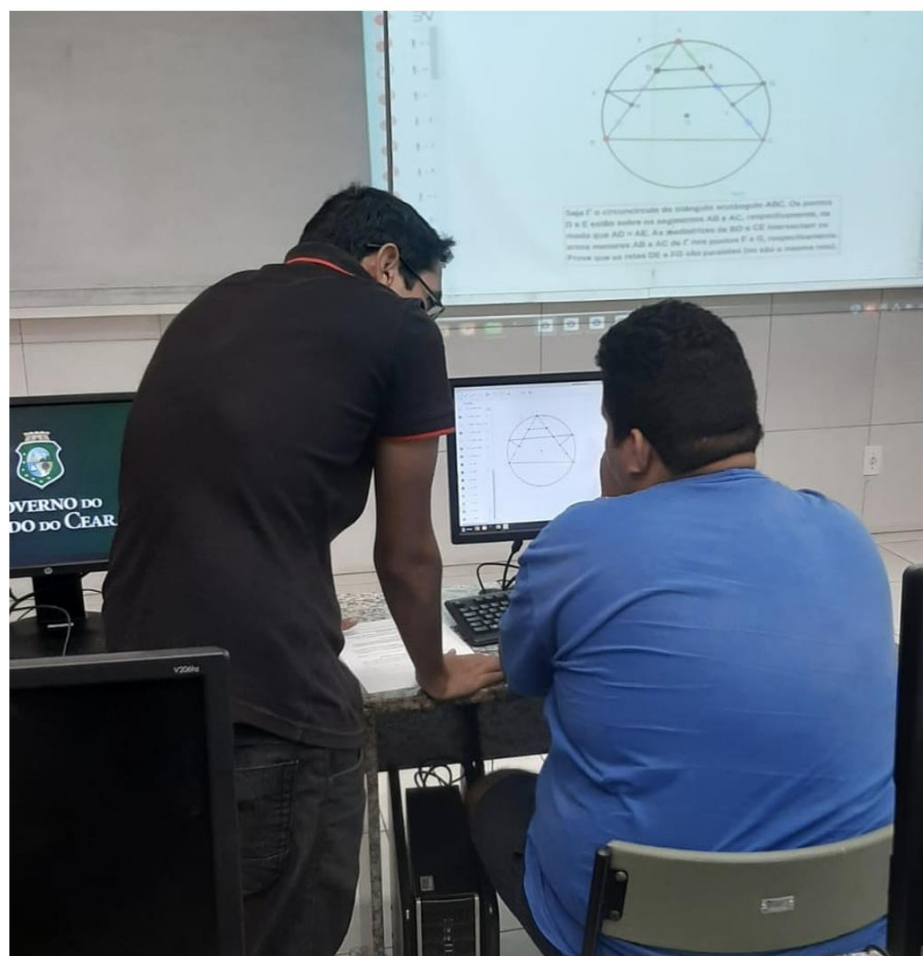


Fonte: Dados da pesquisa (2023).

A partir desse contato, os futuros professores iniciaram suas ações sobre o meio, extraindo informações consideráveis do enunciado associado ao *software*, construindo suas estratégias. Conforme Gálvez (1996, p. 28), “[...] nas situações de ação, as quais geram uma interação entre os alunos e o meio físico, os alunos devem tomar decisões que faltam para organizar sua atividade de resolução do problema formulado”.

Na etapa de *Formulação*, o participante P1 sugeriu ao grupo que recorresse à construção de circunferências e, a partir disso, utilizassem seus elementos para provar que as retas  $\overrightarrow{DE}$  e  $\overrightarrow{FG}$  são paralelas. Para entender melhor o raciocínio do colega, P3 se dirigiu até P1 e observou sua construção no GeoGebra (Figura 36):

Figura 36 – Momento de interação entre P3 e P1 na etapa de formulação.



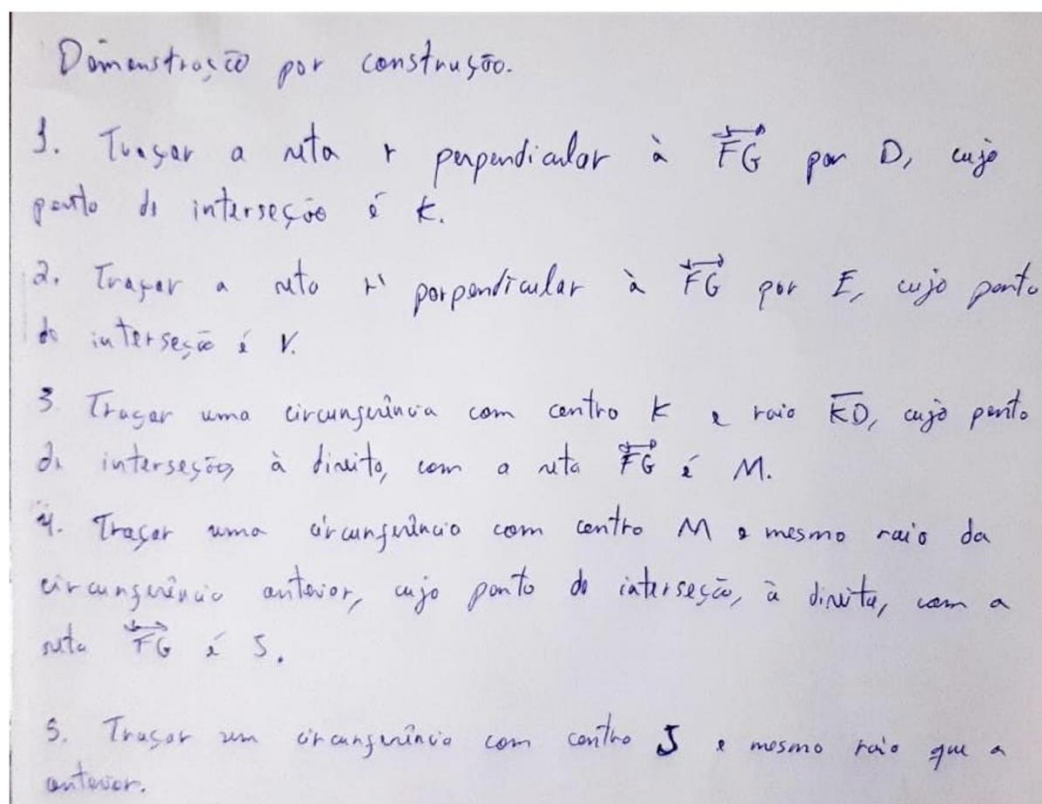
Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Na busca por estratégias para solucionar a SDO2, o sujeito P5 utilizou a sugestão dada por P1 e complementou:

P5: Utilizei os conceitos de desenho geométrico. Tracei essas duas circunferências com raios iguais. Primeiro tracei essa reta aqui perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{FG}$  passando pelo ponto D. Depois tracei outra reta perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{FG}$ , passando pelo ponto E. Então, eu peguei esse ponto K, que é a intersecção dessa reta perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{FG}$ , tracei a primeira circunferência e determinei esse ponto M aqui. Depois tracei outra circunferência de mesmo raio e determinei esse ponto J. Como essas duas circunferências tem o mesmo raio, a gente conclui que essas distâncias são iguais.

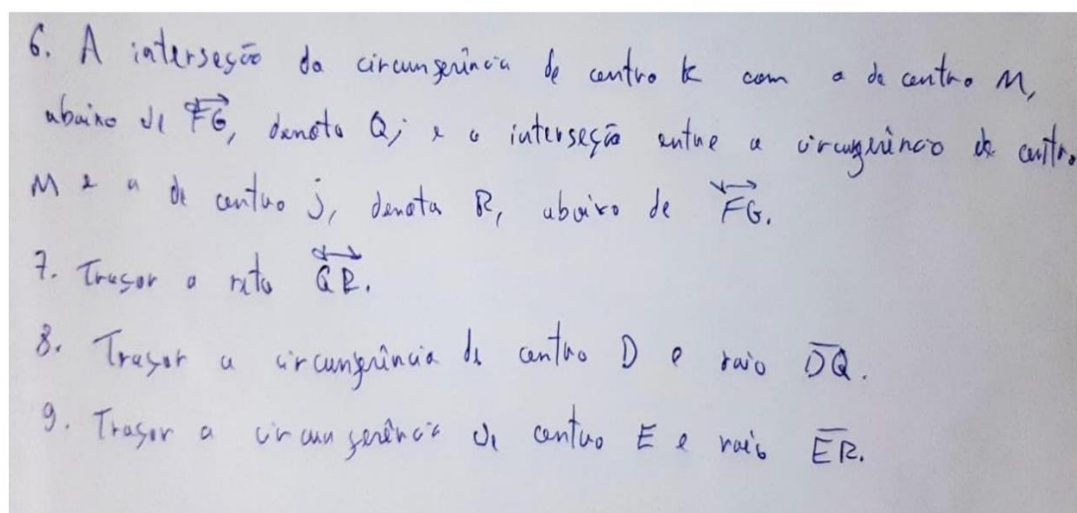
O participante P4 não entendeu e pediu para P5 explicar novamente. Dessa forma, P5 demonstrou seu raciocínio no papel, com intuito de ser mais claro, construindo suas conjecturas seguindo 9 passos, que estão sintetizados nas Figuras 37 e 38:

Figura 37 – Passos de 1 a 5 da formulação do sujeito P5.



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Figura 38 – Passos de 6 a 9 da formulação do sujeito P5.



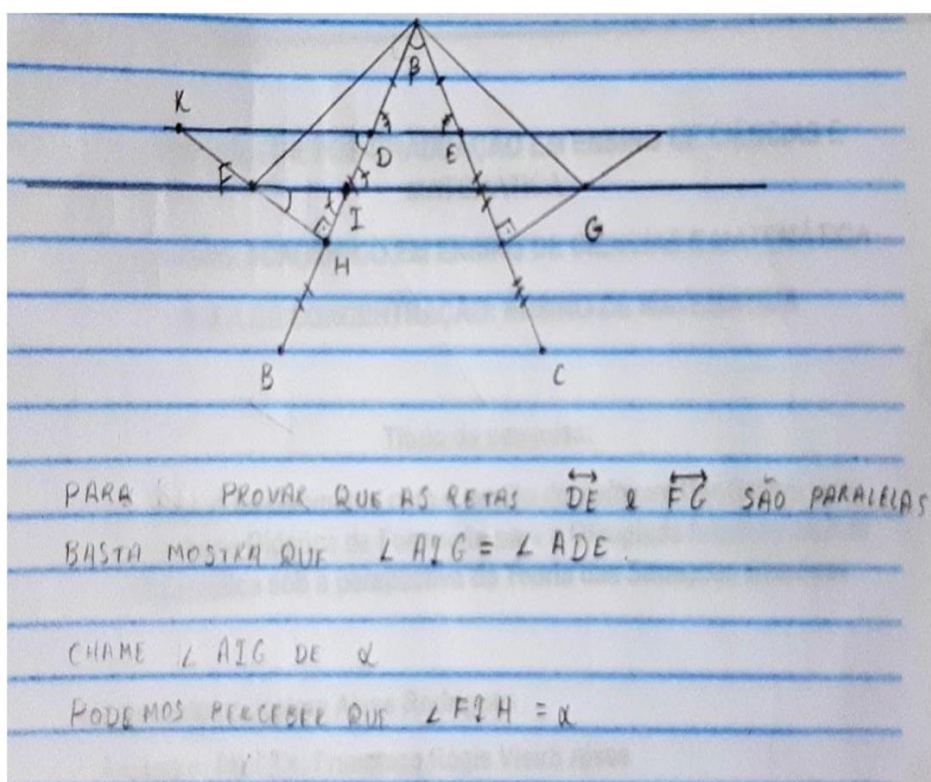
Fonte: Dados da pesquisa (2023).

O participante P5 quis explicar que, ao traçar duas retas perpendiculares a  $\overleftrightarrow{FG}$ , uma passando pelo ponto  $D$  e interceptando o ponto  $K$  e outra passando pelo ponto  $E$  e interceptando o ponto  $M$ , e depois construir duas circunferências, uma com centro  $K$  e raio  $KD$ , e a outra

com centro  $M$  e raio  $\overline{ME}$ , consegue provar que os raios  $\overline{KD}$  e  $\overline{ME}$  são iguais e que, consequentemente, as retas  $\overline{DE}$  e  $\overline{FG}$  são paralelas.

Após a demonstração de P5, o participante P2 aproveitou o ensejo e apresentou sua estratégia, que foi a que mais se aproximou com o previsto na análise *a priori*. Ele utilizou os conceitos de retas paralelas cortadas por transversais. Afirmou ele que, para provar que as retas  $\overline{DE}$  e  $\overline{FG}$  são paralelas, basta mostrar que o ângulo  $\angle AIG = \angle ADE$ , como na Figura 39:

Figura 39 – Formulação do sujeito P2.



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

De acordo com a solução apontada por P2, podemos observar que ele traçou duas retas paralelas, uma passando pelos pontos  $D$  e  $E$  e outra passando pelos pontos  $F$  e  $G$ . Dessa forma, foram formados dois triângulos semelhantes ( $\triangle ADE$  e  $\triangle AIG$ ) em que, por definição, temos que os ângulos  $\angle ADE$  e  $\angle AIG$  são iguais. Logo, as retas  $\overleftrightarrow{DE}$  e  $\overleftrightarrow{FG}$  são paralelas.

A partir do momento que os indivíduos organizaram as informações consideradas mais relevantes, abordando uma linguagem matemática formal para validar as conjecturas construídas, estabeleceu-se a etapa de *validação*, que segundo Brousseau (2010, p. 4), “[...] é uma situação cuja solução requer que os atores estabeleçam juntos a validade do conhecimento característico dessa situação”. Para validar sua resposta, P1 se expressou da seguinte forma:

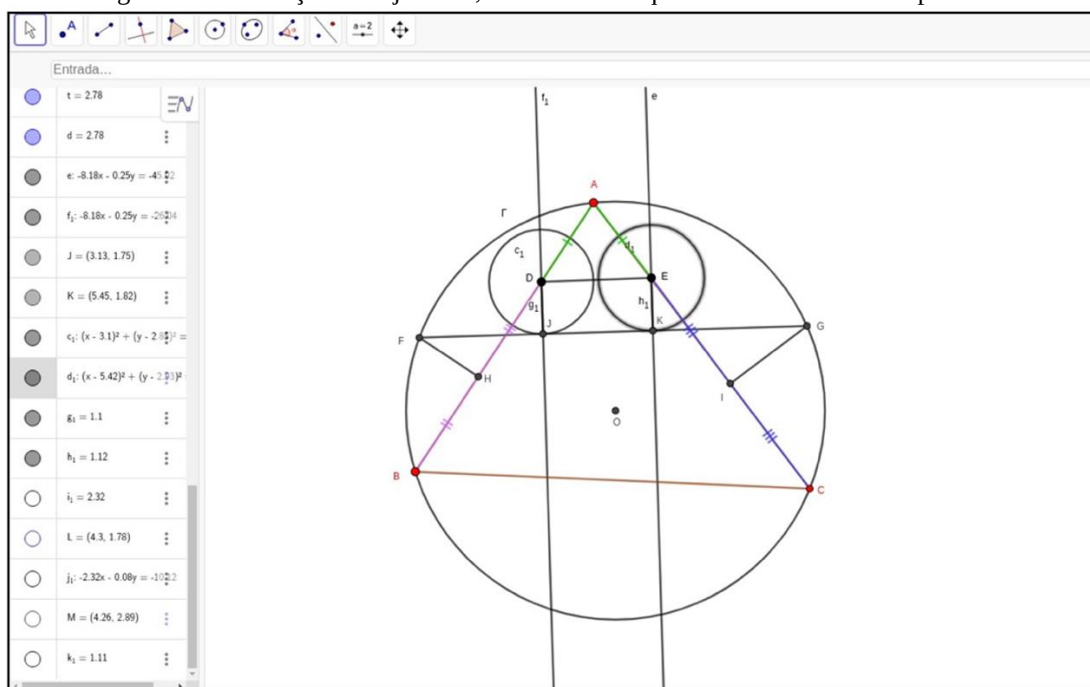
P1: Se eu tenho um certo ponto com uma distância de uma determinada reta, eu consigo pegar um compasso e traçar uma circunferência que tenha centro no ponto e passe pela reta. Depois, traço outra circunferência com mesmo raio, passando pela mesma reta e com esse outro centro. Aí, se essas circunferências são iguais, passando por esses pontos (J e K) e de mesmo raio, posso dizer que essas distâncias também são iguais. Tentei trazer para o GeoGebra para conferir os valores e obtive essa construção aqui (Figura 40).

Professora: Ok! E qual é sua conclusão?

P1: Que as retas  $\overleftrightarrow{DE}$  e  $\overleftrightarrow{FG}$  são paralelas!

A Figura 40 apresenta a construção realizada por P1, onde o mesmo construiu duas circunferências de mesmo raio, uma de centro  $D$  e a outra de centro  $E$ , traçando duas retas perpendiculares aos centros  $D$  e  $E$ , e passando pelos pontos  $J$  e  $K$ . Ao verificar que os raios das duas circunferências são iguais, consequentemente, as retas  $\overleftrightarrow{DE}$  e  $\overleftrightarrow{FG}$  são paralelas:

Figura 40 – Validação do sujeito P1, demonstrando que as retas  $\overleftrightarrow{DE}$  e  $\overleftrightarrow{FG}$  são paralelas.



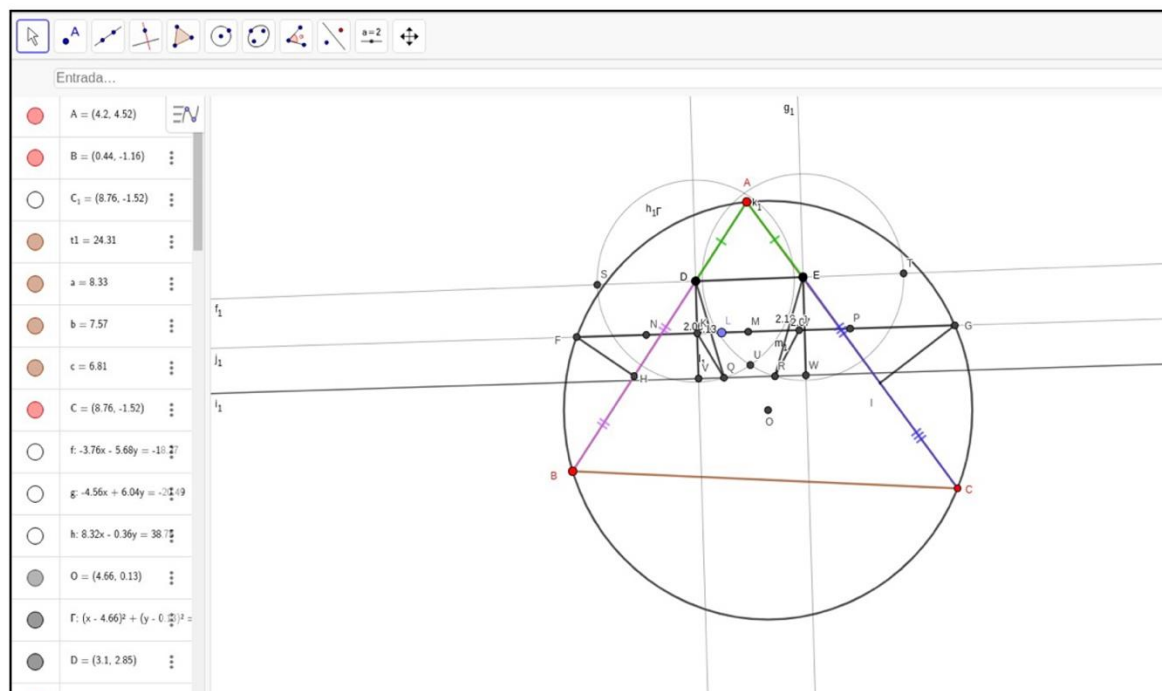
Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Semelhante à demonstração de P1, o participante P5 validou suas conjecturas, mas antes, reformulou suas ideias:

P5: Eu tava revendo aqui minha construção e fiquei um pouco confuso, aí eu decidi fazer assim, que é mais seguro: Eu tracei uma nova circunferência aqui com centro no ponto  $D$  e outra com centro no ponto  $E$ , elas interceptam a reta  $\overleftrightarrow{DE}$ . Coloquei os pontos  $S$  e  $Q$  nessa circunferência, e os pontos  $R$  e  $T$ , nessa outra. Essas distâncias ( $\overline{DS}$ ,  $\overline{DQ}$ ,  $\overline{ER}$  e  $\overline{ET}$ ) são iguais, e isso é suficiente para provar que as retas  $\overleftrightarrow{DE}$  e  $\overleftrightarrow{FG}$  são paralelas.

Na Figura 41, temos a demonstração de P5:

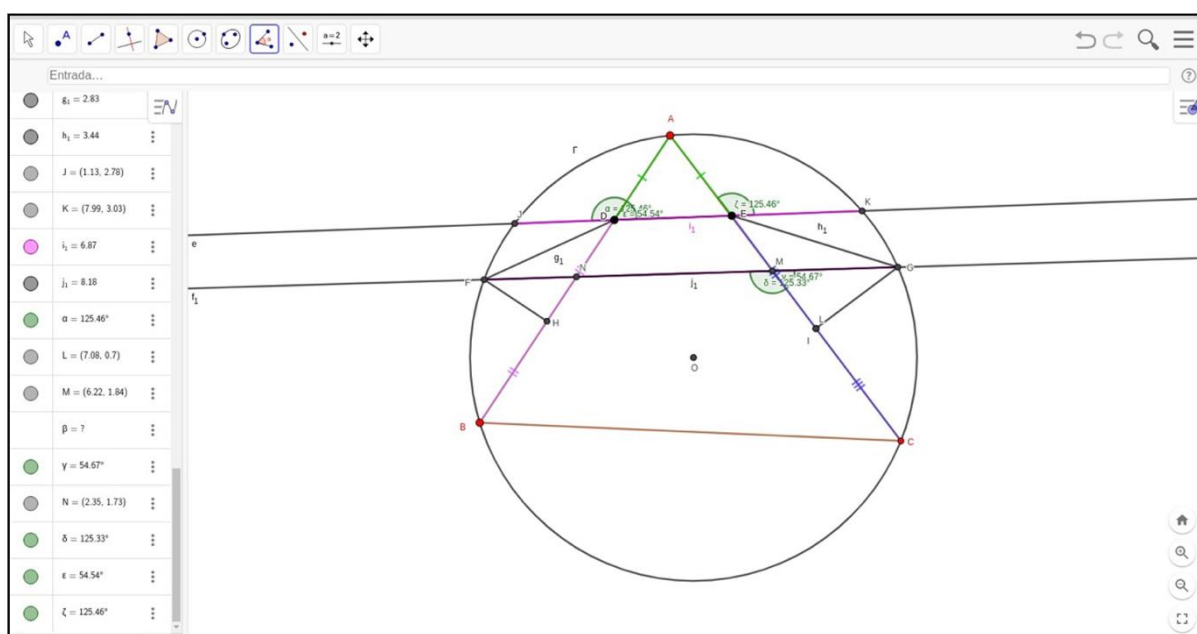
Figura 41 – Validação do sujeito P5, demonstrando que as retas  $\overline{DE}$  e  $\overline{FG}$  são paralelas.



Fonte: Registro da autora (2023).

Ainda na etapa de *Validação*, P2 apresentou sua demonstração, dessa vez no GeoGebra, provando que as retas  $\overline{DE}$  e  $\overline{FG}$  são paralelas a partir da igualdade  $\angle AIG = \angle ADE$ , representada na Figura 42:

Figura 42 – Validação do sujeito P2, demonstrando que as retas  $\overline{DE}$  e  $\overline{FG}$  são paralelas.



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

De modo geral, os participantes P1, P2 e P5 tiveram raciocínios parecidos, utilizando o conceito de circunferência e seus elementos, bem como de retas paralelas e retas transversais.

Após a explicação e validação da solução pelos participantes, a pesquisadora mediou o momento, indagando aos sujeitos se restava alguma dúvida em relação à solução apresentada na SDO2. Esse momento se consolidou como a etapa de *Institucionalização*, onde a professora explicou quais conceitos foram utilizados na SDO2 dando ênfase ao circuncírculo de um triângulo acutângulo, mediatriz, bissetriz e altura de um triângulo, retas paralelas e ângulos excêntricos interiores, centrais e inscritos.

### 5.3.3 Experimentação da Situação Didática Olímpica 3

A professora disponibilizou aos participantes o PO3 impresso e a construção do enunciado do problema no *software* GeoGebra. O primeiro contato deles com a SDO 3 e início da dialética de ação está registrado na Figura 43:

Figura 43 – Contato inicial com a SDO3.



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Nesse momento, os sujeitos foram em busca de seus conhecimentos prévios para identificar os elementos matemáticos presentes no problema, onde conseguiram perceber inicialmente a existência dos pontos notáveis do triângulo  $\Delta ABC$  e suas relações métricas.

Após o contato inicial com a SDO3, os futuros professores realizaram suas tentativas com o objetivo de identificar estratégias que poderiam levá-los a um método eficaz de solução. Alves e Dias (2018, p. 107) destacam que “[...] os alunos manifestam uma ação em situação, na condição em que a situação problema manifeste um sentido e desperta o interesse dos mesmos”. Esse momento denomina-se, baseado na TSD, como a etapa de *Ação*.

A pesquisadora começou a indagá-los, com perguntas referentes à compreensão inicial do problema e sobre quais informações relevantes poderiam ser retiradas dessa SDO a partir da leitura do enunciado. Os participantes P1 e P2 se manifestaram, apontando:

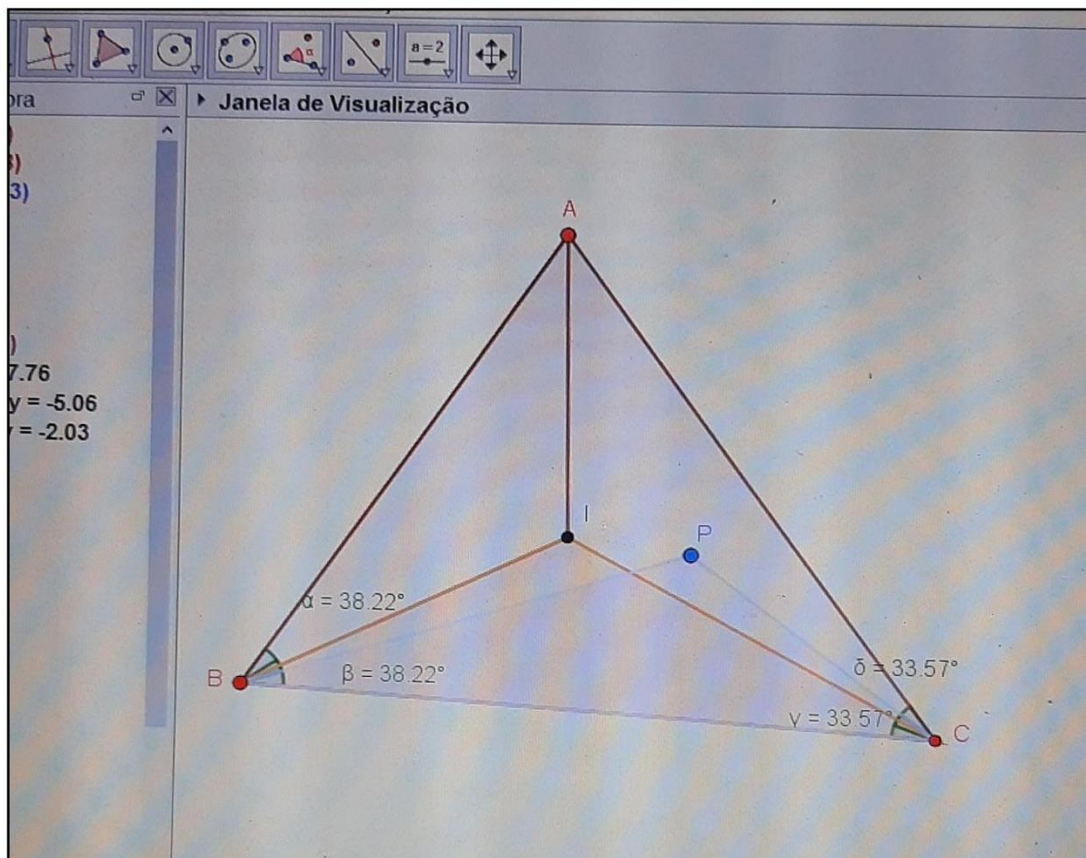
Professora: Alguém já iniciou alguma estratégia de resolução?

P2: Inicialmente, acho que devemos usar os pontos notáveis de um triângulo.

P1: Eu também estou seguindo essa linha de raciocínio!

P2: Sabendo que I é o incentro e é igual a P, só existe um único ponto I no centro desse triângulo. E o  $\angle PBA = \angle PBC$  e o  $\angle PCB = \angle PCA$ . Tentei construir aqui no GeoGebra (Figura 44).

Figura 44 – P2 verificando as igualdades  $\angle PBA = \angle PBC$  e  $\angle PCB = \angle PCA$ .

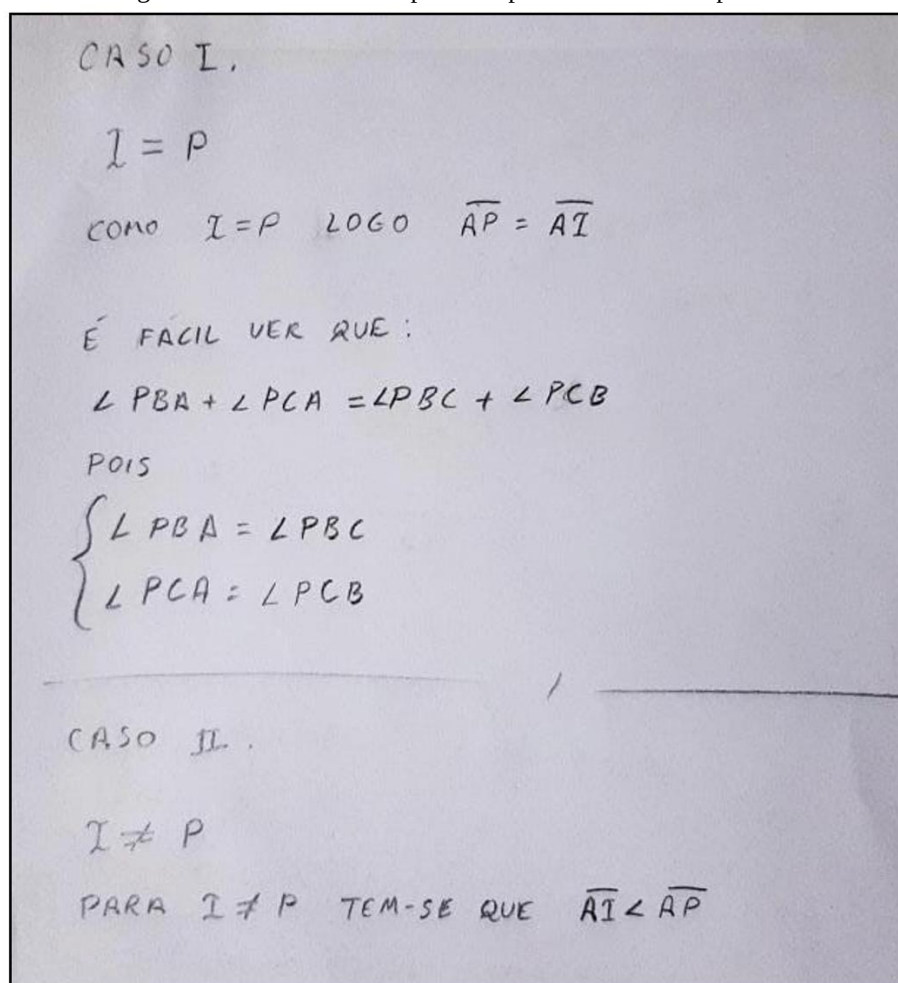


Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Na Figura 44, P2 utilizou a ferramenta “Ângulo”, disponibilizada no GeoGebra, para verificar que  $\angle PBA = \angle PBC$  e  $\angle PCB = \angle PCA$ , na tentativa de provar que o segmento  $\overline{AP}$  é igual ao segmento  $\overline{AI}$ .

O participante P3 criou dois casos hipotéticos para verificar a veracidade de um deles. No primeiro caso, ele afirmou que  $I = P$  e que, conseqüentemente,  $\overline{AP} = \overline{AI}$ . Já no segundo caso, ele afirmou que  $I \neq P$ , sendo  $\overline{AI} < \overline{AP}$ . Seu rascunho está registrado na Figura 45:

Figura 45 – Rascunho feito por P3 representando suas hipóteses.



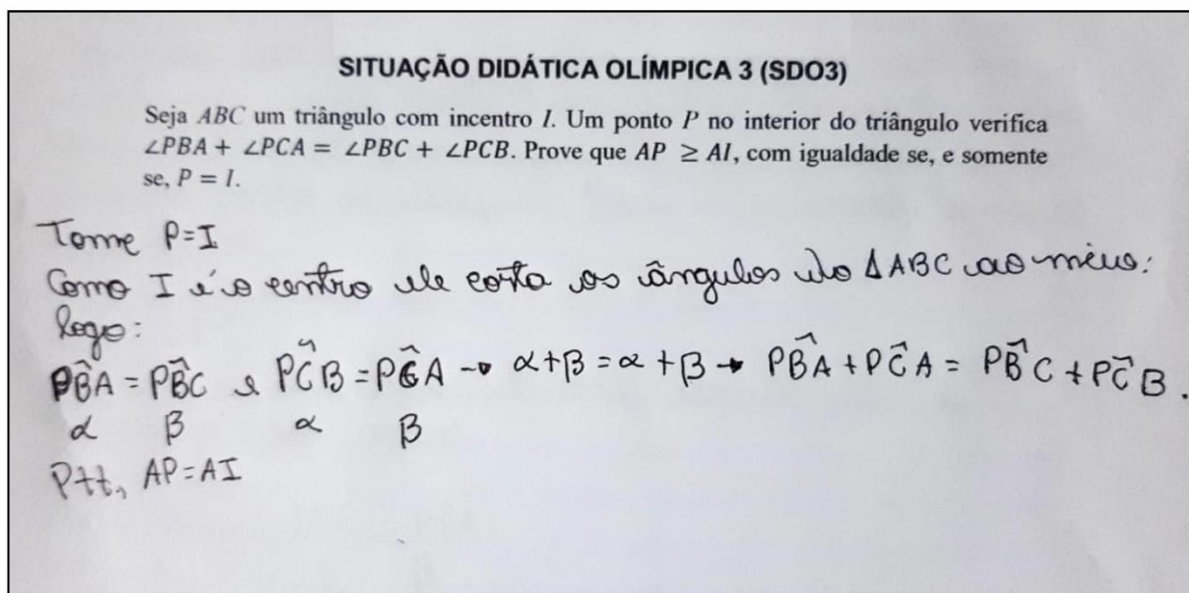
Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Esse momento de discussão em relação à SDO3, entre dois ou mais alunos, perpassa pela etapa de *Formulação*, que para Sousa (2022, p. 31) “é o momento de expor as ideias de forma clara e verbalizada, no entanto sem a obrigação do uso de uma linguagem matemática rigorosa e/ou formalizada”. De certo modo, quando as etapas anteriores são bem construídas e discutidas, se chega a uma conclusão positiva, em que os sujeitos mostram a veracidade e a comprovação da propriedade ou teorema utilizado na resolução do problema.

Porém, na etapa de *Validação*, somente o participante P2 conseguiu provar o que ele

construiu e convencer os demais presentes da sua conclusão, utilizando os conceitos de ângulos para demonstrar que  $\overline{AP} = \overline{AI}$  (Figura 46).

Figura 46 – Validação do sujeito P2.



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Tomando como verdade a equação  $P = I$  e considerando o enunciado do problema, onde diz que  $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$ , P2 partiu de conceitos básicos sobre ângulos e chegou à conclusão de que  $AP = AI$ , finalizando a solução do problema de modo correto.

Após a argumentação do participante P2, a pesquisadora iniciou a situação de *Institucionalização*, provando matematicamente a solução do problema, explicando os elementos abordados: circunferência, pontos notáveis do triângulo, ângulos na circunferência e relações métricas no triângulo.

### 5.3.4 Experimentação da Situação Didática Olímpica 4

A partir do momento que a professora disponibilizou o PO4 impresso e a construção do enunciado do problema no *software* GeoGebra, os participantes iniciaram o primeiro contato. Além da SDO4 impressa e a construção no GeoGebra, eles também utilizaram lápis e papel para reproduzir visualmente suas estratégias.

Esse contato inicial (Figura 47) ocorreu na etapa de *Ação* da TSD. Segundo Brousseau (2002), dentro de uma situação de ação, o *milieu* que atua sobre o estudante ou sobre o qual ele atua pode incluir ou não o professor ou outro(s) estudante(s). Nessa etapa, os participantes

realizaram a leitura do problema, tentando relacionar o que se pede com a construção dada. Desta forma, eles manipularam a construção usando as ferramentas “mover”, “ampliar”, “reduzir”, “exibir rótulo” e “exibir objeto”, observando se isso os ajudaria na resolução do problema:

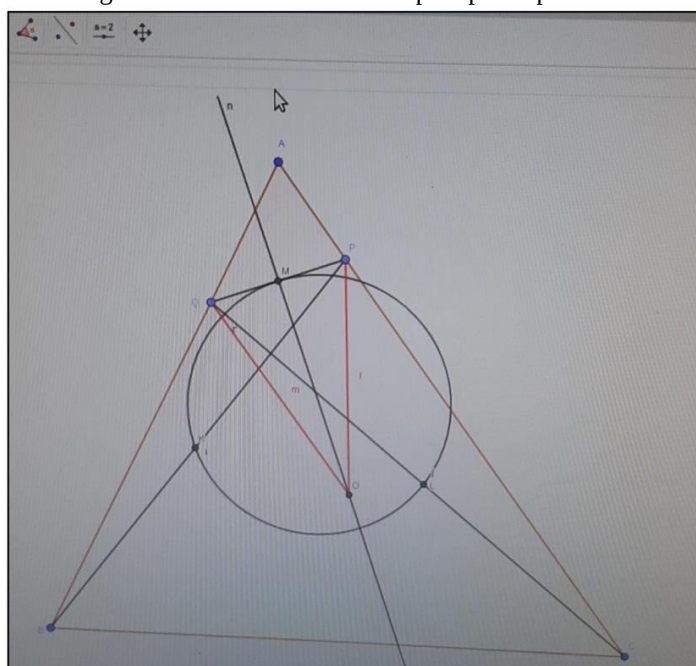
Figura 47 – Primeiro contato com a SDO4 por intermédio do GeoGebra.



Fonte: Registro da autora (2023).

A partir da leitura da SDO4 e a exploração do *software* GeoGebra, começaram a surgir as primeiras propostas dos sujeitos (Figura 48):

Figura 48 – Tentativa realizada pelo participante P2.

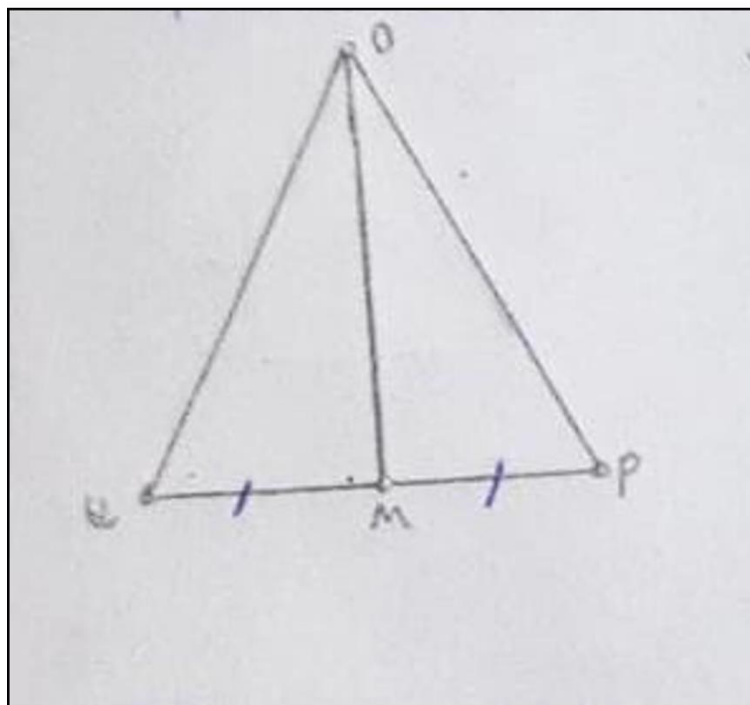


Fonte: Registro da autora (2023).

A proposta apresentada pelo participante P2 partiu da construção de uma reta perpendicular ao ponto  $M$ , tocando o ponto  $O$ , que é o centro do triângulo maior. Desse modo, foram formados dois triângulos semelhantes,  $\triangle OMQ$  e  $\triangle OMP$ , em que foi possível usar o Teorema de Pitágoras ( $a^2 = b^2 + c^2$ ) para determinar os valores dos segmentos  $\overline{OP}$  e  $\overline{OQ}$ .

O participante P4 teve o mesmo raciocínio de P2. Ao formular suas conjecturas, ele verbalizou da seguinte forma: “Supondo que passa uma reta perpendicular ao segmento  $\overline{PQ}$ , no qual essa reta passará pelos pontos  $M$  e  $O$ . Por  $M$  ser o ponto médio significa que  $\overline{PM} = \overline{MQ}$ . Na Figura 49 está representado a construção de P4 no papel:

Figura 49 – Formulação do participante P4.

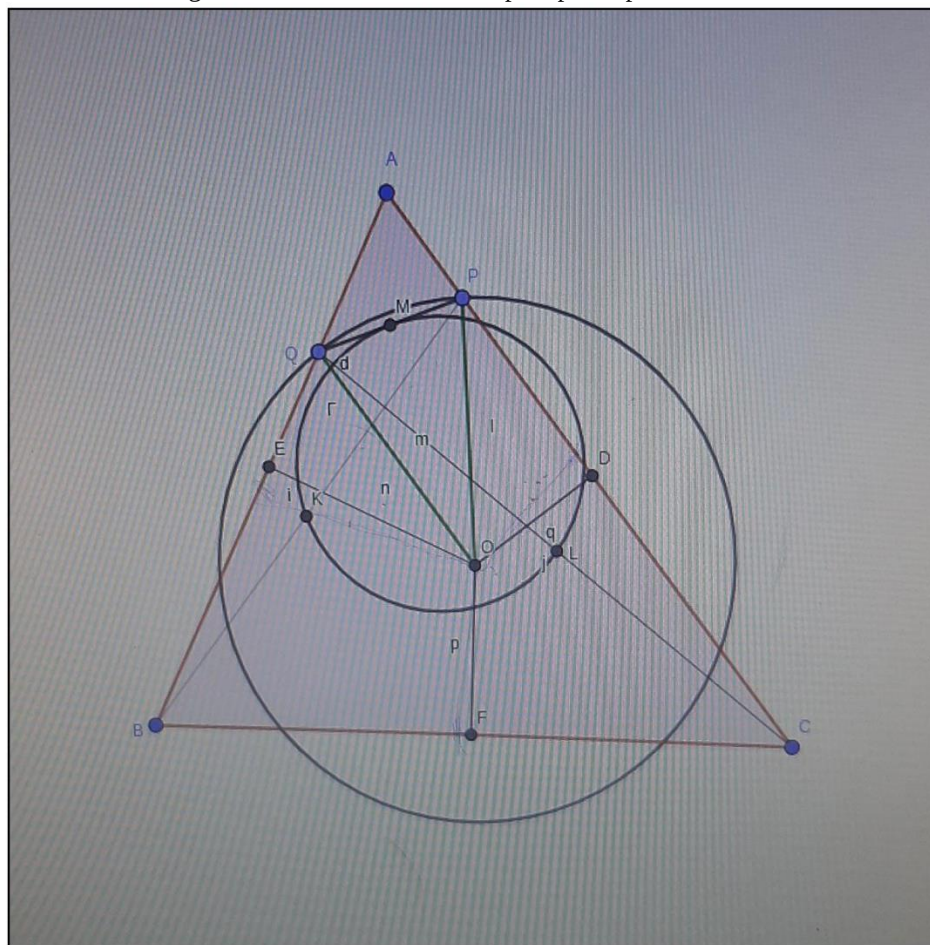


Fonte: Registro da autora (2023).

Partindo dessa construção, P4 sugeriu aplicar o Teorema de Pitágoras nos triângulos  $\triangle OMQ$  e  $\triangle OMP$  para encontrar o valor das hipotenusas  $\overline{OQ}$  e  $\overline{OP}$ , e assim verificar se ambos os valores são iguais.

O sujeito P5 entrou na discussão e sugeriu aos colegas a utilização de circunferências e seus elementos. Afirmou ele que dessa forma seria possível chegar a uma solução. A Figura 50 representa a construção da estratégia de P5:

Figura 50 – Tentativa realizada pelo participante P5.



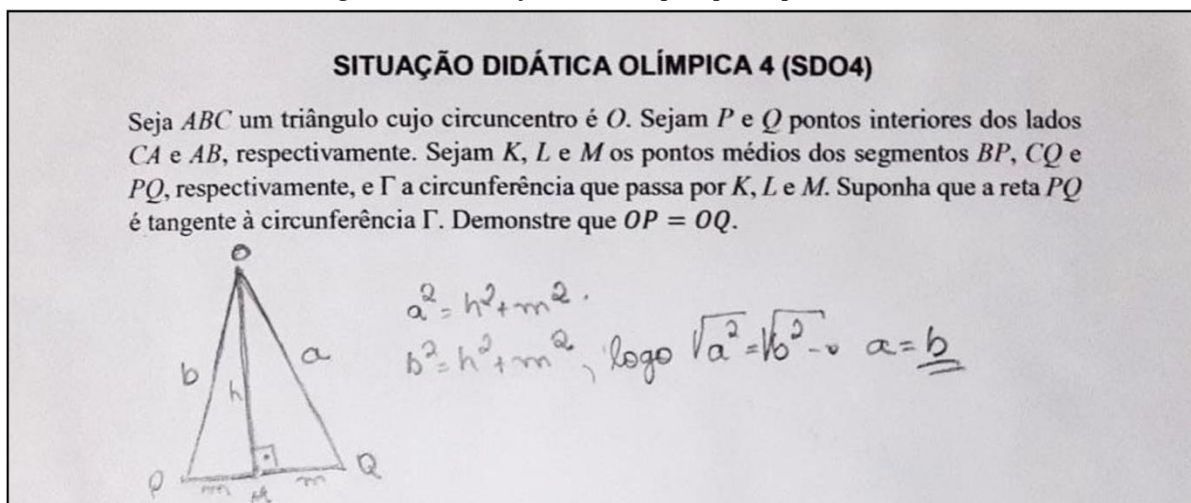
Fonte: Dados da pesquisa (2023).

Essas interações e análise das estratégias propostas pelos participantes geraram um ambiente que proporcionou que os demais colegas identificassem elementos não percebidos inicialmente. E o colega que está apresentando (P5) tornou possível a construção de uma estratégia em conjunto, configurando a etapa de *Formulação*.

Na etapa de *Validação* da SDO4, os estudantes buscaram provar o que foi construído durante as etapas anteriores, com o propósito de convencer os demais presentes. P2 iniciou sua demonstração com a seguinte fala:

P2: Eu passei essa reta aqui perpendicular ao ponto  $M$ , tocando o ponto  $O$ , que é o centro desse triângulo grande. Se  $M$  é o ponto médio, esse lado é igual a esse ( $MP = MQ$ ). Eu trouxe pra cá e desenhei aqui (FIGURA 51). Pronto! Chamei esse lado de “ $a$ ”, “ $h$ ” é a altura, e esse segmento  $\overline{MQ}$  eu chamei de “ $m$ ”, como  $M$  é o ponto médio, esse segmento  $\overline{MP}$  também é “ $m$ ”. Então, tenho aqui um triângulo retângulo, e fiz  $a^2 = h^2 + m^2$ , que é o Teorema de Pitágoras. Desse outro lado, do mesmo jeito,  $b^2 = h^2 + m^2$ . Assim, a gente já pode ver que  $a^2 = b^2$ , se eu passo a raiz quadrada dos dois lados, eu mostro que  $a = b$ , justamente os lados que eu quero demonstrar que são iguais.

Figura 51 – Validação realizada pelo participante P2.



Fonte: Dados da pesquisa (2023).

O sujeito P2 construiu dois triângulos retângulos e utilizou o Teorema de Pitágoras para provar que o segmento  $\overline{OQ}$  é igual ao segmento  $\overline{OP}$ . O mesmo fez uso da ferramenta do GeoGebra “Distância, Comprimento ou Perímetro” para verificar a veracidade de seus cálculos no papel.

Além do licenciando P2, apenas P5 conseguiu validar suas conjecturas. O mesmo argumentou que “Ao traçar a circunferência de centro  $O$  e raio  $\overline{OP}$ , vemos que o ponto  $Q$  pertence a essa nova circunferência, logo  $r = \overline{OP} = \overline{OQ}$ ”.

Na etapa de *Institucionalização*, a professora apresentou qual seu objetivo ao propor a SDO4. Construindo uma circunferência inscrita no triângulo  $\triangle ABC$ , foi possível utilizar o teorema da Potência de um ponto em relação a uma circunferência, sendo necessário o uso da fórmula:

$$Pot(ponto) = d^2 - R^2$$

Assim,  $Pot(P) = d^2 - R^2$  e  $Pot(Q) = d^2 - R^2$ , ou seja,  $d^2 = Pot(P) + R^2$  e  $d^2 = Pot(Q) + R^2$ . Logo,  $\overline{OP} = \overline{OQ}$ , o que era um teorema desconhecido pelos participantes. Durante suas demonstrações, a pesquisadora buscou sanar todas as dúvidas dos futuros professores de matemática.

## 6 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO INTERNA

Nesta seção, realizamos as análises dos dados obtidos na fase de Experimentação. De acordo com Almouloud e Silva (2012, p. 27), a análise *a posteriori*:

Consiste em uma análise de um conjunto de dados colhidos ao longo da experimentação, como por exemplo, produção dos alunos, registros de observadores e registro em vídeo. Nessa análise, se faz necessário sua confrontação com a análise *a priori* para que seja feita a validação ou não das hipóteses formuladas na investigação. (ALMOULOU; SILVA, 2012, p. 27).

Nesse sentido, a presente etapa traz um confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* a partir dos resultados adquiridos através da aplicação das Situações Didáticas Olímpicas (SDO), trazendo problemas da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), abordando o objeto de ensino em questão, no caso o estudo dos triângulos.

Dessa forma, as análises realizadas através das observações dos envolvidos na pesquisa, permitiram à pesquisadora validar as situações didáticas, por meio da validação interna, que segundo Laborde (1997, p. 105), envolve “[...] uma descrição genérica da classe ou das condutas e tipos de produção majoritárias na classe, estudo de sua evolução e verificação de sua adequação no que concerne ao esperado dos estudantes”.

As variáveis destacadas nessa pesquisa foram: (i) O *software* GeoGebra proporciona aos estudantes a construção de novas estratégias durante a resolução das Situações Didáticas Olímpicas, através da visualização e movimentação; e, (ii) Os conhecimentos prévios dos sujeitos relacionados ao conteúdo matemático abordado nos problemas da IMO não serem suficientes para a compreensão e solução das Situações Didáticas Olímpicas.

Durante a resolução das questões ocorreram muitas tentativas e erros, bem como dificuldades na compreensão dos conceitos matemáticos presentes nos problemas utilizados na aplicação. Esse conflito persistiu tanto no uso do ambiente lápis e papel, quanto no GeoGebra.

Nos tópicos a seguir trazemos um debate que averigua o desenvolvimento dos professores em formação no decorrer da resolução das SDOs, observando as dificuldades relacionadas ao estudo dos triângulos, bem como as contribuições do GeoGebra nesse processo.

### 6.1 Análise *a posteriori* e validação da SDO1

Na Situação Didática Olímpica I, durante o percurso da TSD, observamos que na situação de ação os professores em formação realizaram a leitura do enunciado da questão e

extraíram as informações, fazendo um resgate de conhecimentos prévios, como foi previsto na análise *a priori*. Algo que chamou a atenção foi a empolgação de P2 ao saber que podia utilizar o *software* GeoGebra no decorrer do trajeto de resolução. Para ele, através desse recurso tecnológico foi mais fácil compreender o problema exposto.

Na situação de formulação, somente três participantes conseguiram realizar alguma construção (P2, P3 e P5), todos com estratégias diferentes do esperado na análise *a priori*. E na situação de validação apenas P2 e P5 conseguiram demonstrar suas resoluções, por meio de procedimentos não previstos.

Os sujeitos P1 e P4 sentiram bastante dificuldades ao se deparar com a SDO1. Nem ao menos conseguiram esboçar algum rascunho (no papel ou no GeoGebra). O licenciando P3 usou o GeoGebra para tentar encontrar um caminho para solucionar o problema, mas não conseguiu validar suas estratégias. Isto confirma a hipótese (ii), pois os conhecimentos prévios dos licenciandos não foram suficientes para resolver a situação didática proposta.

Em relação a hipótese (i), percebeu-se que o GeoGebra proporcionou aos sujeitos uma visão dinamizada do problema, abrindo caminhos para os envolvidos chegarem à solução. Pode-se destacar uma das demonstrações apresentadas pelo P5, que foi simples e satisfatória, em que ele utilizou as ferramentas do GeoGebra para calcular as medidas dos segmentos indicados na questão (Distância, Comprimento ou Perímetro), para construir os segmentos de reta que faltavam (Segmento) e comparar seus valores (Distância, Comprimento ou Perímetro e Exibir Rótulo). Sem o uso do GeoGebra não seria possível solucionar dessa forma.

Além disso, o GeoGebra auxiliou o sujeito P2 a validar suas conjecturas sobre semelhança de triângulos, provando que  $BC = CD$  e  $AF = EF$  e que  $\angle CBD = \angle CDB$  e  $\angle FAE = \angle FEA$ . O *software* ainda facilitou a compreensão de todo o processo de resolução do problema através da visualização dinâmica dos objetos e precisão das medidas. Por fim, a situação de institucionalização ocorreu conforme previsto, em que a pesquisadora trouxe a explicação dos elementos e propriedades dos triângulos, seguindo o passo a passo da resolução e sanando as dúvidas dos sujeitos e chamando atenção para a aplicação do Teorema de Ptolomeu, pois nenhum participante conhecia esse teorema. Eles ficaram bastante felizes com o novo aprendizado.

De forma geral, os envolvidos na pesquisa não tinham experiência com os problemas da IMO, nem ao menos sabiam da sua existência. Contudo, além das dificuldades encontradas por ser o primeiro contato com esse tipo de problema olímpico, outro obstáculo foram os conhecimentos prévios acerca do Ensino de Geometria, especificamente conceitos voltados para o estudo dos triângulos, que se mostraram insuficientes para resolver a SDO proposta.

Ressaltamos que, durante toda a resolução da SDO, a professora esteve disponível para que os envolvidos fizessem alguma pergunta, seja sobre o GeoGebra ou o conteúdo matemático abordado, indagando o entendimento dos mesmos, mas também os deixando à vontade para tomar alguma decisão, conforme tinha no contrato didático.

## 6.2 Análise *a posteriori* e validação da SDO2

Esta Situação Didática Olímpica aborda um problema extraído da IMO de 2018, questão 1, aplicada no primeiro dia de prova. Em busca de construir suas estratégias, na situação de ação os futuros professores tiveram o primeiro contato com a SDO2, leram atentamente o enunciado da questão e observaram a construção no GeoGebra disponibilizada pela professora, conforme almejado na análise *a priori*.

Na situação de formulação da SDO2, houve uma interação mais intensa e significativa comparada à mesma etapa na SDO1. Apenas o participante P4 não se sentiu seguro para compartilhar seu conhecimento. Os sujeitos P1, P2, P3 e P5 conversaram bastante, trilhando estratégias que pudessem solucionar o problema, como mostrado na experimentação da pesquisa. Dos indivíduos citados anteriormente, P2 foi quem mais se aproximou do esperado na análise *a priori*, utilizando conceitos de retas paralelas cortadas por transversais, provando que os ângulos  $\angle AIG$  e  $\angle ADE$  são iguais. Já P1 e P5 tiveram raciocínios semelhantes, relacionados à circunferência e seus elementos.

Na situação de validação, três dentre os cinco participantes conseguiram validar suas demonstrações de forma convincente (P1, P2 e P5). Entretanto, utilizaram-se de maneiras distintas do apresentado na análise *a priori*, porém satisfatórias. Mais uma vez percebemos a falta de conhecimentos prévios dos professores em formação sobre o estudo dos triângulos, sobretudo no nível cobrado nas provas da IMO. O sujeito P3 participou da discussão, fez algumas construções no *software*, mas sem sucesso. O sujeito P4 nem mesmo esboçou um rascunho, pois lhe faltaram conhecimentos sobre conceitos básicos acerca do tema, como semelhança de triângulos, ângulos congruentes, entre outros.

O exposto no parágrafo anterior valida nossa hipótese (ii), que consequentemente reflete na nossa hipótese (i). Os envolvidos (P1, P2 e P5) que tinham uma base concreta sobre o tema matemático abordado, usaram o GeoGebra de forma proveitosa, pois eles sabiam o que estavam em busca. P1 e P5 utilizaram a ferramenta “Círculo Definido por Três Pontos”, disponível no GeoGebra para construir circunferências, como também “Reta Paralela” para construir retas paralelas com distâncias iguais de um mesmo ponto específico. Do mesmo modo, P2 também

usufruiu dos benefícios proporcionados pelo GeoGebra para comprovar suas conjecturas.

Por último, na situação de institucionalização, a pesquisadora fez uma retomada dos argumentos apresentados e demonstrou os conceitos relacionados ao estudo dos triângulos, dando ênfase ao circuncírculo de um triângulo acutângulo, mediatriz, bissetriz e altura de um triângulo, retas paralelas e ângulos excêntricos interiores, centrais e inscritos. Durante toda a explicação da resolução da SDO2, os licenciandos acompanharam atentamente.

Com o desenvolvimento das etapas da TSD, os professores em formação foram, aos poucos, construindo elementos importantes de seu aprendizado, através das discussões entre os seus pares e as contribuições da professora pesquisadora, principalmente, no momento da institucionalização. Ressaltamos também os benefícios proporcionados pelo GeoGebra, que mesmo diante da falta de prática em seu uso, os participantes tiveram a possibilidade de entender e manipular os elementos da SDO com mais clareza.

### 6.3 Análise *a posteriori* e validação da SDO3

Esta Situação Didática Olímpica traz um problema da prova da IMO de 2006, questão 1, aplicada no primeiro dia de prova. Na situação de ação, os envolvidos na pesquisa tiveram o contato inicial com a SDO3 e sua construção no GeoGebra. Desta forma, era esperado que os professores em formação analisassem a construção com base em sua percepção visual e manipulação no ambiente computacional de acordo com seus conhecimentos prévios, e tudo ocorreu como previsto.

Na situação de formulação foi perceptível a dificuldade dos licenciandos para lembrar dos conceitos matemáticos e traçar uma estratégia de resolução. Mesmo o problema abordado sendo antigo, como os participantes não eram habituados a resolver problemas olímpicos, especificamente os da IMO, suas mentes não tinham memórias para resgatar.

Depois da professora indagá-los acerca de uma estratégia de resolução, dois participantes se manifestaram, P1 e P2, identificando os pontos notáveis do  $\triangle ABC$ , de acordo com o previsto na análise *a priori*. O participante P2, inclusive, utilizou a ferramenta “Ângulo” disponibilizada no GeoGebra, para verificar que  $\angle PBA = \angle PBC$  e  $\angle PCB = \angle PCA$ , na tentativa de provar que o segmento  $AP$  é igual ao segmento  $AI$ . O outro participante foi P1, apresentando dois casos hipotéticos, que fugiam do esperado e sem argumentos convincentes. Somente o participante P2 validou suas conjecturas, sendo estas conforme almejado na análise *a priori*, concluindo que  $AP = AI$ .

No que concerne a hipótese (i) desta pesquisa, não foi possível o GeoGebra contribuir

significativamente, mas entendemos que isso ocorreu devido a lacuna destes futuros professores em relação ao tema matemático abordado na SDO3, confirmando nossa hipótese (ii).

De fato, para resolver um problema da IMO, é necessária uma preparação direcionada e conhecimento pleno do conteúdo abordado. No caso, essa SDO envolvia conceitos básicos do estudo de triângulos, porém, dentre os cinco participantes apenas um (P2) demonstrou segurança em seus conhecimentos.

Na situação de institucionalização, de acordo com o previsto, a pesquisadora apresentou a resolução da SDO3, explicando minuciosamente o passo a passo e todos os elementos abordados no problema, tais como, os pontos notáveis do triângulo, ângulos na circunferência, pontos concíclicos e relações métricas no triângulo.

#### **6.4 Análise *a posteriori* e validação da SDO4**

A Situação Didática Olímpica IV, aborda um problema retirado da prova da IMO de 2009, questão 2, aplicada no primeiro dia de prova. Na tentativa de delinear alguma estratégia de resolução, na situação de ação os professores em formação tiveram o primeiro contato com a SDO4, realizaram a leitura do enunciado do problema e movimentaram a construção disponibilizada pela professora no *software* GeoGebra, conforme previsto na análise *a priori*.

Na situação de formulação, o participante P4 conseguiu pela primeira vez esboçar uma possível resposta, sendo esta diferente do esperado, porém válida. Ele traçou uma reta perpendicular ao ponto médio M e, assim, construiu dois triângulos semelhantes. Esse também foi o raciocínio do sujeito P2. Já o discente P5 percorreu um outro caminho, por meio da construção de uma circunferência e a utilização dos seus elementos, diferente do esperado.

Percebemos que a etapa de validação nesta SDO foi o momento em que os licenciandos sentiram mais dificuldade, pois tinham de demonstrar suas soluções de forma clara. Somente dois participantes (P2 e P5) conseguiram validar suas conjecturas.

Analisando os resultados a partir das hipótese inicial (i), entendemos que o GeoGebra foi satisfatório para os sujeitos que entenderam o problema e tinham conhecimentos matemáticos necessários para solucioná-lo. Usando o GeoGebra para construir circunferências, triângulos semelhantes, conferir medidas de segmentos de reta, foi possível construir estratégias aliadas ao conhecimento que o futuro professor já trazia.

Sobre a hipótese (ii), comprovou-se que realmente falta conhecimento prévio no professor em formação, acerca do tema discutido, o que prejudica todo o processo de resolução do problema e até mesmo a utilização significativa do GeoGebra.

Por fim, na situação de institucionalização, a pesquisadora fez um resgate das exposições apresentadas pelos envolvidos e demonstrou os conceitos relacionados ao estudo dos triângulos, sempre usando o GeoGebra para consolidar o entendimento de todos, dando destaque ao Teorema da “Potência de um ponto em relação a uma circunferência”. Este teorema foi mais um conhecimento novo que os futuros professores adquiriram na experimentação dessa pesquisa.

## 6.5 Análise do questionário final

Nesta subseção apresentamos os resultados do questionário final respondido pelos professores em formação, onde estes expõem sua visão sobre as contribuições das Situações Didáticas Olímpicas na construção do seu próprio conhecimento, a importância da formação do professor de matemática na preparação de alunos para a Olimpíada Internacional de Matemática, e seu olhar sobre os benefícios do GeoGebra na resolução de problemas olímpicos.

Utilizamos um questionário aberto com quatro questões, considerando que esse modelo de abordagem tem menor intervenção sobre os sujeitos. Ademais, este modelo de abordagem fornece esclarecimentos e comentários significativos para a interpretação dos dados colhidos (MATTAR, 1994). As questões direcionadas aos futuros professores estão apresentadas no Quadro 5:

Quadro 5 – Questões do questionário final.

*Questão 1:* Descreva pelo menos dois aprendizados que você adquiriu durante os encontros.

*Questão 2:* Através das Situações Didáticas Olímpicas (SDO) abordadas durante os encontros, é possível que o futuro professor de matemática construa o seu próprio conhecimento acerca do objeto de estudo presente nos problemas olímpicos?

*Questão 3:* Qual a importância da formação do professor de matemática na preparação de alunos para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO)?

*Questão 4:* Na sua opinião, o *software* GeoGebra contribui na resolução de problemas olímpicos? Justifique sua resposta.

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

A partir das vivências durante os encontros, os professores em formação forneceram respostas positivas ao questionário, na questão 1. Eles externaram os conhecimentos adquiridos que os mesmos não tinham ou haviam esquecido, inclusive voltados para o estudo dos triângulos. As respostas da questão 1 podem ser observadas no Quadro 6:

Quadro 6 – Respostas à primeira questão do questionário final.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>P1: I – Uma mesma questão pode ter várias resoluções diferentes;<br/> II – O ganho de conhecimento sobre novas fórmulas e propriedades, além de uma noção melhor sobre desenhos.</p> <p>P2: I – Relação da potência de um ponto em relação a circunferência (<math>Pot(a) = d^2 - r^2</math>);<br/> II – Teorema de Ptolomeu.</p> <p>P3: I – Conceitos básicos de geometria plana que eu havia esquecido, principalmente envolvendo triângulos;<br/> II – Semelhança de ângulo em relação ao arco.</p> <p>P4: I – Um aprendizado foi saber dessa olimpíada que abrange problemas que nos fazem pensar um pouco mais, e que na maioria deles, se resolve com conceitos básicos da matemática, e como a parte da geometria ajuda muito nesses problemas;<br/> II – Outro aprendizado foi rever um pouco sobre alguns conceitos básicos da matemática, como desigualdade triangular, entre outros.</p> <p>P5: I – Entendi a importância desse software na resolução de problemas olímpicos, cujo nível de dificuldade é elevado;<br/> II – Conhecer através dos encontros dois teoremas desconhecidos para mim.</p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Conforme as respostas apresentadas, podemos observar que os envolvidos adquiriram novos conhecimentos, como é o caso de P2, que não conhecia a Relação da Potência de um Ponto em Relação à Circunferência, nem o Teorema de Ptolomeu. Outra resposta que chamou nossa atenção foi a de P3, que havia esquecido conceitos básicos de geometria, sobretudo, voltado para o estudo dos triângulos. Isso mostra a importância deste trabalho para a formação do futuro professor de matemática.

No Quadro 7, temos as respostas dadas à segunda questão do referido questionário, onde os professores em formação relatam se é possível construir seu próprio conhecimento através das Situações Didáticas Olímpicas e como isso pode acontecer.

Quadro 7 – Respostas à segunda questão do questionário final.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>P1: Sim! Esses problemas trabalham com o concreto e não apenas números, fazendo com que sua percepção de manipulação se desenvolva e aprimore.</p> <p>P2: Sim! Pois nota-se que nós, enquanto professores em formação, ao participar dessa experimentação fomos imersos no processo de resolução de problemas olímpicos, e mesmo não sendo familiarizados com esta realidade fomos, no decorrer dos encontros, avançando na resolução dos itens propostos.</p> <p>P3: Sim! Uma vez que, depois de solucionado o problema, algumas outras formas de resolução surgem naturalmente em nosso pensamento.</p> <p>P4: Sim! Pois esses problemas abrangem muitos assuntos matemáticos do cotidiano, como também abrangem várias formas de resolver.</p> <p>P5: Sim! A dificuldade trazida em cada questão causa um interesse de pesquisar sobre o conceito envolvido. Desse modo, quem não conseguiu resolver de imediato vai em busca de outros recursos.</p> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

De acordo com o Quadro 7, foi possível perceber uma unanimidade nas respostas, onde

todos responderam que sim, que a SDO contribui na construção do seu próprio conhecimento. Vale destacar aqui, a justificativa do sujeito P2, que afirma que mesmo não tendo experiência com esse tipo de problema olímpico, a SDO proporcionou um avanço na resolução a partir das etapas da TSD. Consideramos esta resposta de grande relevância para a pesquisa, pois mostra que, no decorrer da experimentação, os futuros professores construíram uma aprendizagem significativa acerca do Ensino de Geometria.

No que diz respeito à terceira questão, conforme o Quadro 8, temos as respostas dos envolvidos, trazendo o olhar de cada um sobre a importância da formação do professor de matemática na preparação de alunos para a Olimpíada Internacional de Matemática:

Quadro 8 – Respostas à terceira questão do questionário final.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>P1: As questões olímpicas possuem um grau maior, que muitas das vezes, o aluno não é capaz de compreender, nesse caso, o professor agiria como mediador nesse processo, o auxiliando e orientando sobre o que a questão fala. O professor não está lá para entregar a resposta, mas sim, fazer com que o aluno desenvolva o próprio conhecimento a fim de encontrar uma resolução.</p> <p>P2: Nota-se, que tamanha complexidade nos problemas olímpicos necessitam de um preparo eficiente do discente, tanto no que tange os conhecimentos matemáticos, como na didática, pois o professor deve indiscutivelmente dominar o saber em jogo, mas o fator sine qua non é também, propiciar o ambiente necessário para o aluno construir o conhecimento através de uma mediação adequada.</p> <p>P3: A IMO aborda conceitos que geralmente não são mostrados no EM das escolas públicas brasileiras. Um professor que saiba de antemão dessa informação pode, aos poucos, guiar e criar estratégias de ensino para ajudar seus alunos nesta olimpíada. Logo, seria de grande importância que durante a sua formação, tais assuntos, como os da IMO, fossem tratados com maior acurácia.</p> <p>P4: É de muita importância a formação do professor, pois a partir de seus conhecimentos poderá preparar os alunos para a IMO, sendo que é uma preparação um pouco diferente da escola, já que teria foco na olimpíada.</p> <p>P5: O professor de olimpíada deve ter uma preparação mais aperfeiçoada, pois a sua formação é essencial para o desenvolvimento dos alunos no tocante à essa preparação.</p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

O que pode ser observado no Quadro 8 é que, de modo geral, todos relatam o fato da IMO ser composta por problemas complexos, fazendo com que o professor necessite de uma formação categórica para que possa preparar outros indivíduos. Contudo, salientamos a resposta do sujeito P3, onde ele afirma, de acordo com suas experiências na Educação Básica, que a IMO traz conceitos que muitas vezes não são abordados no Ensino Médio das escolas públicas brasileiras, e isso pode ser um reflexo da falta de formação de alguns docentes.

Por fim, no Quadro 9, temos as respostas dos professores em formação referentes a quarta e última questão, nela os indivíduos expõem suas opiniões acerca das contribuições do GeoGebra na resolução de problemas olímpicos:

Quadro 9 – Respostas à quarta questão do questionário final.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| P1: Sim! Pois ele entra como facilitador para a compreensão do aluno, não o sentido de encontrar a resposta, mas sim, com o intuito de representar e manipular os dados.                                                                                                                                                            |
| P2: Sim! Pois usando tal software pude visualizar a problemática de forma mais eficiente e desenvolver a partir do geométrico um pensamento algébrico nas questões. Além de validar minhas hipóteses usando as ferramentas disponíveis.                                                                                             |
| P3: Sim! Porém, questões olímpicas demandam demonstrações matemáticas e um grande domínio na área, seja geometria ou outro assunto. Mas é sempre bom poder construir as imagens com facilidade.                                                                                                                                     |
| P4: Sim! Pois ele tem ferramentas que nos ajudam na resolução dos problemas, além de que, se tem valores mais corretos que se forem feitos à mão mesmo. Por ser usado muita geometria o software GeoGebra é um ótimo recurso.                                                                                                       |
| P5: Sim! Sem o GeoGebra muitos problemas causariam desinteresse aqueles que ainda não tem conhecimentos afinados em geometria. Por outro lado, fez de forma simples problemas serem resolvidos, abrindo a mente do aluno na busca por novos conceitos e para a construção de figuras relacionadas a cada possível questão olímpica. |

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Inicialmente, todos os envolvidos afirmaram que o GeoGebra oferece benefícios na resolução de problemas olímpicos. P1, por exemplo, relata que esse *software* facilitou a compreensão acerca do conteúdo em jogo, através da representação e manipulação dos dados. P2 traz a contribuição do GeoGebra no desenvolvimento do pensamento algébrico a partir do geométrico, evidenciando sua dinamização. Já P3 ressalta a importância dos conhecimentos prévios sobre o tema abordado para se fazer bom uso do suporte tecnológico, ou seja, o GeoGebra auxiliou na compreensão dos elementos matemáticos, mas para explorar suas ferramentas com eficácia, se faz necessário ter conhecimentos relacionados ao conteúdo em questão. Todos esses pontos são consideráveis para compor nossa pesquisa.

Com fundamento nas declarações dos participantes, acreditamos que a referida pesquisa foi bem considerada. Nesse panorama, compreendemos que o trabalho desenvolvido contribuiu significativamente para a formação destes futuros professores.

A seguir, no Quadro 10, sintetizamos algumas contribuições da SDO para a formação inicial do professor de matemática, de acordo com a realização desse trabalho.

Quadro 10 – Contribuições da SDO para a formação de inicial do professor de matemática.

|   |                                                                                                   |
|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | A SDO proporciona novos conhecimentos aos futuros professores.                                    |
| 2 | Através da SDO, os futuros professores se tornam responsáveis pela construção do seu aprendizado. |
| 3 | A SDO cria um ambiente de aprendizagem para a resolução de problemas olímpicos.                   |

Fonte: Elaborado pela autora (2023).

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação foi embasada nas etapas da Engenharia Didática de Formação (EDF), que visou à organização da pesquisa e promoveu aos envolvidos um conhecimento vasto sobre aspectos teóricos e metodológicos relativos ao estudo dos triângulos. Outrossim, permitiu-se designar as variáveis didáticas para a construção de Situações Didáticas Olímpicas (SDO), com foco na Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), aliada à utilização do *software* GeoGebra. Em complementaridade, o GeoGebra foi o aporte tecnológico capaz de fornecer parte dos registros empíricos.

A EDF propiciou a elaboração de quatro SDOs, todas com o auxílio do GeoGebra, que se fundamentou no modelo de ensino correlato à Teoria das Situações Didáticas (TSD). Buscou-se proporcionar aos professores em formação, no decorrer da experimentação, a oportunidade de pensar, formular e validar hipóteses estruturadas, ademais, estimulando interações entre professor, aluno e meio.

Dessa forma, foi estabelecido como objetivo principal deste trabalho investigar se a Situação Didática Olímpica (SDO) com o auxílio do *software* GeoGebra, pode contribuir para a formação do professor de matemática, acerca do estudo dos triângulos, visando à preparação para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). E diante deste objetivo, foram traçados três objetivos específicos, que ajudaram a atingir o objetivo geral da pesquisa, que foram, (a) Compreender as Situações Didáticas Olímpicas que abordam o conteúdo de geometria, sobretudo, o estudo dos triângulos, utilizando problemas retirados das provas da IMO, sob o desenvolvimento das dialéticas da Teoria das Situações Didáticas; (b) Analisar o papel da Situação Didática Olímpica com base no objeto de estudo e (c) Avaliar a contribuição do *software* GeoGebra na resolução dos Problemas Olímpicos e na construção das Situações Didáticas Olímpicas.

Baseado nestes objetivos, estruturamos na etapa de concepção e análise *a priori* quatro Situações Didáticas Olímpicas guiadas pela TSD e organizadas no ambiente do GeoGebra, buscando verificar os conhecimentos prévios dos professores em formação, relacionados ao estudo dos triângulos, abordando diretamente problemas extraídos da IMO.

Na etapa de experimentação, percebeu-se que os professores em formação não tinham uma base sólida sobre a geometria, sobretudo, os conceitos relacionados ao estudo dos triângulos presentes nos problemas olímpicos internacionais. Alguns deles nem ao menos sabiam da existência da IMO. Durante o desenvolvimento das SDOs, cada participante foi, gradativamente, construindo seu conhecimento. E, no que cerne ao uso do GeoGebra,

constatou-se pouco conhecimento vindo dos envolvidos. Ainda assim, foi possível verificar que esse *software* auxiliou os sujeitos na busca por estratégias de resolução. Ademais, o desenvolvimento das SDOs oportunizou a estes participantes um aprimoramento no uso de muitas ferramentas.

Sobre a pergunta de pesquisa, que indaga: Quais contribuições a Situação Didática Olímpica (SDO) pode proporcionar a formação do professor de matemática possibilitando a preparação da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), utilizando o *software* GeoGebra como aporte tecnológico? Buscou-se, sucintamente, responder a esta pergunta baseada nos resultados da experimentação desta pesquisa.

Isto posto, ainda sobre a experimentação, verificou-se que o uso das SDOs promoveu aos participantes grandes aprendizados, através do desenvolvimento das quatro dialéticas da TSD, pois embora os envolvidos apresentassem dificuldades, na dialética de institucionalização a pesquisadora sanava todas as dúvidas existentes, contribuindo para a formação desses futuros professores.

Apontam-se três obstáculos principais, que estiveram presentes na realização desse trabalho: a primeira foi conseguir professores em formação dispostos a participar da experimentação de forma presencial; a segunda, conseguir a disponibilidade do laboratório de informática do curso de Licenciatura em Matemática (LIMA) da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), no dia e horário combinado. Por fim, a falta de conhecimentos prévios necessários para a resolução dos POs, por parte dos envolvidos.

Contudo, concluímos que a proposta apresentada por intermédio das SDOs, auxiliada pela utilização do *software* GeoGebra, contribuiu de forma satisfatória para a formação do professor de matemática pertinente ao objeto de estudo, viabilizando a aprendizagem ou retomada de conhecimentos, como circunferência inscrita no triângulo, desigualdade triangular, relação da potência de um ponto em relação a circunferência, Teorema de Pitágoras, entre outros.

Enquanto perspectiva futura, considera-se a possibilidade da continuidade desta pesquisa relacionada ao mesmo objeto de estudo, bem como a realização de projetos visando a formação de professores para preparar alunos para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO).

## REFERÊNCIAS

- ABAR, C A. A. P. A Transposição Didática na criação de estratégias para a utilização do GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 9, n. 1, p. 59-75, 2020. DOI: <https://doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i1p59-75>.
- ALIEVI, P. T. **Soluções não clássicas para problemas da OBMEP**. 47p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal de Santa Maria, Rio Grande do Sul, 2013.
- ALMOULOUD, S. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Paraná: Editora da Universidade Federal do Paraná, 2007.
- ALMOULOUD, S. A. COUTINHO, C. Q. S. **Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ ANPED**, em pauta: Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 3, n. 6, p. 62-77, 2008.
- ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. **Engenharia Didática: evolução e diversidade**. Revemat, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012.
- ALVES, F. R. V. Engenharia didática para a generalização da sequência de fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 18, n. 1, p. 61-93, 2016. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/20879>. Acesso em: 17 mar. 2023.
- ALVES, F. R. V. Engenharia Didática de Formação (EDF): sobre o ensino dos Números (Generalizados) de Catalan (NGC). **Educação Matemática Pesquisa**, v. 20, n. 2, p. 47-83, 2018. DOI: <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i2p47-83>.
- ALVES, F. R. A. **Visualizing the olympic didactic situation (ods): teaching mathematics with support of the geogebra software**. Acta Didactica Napocensia, v. 12, n. 2, p. 97-116, 2019.
- ALVES, F. R. V. Situações didáticas olímpicas (SDOs): ensino de olimpíadas de matemática com arimo no software Geogebra como recurso na visualização. **Revista Alexandria**, v. 13, n. 1, 2020.
- ALVES, F. R. V. Situação Didática Olímpica (SDO): aplicações da teoria das situações didáticas para o ensino de olimpíadas. **Revista Contexto & Educação**, v. 36, n. 113, p. 116-142, 2021. DOI: <https://doi.org/10.21527/21791309.2021.113.116-142>.
- ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Engenharia Didática de Formação (EDF): Repercussões para a formação do professor de matemática no Brasil. **Educação Matemática em Revista**, v. 2, n. 18, 2017. Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/EMRRS/article/view/1849>. Acesso em: 01 ago. 2022.
- ARAÚJO, J. E.; SILVA, F. A. B.; SILVA, J. V. N.; PEREIRA, P. E. D. O papel da olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas (obmep) como instrumento de inclusão social. **Anais... II Congresso Internacional de Educação Inclusiva - CINTENDI**, 2016.

Disponível em: <http://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/23126>. Acesso em: 22 de out. 2022.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9, n. 3, p. 281- 308, 1988.

ARTIGUE, M. Ingeniería Didáctica. In: ARTIGUE, M.; DOUADY, R.; MORENO, L.; GOMEZ, P. (Org.). **Ingeniería didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1995, p. 33-61.

AZEVEDO, I. F. **Situações didáticas profissionais (SDP): uma perspectiva de complementaridade entre a teoria das situações e a didática profissional no contexto das olimpíadas de matemática**. Dissertação (Mestrado acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática). Instituto federal de educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE, Fortaleza, Ceará, 2020.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática/secretaria de educação fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.

BRASIL. **Secretaria de educação fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC, 2001.

BRASIL. **Plano de desenvolvimento da educação: prova brasil/ensino fundamental/matriz de referências/ tópicos e descritores**. Brasília: MEC/SEB/INEP, 2011. 200p.

BROUSSEAU, G. **Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques. Mathematics**. Université Sciences et Technologies. 1986. 906f. Tese (Doutorado). L'université de Bordeaux I – França, 1986.

BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Org.). **Didática da Matemática: Reflexões psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artes Médicas, c. 4, p. 54-78, 1996.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics**: Didactique des Mathématiques, 1970-1990. New York, Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002.

BROUSSEAU, G. Research in Mathematics Education. **Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education (ICME-10)**, Technical University of Denmark. Copenhagen, Denmark, 4-11 July, 2004, p. 244-254.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da Teoria das Situações Didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo, Ática, 2008.

BROUSSEAU, G. **Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques**, 2010. Disponível em: [http://guy-brousseau.com/wpcontent/uploads/2010/09/Glossaire\\_V5.pdf](http://guy-brousseau.com/wpcontent/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf). Acesso em: 03 de nov. 2022.

CHAN, I. Matemáticos de ouro: o Brasil que se destaca nas olimpíadas internacionais. **Revista**

**Matemática Universitária**, p. 64-72, 2018. Disponível em: [https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n43\\_Artigo04.pdf](https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n43_Artigo04.pdf). Acesso em: 24 out. 2022.

CRESCENTI, E. P. A formação do professor de Matemática: aprendizagem em geometria e a atuação docente. **Práxis Educativa**, v. 3, n. 1, p. 81-94, 2008.

FILHO, J. E. A. **Situações Didáticas Olímpicas (SDO) para o ensino de geometria plana: um contributo da Engenharia Didática**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

KENDEROV, P. World Federation of National Mathematics Competitions. A Short History. **Mathematics Competitions**, v. 22, n. 2, p. 14-31, 2009. Disponível em: <http://www.wfnmc.org/history.pdf>.

LABLEM, R. L.; BITTAR, M. Reflexões sobre a Teoria das Situações Didáticas por duas pesquisadoras em diferentes estágios da vida acadêmica. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 20, n. 2, p. 202-221, 2018

LABORDE C. Affronter la complexité des situations didactiques d'apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. **Didaskalia**, n.10, p. 97 -112, 1997. Disponível em: [http://documents.irevues.inist.fr/bitstream/handle/2042/23800/DIDASKALIA\\_1997\\_10\\_97.pdf?sequence=1](http://documents.irevues.inist.fr/bitstream/handle/2042/23800/DIDASKALIA_1997_10_97.pdf?sequence=1). Acesso em: 07 de abril. 2022.

MACIEL, M. V. M; BASSO, M. V. A. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP): as Origens de um Projeto de Qualificação do Ensino de Matemática na Educação Básica. **Anais... X Encontro Gaúcho de Educação Matemática**. Ijuí: EGEM, 2009.

MARGOLINAS, C. Situations, savoirs et connaissances...comme lieux de rencontre? **Formation et pratiques d'enseignement en questions**, v. 2, n. 19, p. 31-39, 2015.

MARTINS, R. A. **Colinearidade e concorrência em olimpíadas internacionais de matemática: uma reflexão voltada para o ensino da geometria plana no Brasil**. 145f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade de Brasília, Brasília, 2015. Disponível em: [https://sca.profmatt-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=90299](https://sca.profmatt-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=90299). Acesso em: 20 mar. 2023.

NASCIMENTO, E. G. A. **Avaliação do software GeoGebra como instrumento psicopedagógico de ensino em geometria**. 112 f. Dissertação (Mestrado em Educação Brasileira). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. 2012.

NOIC. **Núcleo olímpico de incentivo ao conhecimento**. Disponível em: <https://noic.com.br/olimpiadas/>. Acesso em: 10 jul 2023.

NUNES, C. B. **O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática**. Tese (Doutorado em Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos). Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2010.

IMO. Olimpíada Internacional de Matemática. Disponível em: <http://www.imo-official.org/>. Acesso em: 23 out. 2022.

OLIVEIRA, C. C. N. **Olimpíadas de matemática: concepção e descrição de “situações olímpicas” com o recurso do software geogebra**. 137f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.

PASSOS, C. L. B. **Representações, interpretações e prática pedagógica: a geometria na salade aula**. 349 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, v. 1, n. 1, p. 7-17, 1993.

PERRIN-GLORIAN, M. J. **L'ingénierie didactique a l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formação des enseignants**. In Margolinas et al.(org.): En amont et en aval des ingénieries didactiques, XV<sup>a</sup> École d'Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme). Recherches em Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 1, p. 57-78, 2009.

PERRIN-GLORIAN, M. J.; BELLEMAIN, P. M. B. L'ingenierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation des maitres. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, v. 9, n. 1, 2019. Disponível em: [https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/index.php/caminhos\\_da\\_educacao\\_matematica/article/view/298](https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/index.php/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/298). Acesso em: 20 ago. 2022.

SANTIAGO, P. V. S. **Olimpíada Internacional de Matemática: Situações Didáticas Olímpicas no Ensino de Geometria Plana**. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2021.

SANTIAGO, P. V.; ALVES, F. Situações didáticas na Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 6, p. 1-24, 2021.

SANTIAGO, P. V. S.; ALVES, F. R. V.; MAIA, B. M. P. Sobre a noção de Situação Didática Olímpica aplicada ao contexto das Olimpíadas Internacionais de Matemática. **Revista de Educação Matemática**, v. 18, p. e021029, 8 jun. 2021.

SANTIAGO, P. V. S. **Olimpíada Internacional de Matemática: Situações Didáticas Olímpicas no ensino de geometria plana**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2021.

SANTOS, A. P. R. A. **Situações Didáticas Olímpicas: Um contributo da Engenharia Didática Clássica no Ensino de Olimpíadas**. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2018.

SANTOS, A. P. R. A.; ALVES, F. R. V. Uma engenharia didática para o ensino de matemática olímpica: situações olímpicas com auxílio do software GeoGebra. **Góndola**, v. 13, n. 1, p. 141-154. 2018. doi: <http://doi.org/10.14483/23464712.11732>.

SANTOS, A. P. R. A.; ALVES, F. R. V. A Teoria das Situações Didáticas no ensino das Olimpíadas de Matemática: Uma Aplicação do Teorema de Pitot. **Indagatio Didactica**, v. 9, n. 4, p. 279-296, 2017.

SANTOS, A. S.; SILVA, J. J.; MOURA, D. A. S. **Tecnologia a favor da educação Matemática: Geogebra e suas aplicações**. Minas Gerais, 2016, p. 336.

SILVA, J. G. A. da. **Situações Didáticas Olímpicas (SDO): Uma Engenharia Didática de Formação no Curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA para o Ensino de Geometria Plana**. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2020.

SILVA, J. G. A.; ALVES, F. R. V.; MENEZES, D. B. Aspectos da Teoria das Situações Didáticas aplicada ao ensino de Geometria plana referente a problemas das Olimpíadas de Matemática com amparo do software GeoGebra. **ReviSeM**, v. 5, n. 2, p. 328-342, 2020.

SILVA, J. G. A.; ALVES, F. R. V.; MENEZES, D. B. Teoria das Situações Didáticas e as Olimpíadas de Matemática: uma aplicação com arrimo do software GeoGebra para o ensino de geometria no Brasil. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, 2021.

SILVA, J. G. A. da; ALVES, F. R. V.; MENEZES, D. B. Teoria das Situações Didáticas Matemáticas e Olimpíadas. **Revista Unión - Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 17, n. 61, 2021.

SIMM, V.; BASNIAK, M. I. **GeoGebra no ensino de funções do primeiro e segundo grau**. Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor (cadernos PDE). Volume 1. Versão online. Governo do Estado do Paraná, 2013, p. 2.

SOUSA, R. T. **Categorias do Raciocínio Intuitivo e o Ensino de Parábolas em Geometria Analítica com Aporte do Software GeoGebra**. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2022.

SOUZA, M. B.; QUARTIERI, M. T.; MARCHI, M. I. **Matematicando: a geometria nas mandalas**. Lajeado, 2017, p.100.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. Um pouco da teoria das situações didáticas (TSD) de Guy Brousseau. **Revista Zetetiké**, v. 21, n. 39, p. 155-168, 2013. DOI: <https://doi.org/10.20396/zet.v21i39.8646602>.

WIEST, D. D. K. **Análise dos impactos da participação na olimpíada Brasileira de matemática das escolas públicas (obmep) para a formação dos professores orientadores e Alunos medalhistas das regiões oeste e sudoeste do paraná**. 237f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Tecnológica federal do Paraná. Pato Branco – PR, 2017.



## **TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO**

### **“O Ensino de Geometria com o auxílio do software GeoGebra: uma Engenharia Didática de Formação para a Olimpíada Internacional de Matemática sob a perspectiva da Teoria das Situações Didáticas e Situações Didáticas Olímpicas”**

**Pesquisadora: Joelma Alves Rodrigues**  
**Orientador: Dr. Francisco Régis Vieira Alves**

Você está sendo convidado a participar como voluntário de uma pesquisa. Este documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, visa assegurar seus direitos como participante e é elaborado em duas vias, uma que deverá ficar com você e outra com a pesquisadora. Por favor, leia com atenção e calma, aproveitando para esclarecer suas dúvidas. Se houver perguntas antes ou mesmo depois de assiná-lo, você poderá esclarecê-las com a pesquisadora. Se preferir, pode levar este termo para casa e consultar seus familiares ou outras pessoas antes de decidir participar. Não haverá nenhum tipo de penalização ou prejuízo se você não aceitar participar ou retirar sua autorização em qualquer momento.

#### **Justificativa e objetivos:**

Desejamos investigar, através da Engenharia Didática de Formação e a Teoria das Situações Didáticas, as manifestações acerca do ensino de geometria, especificamente, o estudo de triângulos, apresentadas pelos professores em formação inicial durante os encontros de formação. Procuramos vincular nesta pesquisa, alunos participantes de um grupo de estudos que aborda a resolução de problemas olímpicos retirados de provas anteriores da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), utilizando o software GeoGebra como ferramenta auxiliar. Assim, optamos por realizar a experimentação com acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), situada em Sobral – CE.

Os encontros serão focados em resolução de problemas retirados da IMO, relacionados ao estudo de triângulos, e observação do comportamento dos participantes ao tentarem resolver esses problemas. No entanto, acreditamos que essa situação despertará seus conhecimentos de ordem epistêmica, além de capacitar esses professores em formação para situações que possam acontecer em sala de aula.

Temos como objetivo geral: Investigar se a utilização da metodologia de pesquisa baseada nos princípios da Engenharia Didática de Formação (EDF), aliada à Teoria das Situações Didáticas (TSD) e com o auxílio do software GeoGebra, é capaz de minimizar as dificuldades que os estudantes tem em relação ao ensino de geometria, sobretudo, no estudo de triângulos.

Os objetivos específicos são os seguintes:

- Identificar obstáculos didáticos que transpassam o ensino do conteúdo de triângulos;
- Verificar se por meio da Engenharia Didática de Formação (EDF), a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e o aporte do GeoGebra na representação geométrica, as situações didáticas elaboradas poderão contribuir na compreensão do conteúdo de triângulos;
- Observar as contribuições do estudo de triângulos para a preparação dos alunos para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO).

#### **Procedimentos:**

Participando do estudo você está sendo convidado a assistir e participar ativamente das formações, de forma presencial, sendo convidado a fazer o preenchimento dos questionários propostos, participar de gravação de áudio dos encontros, gravação da tela do computador no ambiente do GeoGebra e responder as situações didáticas propostas nos encontros.

Estes procedimentos descritos acima ocorrerão nas dependências da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), Sobral – CE, durante cinco encontros que acontecerão nas segundas-feiras do mês de abril/2022 e na primeira segunda-feira do mês de maio/2022, no Laboratório de Informática, no período da manhã, com duração prevista de 4 horas por encontro, totalizando 20 horas de formação.

Ressaltamos que devido à pandemia COVID-19 todas as normas sanitárias serão seguidas, como o distanciamento social nas dependências do Laboratório de Informática da universidade, o uso obrigatório de máscara e a disponibilidade de álcool em gel 70% para os participantes.

Rubrica do pesquisador: \_\_\_\_\_

Rubrica do participante: \_\_\_\_\_



**Observações:**

- Eventualmente, sob permissão expressa dos participantes, realizaremos coleta de imagem e áudio via equipamentos eletrônicos apropriados (celular, câmera fotográfica ou de vídeo, gravador de áudio), com o intuito de auxiliar e fundamentar a análise dos exercícios e problemas presentes nos questionários impressos.

Somente a pesquisadora e o orientador terão acesso ao material coletado e a identidade dos participantes será mantida em sigilo absoluto. Ao fim da pesquisa, os dados serão discutidos pelos pesquisadores envolvidos e, em seguida, o material coletado na forma de questionário, entrevistas de vídeo ou áudio serão descartadas, ficando de posse dos pesquisadores por um período máximo de 5 anos.

**Desconfortos e riscos:**

Você **não** deve participar deste estudo caso sinta algum tipo de desconforto dentro das dependências do laboratório de informática ou possuir impossibilidade de seguir as orientações da pesquisadora, pois essa pesquisa envolve o manuseio de um software matemático, conhecido como GeoGebra, e que exige atenção dos sujeitos da pesquisa para que o estudo proceda.

Os riscos existentes nessa pesquisa são:

- Medo de não saber responder às perguntas propostas nos questionários;
- Estresse, cansaço ou aborrecimento no decorrer da resolução dos questionários;
- O aluno se sentir constrangido ao responder os questionários no momento das formações ou da coleta de dados;
- Quebra de sigilo e identificação do participante.

Ressaltamos que buscaremos minimizar quaisquer desconfortos, garantindo que a pesquisa seja desenvolvida em local reservado e que o participante tem a liberdade de não responder qualquer questão que ele considere constrangedora. A pesquisadora se responsabilizará pelo sigilo dos dados coletados, assegurando a confidencialidade, privacidade e proteção da imagem dos participantes envolvidos.

**Benefícios:**

Esta pesquisa procura realizar uma contribuição no desenvolvimento das competências profissionais dos professores em formação do curso de licenciatura em Matemática, utilizando a Engenharia Didática de Formação e a Teoria das Situações Didáticas como fundamentação teórica para esta pesquisa. Temos como objeto matemático o ensino de geometria, especificamente, o estudo de triângulos, onde selecionamos problemas de provas anteriores da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). Outra contribuição dessa pesquisa, é o fato do professor em formação estar se preparando para situações que podem acontecer em sua sala de aula, pois traremos, em certos momentos, problemas que eles precisam estar preparados para resolver, praticando formas de solucionar problemas. E por fim, pretendemos instigar o estudo pela Matemática a partir da resolução de situações didáticas auxiliados com o uso de tecnologias.

**Acompanhamento e assistência:**

O acompanhamento didático/pedagógico decorrente de eventuais dificuldades surgidas na formação será efetuado preferencialmente no lócus da aula e durante a mesma, se restringindo a dificuldades relativas ao processo de ensino dos assuntos que serão abordados. A pesquisadora se disponibilizará para sanar dúvidas que possam surgir durante os encontros, auxiliando no aprendizado do participante.

Caso o participante sinta algum desconforto físico ou psicológico decorrente da realização da pesquisa, a pesquisadora se responsabilizará em encaminhar e garantir o atendimento médico/psicológico necessário ao participante.

**Sigilo e privacidade:**

Você tem a garantia de que sua identidade será mantida em sigilo e nenhuma informação será dada a outras pessoas que não façam parte da equipe de pesquisadores. Na divulgação dos

Rubrica do pesquisador: \_\_\_\_\_ Rubrica do participante: \_\_\_\_\_



resultados desse estudo, seu nome não será citado. Qualquer gravação (áudio e/ou vídeo) e/ou questionário aplicados durante a pesquisa será(ão) mantido(s) em posse do pesquisador responsável por um período de 5 anos. Após passado esse tempo, todo o material será descartado.

**Ressarcimento e Indenização:**

Você terá direito ao ressarcimento das despesas diretamente decorrentes de sua participação na pesquisa e à indenização pelos danos resultantes desta, nos termos da Lei.

**Contato:**

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com os pesquisadores Joelma Alves Rodrigues ou Francisco Régis Vieira Alves, Av. Treze de Maio, 2081 - Benfica, Fortaleza - CE, 60040-531, Coordenação do Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM, sala 141), fone (88) 99693-1899, e-mail: joelmaalvesrodrigues2020@gmail.com.

Em caso de denúncias ou reclamações sobre sua participação e sobre questões éticas do estudo, você poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) do IFCE das 08:00hs às 12:00hs e das 13:00hs às 17:00hs no IFCE Reitoria - R. Jorge Dumar, 1703 - Jardim América, Fortaleza - CE, 60410-426; fone (85) 34012332 e-mail: [cep@ifce.edu.br](mailto:cep@ifce.edu.br). Ou, poderá entrar em contato com a secretaria do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), localizada no Centro de Ciências da Saúde (CCS), campus do Derby, Av. Comandante Maurocêlio Rocha Pontes, 150, bairro Derby Clube, CEP: 62.042-280, Sobral – CE. Telefone: (88) 3677-4255. E-mail: comite\_etica@uvanet.br.

**Consentimento livre e esclarecido:**

Após ter recebido esclarecimentos sobre a natureza da pesquisa, seus objetivos, métodos, benefícios previstos, potenciais riscos e o incômodo que esta possa acarretar, aceito participar e declaro estar recebendo uma via original deste documento assinada pelo pesquisador e por mim, tendo todas as folhas por nós rubricadas:

Nome do(a) participante: \_\_\_\_\_

e-mail (opcional): \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
(Assinatura do participante ou nome e assinatura do seu RESPONSÁVEL LEGAL)

Data: \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_.

**Responsabilidade do Pesquisador:**

Asseguro ter cumprido as exigências da resolução 510/2016 CNS/MS e complementares na elaboração do protocolo e na obtenção deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Asseguro, também, ter explicado e fornecido uma via deste documento ao participante. Informo que o estudo foi aprovado pelo CEP perante o qual o projeto foi apresentado e pela CONEP, quando pertinente. Comprometo-me a utilizar o material e os dados obtidos nesta pesquisa exclusivamente para as finalidades previstas neste documento ou conforme o consentimento dado pelo participante.

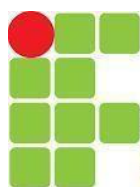
Nome do(a) pesquisador(a): \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
Assinatura do(a) pesquisador(a)

Data: \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_.

Rubrica do pesquisador: \_\_\_\_\_

Rubrica do participante: \_\_\_\_\_



**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E  
MATEMÁTICA**

**MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ENSINO DE MATEMÁTICA**

**Título da pesquisa:**

**O Ensino de Geometria com o auxílio do *software* GeoGebra: uma  
Engenharia Didática de Formação para a Olimpíada Internacional de  
Matemática sob a perspectiva da Teoria das Situações Didáticas**

**Pesquisadora: Joelma Alves Rodrigues**

**Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves**

**Coorientador: Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes**

**QUESTIONÁRIO FINAL**

1. Descreva, pelo menos, dois aprendizados que você adquiriu durante os encontros.

---

---

---

2. Através das Situações Didáticas Olímpicas (SDO), abordadas durante os encontros, é possível o futuro professor de matemática construir o seu próprio conhecimento acerca do objeto de estudo presente nos problemas olímpicos?

---

---

---

3. Qual a importância da formação do professor de matemática, na preparação de alunos para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO)?

---

---

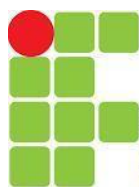
---

4. Na sua opinião, o *software* GeoGebra contribui na resolução de problemas olímpicos? Justifique sua resposta.

---

---

---



**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E  
MATEMÁTICA**

**MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ENSINO DE MATEMÁTICA**

**Título da pesquisa:**

**O Ensino de Geometria com o auxílio do *software* GeoGebra: uma  
Engenharia Didática de Formação para a Olimpíada Internacional de  
Matemática sob a perspectiva da Teoria das Situações Didáticas**

**Pesquisadora: Joelma Alves Rodrigues**

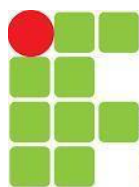
**Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves**

**Coorientador: Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes**

**Aluno (a): \_\_\_\_\_**

**SITUAÇÃO DIDÁTICA OLÍMPICA 1 (SDO1)**

Seja  $ABCDEF$  um hexágono convexo com  $AB = BC = CD$  e  $DE = EF = FA$ , de modo que  $\angle BCD = \angle EFA = \pi/3$ . Suponha que  $G$  e  $H$  sejam pontos no interior do hexágono tais que  $\angle AGB = \angle DHE = 2\pi/3$ . Prove que  $AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$ .



**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E  
MATEMÁTICA**

**MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ENSINO DE MATEMÁTICA**

**Título da pesquisa:**

**O Ensino de Geometria com o auxílio do *software* GeoGebra: uma  
Engenharia Didática de Formação para a Olimpíada Internacional de  
Matemática sob a perspectiva da Teoria das Situações Didáticas**

**Pesquisadora: Joelma Alves Rodrigues**

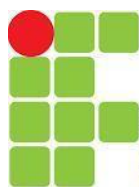
**Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves**

**Coorientador: Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes**

**Aluno (a):** \_\_\_\_\_

**SITUAÇÃO DIDÁTICA OLÍMPICA 2 (SDO2)**

Seja  $\Gamma$  o circuncírculo do triângulo acutângulo  $ABC$ . Os pontos  $D$  e  $E$  estão sobre os segmentos  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$  respectivamente, de modo que  $\overline{AD} = \overline{AE}$ . As mediatrizes de  $\overline{BD}$  e  $\overline{CE}$  intersectam os arcos menores  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{AC}$  de  $\Gamma$  nos pontos  $F$  e  $G$ , respectivamente. Prove que as retas  $\overline{DE}$  e  $\overline{FG}$  são paralelas (ou são a mesma reta).



**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E  
MATEMÁTICA**

**MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ENSINO DE MATEMÁTICA**

**Título da pesquisa:**

**O Ensino de Geometria com o auxílio do *software* GeoGebra: uma  
Engenharia Didática de Formação para a Olimpíada Internacional de  
Matemática sob a perspectiva da Teoria das Situações Didáticas**

**Pesquisadora: Joelma Alves Rodrigues**

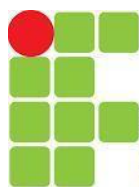
**Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves**

**Coorientador: Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes**

**Aluno (a): \_\_\_\_\_**

**SITUAÇÃO DIDÁTICA OLÍMPICA 3 (SDO3)**

Seja  $ABC$  um triângulo com incentro  $I$ . Um ponto  $P$  no interior do triângulo verifica  $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$ . Prove que  $AP \geq AI$ , com igualdade se, e somente se,  $P = I$ .



**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E  
MATEMÁTICA**

**MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ENSINO DE MATEMÁTICA**

**Título da pesquisa:**

**O Ensino de Geometria com o auxílio do *software* GeoGebra: uma  
Engenharia Didática de Formação para a Olimpíada Internacional de  
Matemática sob a perspectiva da Teoria das Situações Didáticas**

**Pesquisadora: Joelma Alves Rodrigues**

**Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves**

**Coorientador: Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes**

**Aluno (a): \_\_\_\_\_**

**SITUAÇÃO DIDÁTICA OLÍMPICA 4 (SDO4)**

Seja  $ABC$  um triângulo cujo circuncentro é  $O$ . Sejam  $P$  e  $Q$  pontos interiores dos lados  $CA$  e  $AB$ , respectivamente. Sejam  $K$ ,  $L$  e  $M$  os pontos médios dos segmentos  $BP$ ,  $CQ$  e  $PQ$ , respectivamente, e  $\Gamma$  a circunferência que passa por  $K$ ,  $L$  e  $M$ . Suponha que a reta  $PQ$  é tangente à circunferência  $\Gamma$ . Demonstre que  $OP = OQ$ .



UNIVERSIDADE ESTADUAL  
VALE DO ACARAÚ  
Pró-Reitoria de Ensino de Graduação



GOVERNO DO  
ESTADO DO CEARÁ  
Secretaria da Ciência, Tecnologia  
e Educação Superior

## FORMULÁRIO DE CADASTRO GRUPO DE ESTUDO

### ÁREA DO CONHECIMENTO:

Ensino de Matemática

### Denominação do Grupo de Estudo:

Grupo de Estudos do Ensino de Geometria com o auxílio do software GeoGebra

### Dados do coordenador do Grupo de Estudo:

**Nome:** Joelma Alves Rodrigues

**Titulação:** Mestranda

**Curso /Centro/Instituição:** IFCE/Campus Fortaleza

**Telefone:** (88) 9 9693-1899

**Email:** joelmaalvesrodrigues2020@gmail.com

### Tema de Estudo

O Ensino de Geometria com o auxílio do software GeoGebra: uma Engenharia Didática de Formação para a Olimpíada Internacional de Matemática sob a perspectiva da Teoria das Situações Didáticas

( ) Carga horária semanal: \_\_\_\_\_ horas **ou** ( x ) Carga horário mensal: 20 horas

### Objetivo

**Objetivo Geral:** Realizar um processo formativo referente ao ensino de geometria, especificamente o estudo dos triângulos, a partir dos problemas da IMO, visando um modelo de ensino com o auxílio do *software* GeoGebra e a Teoria das Situações Didáticas.

### Objetivos Específicos:

- Resolver Problemas Olímpicos (POs) abordando o estudo dos triângulos, com base na Teoria das Situações Didáticas e com apoio do *software* GeoGebra;
- Proporcionar aos sujeitos a vivência de métodos de estudos inerentes ao uso de Problemas Olímpicos (POs), com foco na preparação para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO);
- Verificar o desenvolvimento dos sujeitos em relação ao uso do *software* GeoGebra na resolução dos problemas da IMO.



UNIVERSIDADE ESTADUAL  
VALE DO ACARAÚ  
Pró-Reitoria de Ensino de Graduação



GOVERNO DO  
ESTADO DO CEARÁ  
Secretaria da Ciência, Tecnologia  
e Educação Superior

### Justificativa

Com o desejo de aplicar seu projeto de pesquisa do mestrado acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática, a pesquisadora busca obter os resultados, por meio do presente grupo de estudo, para continuar sua investigação e, posteriormente, concluir sua pesquisa.

Contudo, a justificativa consiste em contribuir na formação de professores de matemática com domínio para abordar o conteúdo de triângulos, fazendo esse resgate da geometria e visando um ensino voltado para a preparação das olimpíadas internacionais.

### Equipe do Grupo de Estudo

#### Docente/pesquisador

| Membros                | Curso      | Instituição |
|------------------------|------------|-------------|
| Joelma Alves Rodrigues | Matemática | IFCE        |

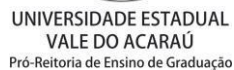
#### Discente

| Membros (discentes/bolsista) | Curso | Instituição |
|------------------------------|-------|-------------|
|                              |       |             |

Em 23/08/2022

Joelma Alves Rodrigues

Assinatura do Coordenador(a) do Grupo



Em \_\_\_\_\_/\_\_\_\_\_/\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
Assinatura do Coordenador(a) do Curso

Em \_\_\_\_\_/\_\_\_\_\_/\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
Assinatura do Diretor (a) de Centro



UNIVERSIDADE ESTADUAL  
VALE DO ACARAÚ - UVA/CE



## PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

Elaborado pela Instituição Coparticipante

### DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

**Título da Pesquisa:** O ENSINO DE GEOMETRIA COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA: UMA ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO PARA A OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA SOB A PERSPECTIVA DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS E SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS

**Pesquisador:** JOELMA ALVES RODRIGUES

**Área Temática:**

**Versão:** 2

**CAAE:** 56235921.0.3001.5053

**Instituição Proponente:** Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA

**Patrocinador Principal:** Financiamento Próprio

### DADOS DO PARECER

**Número do Parecer:** 5.530.894

#### Apresentação do Projeto:

O projeto apresentado consiste em investigar a utilização da metodologia de pesquisa baseada nos princípios da Engenharia Didática de Formação (EDF), aliada à Teoria das Situações Didáticas (TSD) e com o auxílio do software GeoGebra, é capaz de minimizar as dificuldades que os estudantes tem em relação ao ensino de geometria, sobretudo, no estudo de triângulos.

Os participantes do estudo serão dez licenciandos, estudantes do terceiro período do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA.

Os dados serão coletados por meio de encontros formativos com uma carga horária de 20 horas, divididos em 5 encontros, abordando o estudo de triângulos, associado ao uso do software GeoGebra para uma melhor representação e modelização dos problemas.

Após a aplicação dos encontros formativos os alunos serão avaliados através da aplicação de

**Endereço:** Av Comandante Maurocélvio Rocha Ponte, 150

**Bairro:** Derby

**CEP:** 62.041-040

**UF:** CE

**Município:** SOBRAL

**Telefone:** (88)3677-4255

**Fax:** (88)3677-4242

**E-mail:** cep\_uva@uvanet.br



Continuação do Parecer: 5.530.894

quatro

situações didáticas.

O TCLE está em acordo com as normas vigentes.

### **Objetivo da Pesquisa:**

Objetivo Primário:

- Investigar se a utilização da metodologia de pesquisa baseada nos princípios da Engenharia Didática de Formação (EDF), aliada à Teoria das Situações Didáticas (TSD) e com o auxílio do software GeoGebra, é capaz de minimizar as dificuldades que os estudantes tem em relação ao ensino de geometria, sobretudo, no estudo de triângulos

Objetivo Secundário:

- Identificar obstáculos didáticos que transpassam o ensino do conteúdo de triângulos;
- Verificar se por meio da Engenharia Didática de Formação (EDF), a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e o aporte do GeoGebra na representação geométrica, as situações didáticas elaboradas poderão contribuir na compreensão do conteúdo de triângulos;
- Observar as contribuições do estudo de triângulos para a preparação dos alunos para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO).

### **Avaliação dos Riscos e Benefícios:**

Riscos:

- Medo de não saber responder às perguntas propostas nos questionários;
- Estresse, cansaço ou aborrecimento no decorrer da resolução dos questionários;
- O aluno se sentir constrangido ao responder os questionários no momento das formações ou da coleta de dados;
- Quebra de sigilo e identificação do participante.

Benefícios:

- Esta pesquisa procura realizar uma contribuição no desenvolvimento das competências profissionais dos

**Endereço:** Av Comandante Maurocéllo Rocha Ponte, 150

**Bairro:** Derby

**CEP:** 62.041-040

**UF:** CE

**Município:** SOBRAL

**Telefone:** (88)3677-4255

**Fax:** (88)3677-4242

**E-mail:** cep\_uva@uvanet.br



Continuação do Parecer: 5.530.894

professores em formação do curso de licenciatura em Matemática, utilizando a Engenharia Didática de Formação e a Teoria das Situações Didáticas como fundamentação teórica para esta pesquisa.

**Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:**

O trabalho investiga a metodologia de pesquisa baseada nos princípios da Engenharia Didática de Formação (EDF), aliada à Teoria das Situações Didáticas (TSD) e com o auxílio do software GeoGebra, é capaz de minimizar as dificuldades que os estudantes tem em relação ao ensino de geometria, sobretudo, no estudo de triângulos.

Em princípio não há uma comparativa de resultado que demonstre um claro ganho da aplicação da metodologia.

**Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:**

Tudo está de acordo.

**Recomendações:**

Sem recomendações.

**Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:**

Frente as mudanças inseridas, sugiro aprovação.

**Considerações Finais a critério do CEP:**

Projeto de pesquisa APROVADO. O CEP reforça a Resolução CNS 466/12, onde: "XI.2 - Cabe ao pesquisador: d) elaborar e apresentar os relatórios parciais e final da pesquisa". Estes relatórios obrigatórios devem ser enviados via Plataforma Brasil, para o monitoramento e arquivamento da pesquisa pelo CEP.

**Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:**

| Tipo Documento                                            | Arquivo                                       | Postagem               | Autor                  | Situação |
|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|------------------------|------------------------|----------|
| Informações Básicas do Projeto                            | PB_INFORMAÇÕES_BASICAS_DO_PROJETO_1917466.pdf | 20/05/2022<br>14:08:22 |                        | Aceito   |
| TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência | 7_TCLE_JOELMA.pdf                             | 20/05/2022<br>14:07:43 | JOELMA ALVES RODRIGUES | Aceito   |

**Endereço:** Av Comandante Maurocélvio Rocha Ponte, 150

**Bairro:** Derby

**CEP:** 62.041-040

**UF:** CE

**Município:** SOBRAL

**Telefone:** (88)3677-4255

**Fax:** (88)3677-4242

**E-mail:** cep\_uva@uvanet.br



Continuação do Parecer: 5.530.894

|                                                           |                                                                           |                        |                           |        |
|-----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|------------------------|---------------------------|--------|
| Folha de Rosto                                            | FOLHA_DE_ROSTO_JOELMA.pdf                                                 | 20/05/2022<br>14:06:08 | JOELMA ALVES<br>RODRIGUES | Aceito |
| Outros                                                    | Questionario2_Situacoes_Didaticas.pdf                                     | 22/12/2021<br>23:19:14 | JOELMA ALVES<br>RODRIGUES | Aceito |
| Outros                                                    | Questionario1_Geogebra.pdf                                                | 22/12/2021<br>23:18:46 | JOELMA ALVES<br>RODRIGUES | Aceito |
| TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência | 7TCLE_corrigido_JOELMA.pdf                                                | 22/12/2021<br>23:17:52 | JOELMA ALVES<br>RODRIGUES | Aceito |
| Projeto Detalhado / Brochura Investigador                 | 5projeto_Joelma.pdf                                                       | 22/12/2021<br>23:16:26 | JOELMA ALVES<br>RODRIGUES | Aceito |
| Outros                                                    | 2declaracao_de_garantia_de_regresso_dos_beneficios_da_pesquisa_JOELMA.pdf | 22/12/2021<br>23:14:20 | JOELMA ALVES<br>RODRIGUES | Aceito |
| Outros                                                    | 1declaracao_de_compromisso_de_apresentacao_dos_resultados_JOELMA.pdf      | 22/12/2021<br>23:12:36 | JOELMA ALVES<br>RODRIGUES | Aceito |

**Situação do Parecer:**

Aprovado

**Necessita Apreciação da CONEP:**

Não

SOBRAL, 15 de Julho de 2022

---

**Assinado por:**  
**CIBELLY ALINY SIQUEIRA LIMA FREITAS**  
**(Coordenador(a))**

**Endereço:** Av Comandante Maurocélvio Rocha Ponte, 150

**Bairro:** Derby

**CEP:** 62.041-040

**UF:** CE

**Município:** SOBRAL

**Telefone:** (88)3677-4255

**Fax:** (88)3677-4242

**E-mail:** cep\_uva@uvanet.br